

УДК 531.5

© 1993 г. Б. С. БАРДИН, А. П. МАРКЕЕВ

ПЛОСКИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Исследуется динамика вязкоупругого однородного кругового кольца с жестко закрепленной в нем материальной точкой в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предполагается, что кольцо достаточно жесткое, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Получено уравнение движения кольца как целого относительно центра масс в плоскости кеплеровской орбиты. Найдены стационарные режимы движения кольца на слабоэллиптической орбите при резонансах и исследована их устойчивость.

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение большой космической конструкции относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Конструкция моделируется упруговязким телом, представляющим собой тонкое вязкоупругое нерастяжимое однородное круговое кольцо с закрепленной в нем материальной точкой произвольной массы. Движение кольца как целого и деформации его отдельных элементов происходят в плоскости орбиты центра масс. Угловая скорость вращения кольца как целого считается малой по сравнению с наименьшей частотой свободных упругих колебаний кольца. Задача изучается в рамках линейной теории упругости. Динамика кольца с малой точечной массой исследована в [1].

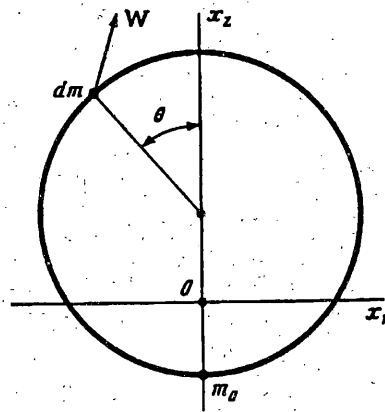
Для описания движения кольца относительно центра масс введем среднюю систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой при отсутствии упругих деформаций направлены вдоль главных центральных осей инерции, причем ось Ox_3 перпендикулярна плоскости кольца. В процессе деформирования средняя система координат перемещается так, что в любой момент времени выполнены равенства [2]:

$$\int_V W dm = 0, \quad \int_V \rho \times W dm = 0 \quad (1.1)$$

где W — упругое смещение элемента dm , положение которого в недеформированном состоянии задается радиусом-вектором $\rho = a(-\sin \theta, \beta/(\beta+1) + \cos \theta, 0)$, где a — радиус кольца, θ — угол между осью Ox_2 и радиусом кольца, проведенным к элементу dm (фиг. 1); $\beta = m_0/m_K$, m_K — масса кольца, m_0 — масса закрепленной в нем материальной точки. Интегрирование в (1.1) выполняется по всему недеформированному кольцу.

Положение элемента dm в средней системе координат задается радиусом-вектором $r = \rho + W$. Используя предположение о малости угловой скорости вращения кольца как целого, пренебрежем предварительным напряжением кольца под действием центробежных сил и представим упругое смещение в виде ряда по собственным формам $U^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)})$ свободных колебаний упругого кольца с материальной точкой

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) U^{(n)}$$



Фиг. 1

На основании методики [3] была решена задача о свободных плоских изгибных колебаниях упругого кольца с материальной точкой и получены выражения для $U_i^{(n)}$ ($n=1, 2, 3 \dots$; $i=1, 2, 3$):

$$U_1^{(n)} = W_n(\theta) \cos \theta - W_n'(\theta) \sin \theta, \quad U_2^{(n)} = W_n(\theta) \sin \theta + \\ + W_n'(\theta) \cos \theta, \quad U_3^{(n)} = 0$$

где в случае нечетного n :

$$W_n(\theta) = C_n \left[(\lambda_{n2}^2 - \lambda_{n1}^2) \sin \lambda_{n0} \theta - \frac{(\lambda_{n2}^2 + \lambda_{n0}^2)}{\text{sh } \lambda_{n1} \pi} \sin \lambda_{n0} \pi \text{ sh } \lambda_{n1} \theta + \right. \\ \left. + \frac{(\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n0}^2)}{\text{sh } \lambda_{n2} \pi} \sin \lambda_{n0} \pi \text{ sh } \lambda_{n2} \theta \right] \quad (1.2)$$

а величина λ_{n0} определяется из уравнения

$$\pi \beta \gamma_n W_n'(\pi) + W_n^{IV}(\pi) = 0 \quad (1.3)$$

В случае четного n :

$$W_n(\theta) = C_n \left[\frac{(\lambda_{n2}^2 - \lambda_{n1}^2)}{\lambda_{n0}} \cos \lambda_{n0} \theta + \frac{(\lambda_{n2}^2 + \lambda_{n0}^2)}{\lambda_{n1} \text{ sh } \lambda_{n1} \pi} \sin \lambda_{n0} \pi \text{ ch } \lambda_{n1} \theta - \right. \\ \left. - \frac{(\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n0}^2)}{\lambda_{n2} \text{ sh } \lambda_{n2} \pi} \sin \lambda_{n0} \pi \text{ ch } \lambda_{n2} \theta \right] \quad (1.4)$$

а величина λ_{n0} определяется из уравнения

$$\pi \beta \gamma_n W_n(\pi) - W_n^V(\pi) = 0 \quad (1.5)$$

причем в выражениях (1.2)–(1.5):

$$\lambda_{n1} = \sqrt{\frac{\lambda_{n0}^2 - 2}{2} + \frac{\lambda_{n0}}{2} \left(\frac{\lambda_{n0}^4 - 7\lambda_{n0}^2 + 8}{\lambda_{n0}^2 + 1} \right)^{1/2}}$$

$$\lambda_{n2} = \sqrt{\frac{\lambda_{n0}^2 - 2}{2} - \frac{\lambda_{n0}}{2} \left(\frac{\lambda_{n0}^4 - 7\lambda_{n0}^2 + 8}{\lambda_{n0}^2 + 1} \right)^{1/2}}, \quad \gamma_n = \frac{\lambda_{n0}^2 (\lambda_{n0}^2 - 1)^2}{\lambda_{n0}^2 + 1}$$

Штрихом в (1.2)–(1.5) обозначено дифференцирование по θ . Выражение для

C_n получается из условия ортонормированности собственных форм $\int_V U^{(n)} U^{(k)} dm = \delta_{nk}$ (δ_{nk} — символ Кронекера).

Частота Ω_n свободных колебаний, отвечающая форме $U^{(n)}$, определяется выражением $\Omega_n^2 = \gamma_n EI / \sigma a^4$ (σ и EI — плотность и изгибная жесткость кольца).

Диссипативную функцию, отвечающую внутренней вязкости, запишем в виде

$$R = \chi b \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^2 \dot{q}_n^2 \quad (1.6)$$

где b — положительная постоянная, а χ — безразмерный параметр.

Пусть $OX_1 X_2 X_3$ — орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс относительно притягивающего центра, а оси OX_2 и OX_1 , соответственно по бинормали к орбите и по ее трансверсали в сторону движения центра масс. В рассматриваемом случае плоских движений оси Ox_3 и OX_2 средней и орбитальной систем координат совпадают. Обозначим через φ угол между осями Ox_2 и OX_3 .

Уравнения движения упругого тела в плоскости кеплеровской орбиты имеют вид [4]:

$$J_3 (\ddot{\varphi} + \ddot{v}) + \frac{3(1 + e \cos v)^3}{2(1 - e^2)^3} (J_1 - J_2) \sin 2\varphi = \frac{3(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} [q_n (H_{11}^{(n)} - H_{22}^{(n)}) \sin 2\varphi + 2H_{12}^{(n)} \cos 2\varphi] - 2(\ddot{\varphi} + \ddot{v}) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} q_n (H_{11}^{(n)} + H_{22}^{(n)}) - 2(\dot{\varphi} + \dot{v}) \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n (H_{11}^{(n)} + H_{22}^{(n)})$$

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2} \ddot{q}_n + 2\chi b \omega_0^2 \sigma_n^2 \dot{q}_n + \sigma_n^2 q_n = \frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2} (Q_n + F_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\dot{v} = (1 + e \cos v)^2 / (1 - e^2)^{3/2}$$

$$Q_n = \frac{(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} [H_{11}^{(n)} (3 \sin^2 \varphi - 1) + H_{22}^{(n)} (3 \cos^2 \varphi - 1) +$$

$$+ 3H_{12}^{(n)} \sin 2\varphi] + (H_{11}^{(n)} + H_{22}^{(n)}) (\dot{\varphi} + \dot{v})^2$$

где F_n — линейные формы от q_j , $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots$); явный вид функций F_n в дальнейшем не потребуется.

Здесь введены обозначения: v — истинная аномалия, $\sigma_n = \Omega_n / \Omega_1$, ω_0 — среднее движение центра масс ($\omega_0 = 2\pi / T_0$, T_0 — период обращения центра масс по орбите), e — эксцентриситет орбиты, J_i — момент инерции недеформированного тела относительно оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$), а $H_{kp}^{(n)} = \int x_k U_p^{(n)} dm$, x_k — проекция ρ на ось Ox_k ($k, p = 1, 2$). Точкой обозначено дифференцирование по $\tau = \omega_0 t$.

В исследуемой задаче величины J_p , $H_{kp}^{(n)}$ имеют вид

$$J_1 = (1 + 2\beta / (\beta + 1)) m_K a^2 / 2, \quad J_2 = m_K a^2 / 2, \quad J_3 = (1 + \beta / (\beta + 1)) m_K a^2$$

$$H_{11}^{(n)} = \frac{3m_0 a \gamma_n}{5\gamma_n - 36} W_n'(\pi), \quad H_{22}^{(n)} = \frac{m_0 a (2\gamma_n - 36)}{5\gamma_n - 36} W_n'(\pi)$$

$$H_{12}^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{m_0 a (2\gamma_n - 36)}{5\gamma_n - 36} W_n(\pi)$$

Пусть выполняется неравенство $0 < (\chi) \ll (e) \ll 1$, где χ — параметр из (1.6),

а $\varepsilon = (\omega)_0/\Omega_1$. Последние неравенства означают, что $T_1 \ll T_2 \ll T_3$, где T_1 — наибольший период свободных упругих колебаний кольца с материальной точкой, T_2 — характерное время затухания этих колебаний, T_3 — характерное время движения кольца как целого. В дальнейшем будем рассматривать квазистатические режимы движения кольца, устанавливающиеся после затухания его собственных упругих колебаний [1].

Считая, что $\chi \sim \varepsilon^x$ ($1 < x < 2$), а $e \sim \varepsilon^2$ аналогично [4] можно показать, что если пренебречь величинами порядка ε^4 и выше, то квазистатические режимы движения кольца как целого будут описываться дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \alpha^2 \sin \psi &= e (4 \sin \tau - 3\alpha^2 \cos \tau \sin \psi) + \varepsilon^2 F(\psi, \dot{\psi}) \\ \psi &= 2\varphi, \quad \alpha^2 = 3(J_1 - J_2)/J_3, \quad F(\psi, \dot{\psi}) = 1/3(3 - \alpha^2) \times \\ &\times [b_1 \sin \psi + b_2 \sin 2\psi + \chi b_3 \sin^2 \psi + (b_4 \sin \psi + \chi b_5 \cos \psi + \\ &+ \chi b_6 \sin^2 \psi + \chi b_7 \cos^2 \psi) \dot{\psi} + (b_8 \sin \psi + \chi b_9 \cos \psi) \dot{\psi}^2 + \chi b_{10} \cos \psi \dot{\psi}^3] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Выражения для коэффициентов b_i ($i = 1, \dots, 10$), зависящие от параметра α , ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

2. Стационарные режимы колебания и вращения при резонансе. Если рассматриваемое кольцо является абсолютно жестким ($\varepsilon = 0$), а орбита его центра масс круговая ($e = 0$), то (1.7) представляет собой уравнение математического маятника. Исключая из рассмотрения аperiодические движения, общее решение этого уравнения можно записать в форме

$$\psi = Q(\delta, k), \quad \delta = (\omega)(k)(\tau + \tau_0) \quad (2.1)$$

где $\omega(k)$ — частота колебаний или средняя угловая скорость вращений; k, τ_0 — постоянные интегрирования. Величину k , представляющую модуль эллиптических интегралов, в случае колебаний будем обозначать k_1 , а в случае вращений — k_2 . При любом k функция Q обладает свойством $Q(\delta + 2\pi, k) = Q(\delta, k) + \gamma$, причем в случае колебаний $\gamma = 0$, а в случае вращений $\gamma = 2\pi$.

Для исследования движений упругого кольца с большой жесткостью на слабоэллиптической орбите воспользуемся методом усреднения [5, 6]. Решение уравнения (1.7) при $e \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ будем искать в виде (2.1), положив дополнительно

$$\psi = \omega(k) Q_\delta(\delta, k) \quad (2.2)$$

Выражения (2.1), (2.2) можно рассматривать как замену переменных $\psi, \dot{\psi} \rightarrow \delta, k$. В новых переменных уравнение (1.7) запишется в виде системы [7]:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\tau} &= \frac{1}{J'(k)} [4e \sin \tau - 3e\alpha^2 \cos \tau \sin Q + \varepsilon^2 F(Q, \omega Q_\delta)] Q_\delta(\delta, k) \\ \frac{d\delta}{d\tau} &= \omega(k) - \frac{1}{J'(k)} [4e \sin \tau - 3e\alpha^2 \cos \tau \sin Q + \varepsilon^2 F(Q, \omega Q_\delta)] Q_k(\delta, k) \\ J(k) &= \frac{\omega(k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_\delta^2(\delta, k) d\delta, \quad J'(k) = \frac{dJ}{dk} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если частота $\omega(k)$ не близка к какому-либо рациональному числу, то можно показать, что в усредненных по δ и τ уравнениях (2.3) члены при e равны нулю, т. е. возмущающий момент, вызванный эллиптичностью орбиты, в рассматриваемом приближении не проявляется. Далее рассматривается лишь резонансный случай, когда $\omega(k) = p/s$ малая величина (p, s — взаимно простые натуральные числа). Введем новую переменную $\vartheta = s\delta - p\tau$, которая является

медленной вблизи точек фазового пространства, где выполнено резонансное соотношение, и быстрой — вдали от этих точек. Усреднив уравнения для k и ϑ по быстрой переменной δ , получим систему

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{1}{J'(k)} [e \sin \vartheta M_s(k) + \chi \varepsilon^2 P(k)] \quad (2.4)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = s\omega(k) - 1 - \frac{1}{J'(k)} [e N_s(k) \cos \vartheta + \varepsilon^2 s R(k)]$$

$$M_s(k) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\delta (8Q_\delta + 3s\omega^2 Q_\delta^3) d\delta \quad (2.5)$$

$$N_s(k) = -dM_s/dk \quad (2.6)$$

$$P(k) = \frac{(3 - \alpha^2)}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b_3 \sin^2 Q Q_\delta + \omega (b_5 \cos Q + b_6 \sin^2 Q + b_7 \cos^2 Q) \times$$

$$\times Q_\delta^2 + \omega^2 b_9 \cos Q Q_\delta^3 + \omega^3 b_{10} \cos Q Q_\delta^4] d\delta \quad (2.7)$$

$$R(k) = \frac{(3 - \alpha^2)}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(b_1 \sin Q + b_2 \sin 2Q) +$$

$$+ \omega b_4 \sin Q Q_\delta + \omega^2 b_8 \sin Q Q_\delta^2] Q_\delta d\delta \quad (2.8)$$

В (2.4)–(2.8) и далее $p=1$ (при $p \neq 1$ эллиптичность орбиты в первом приближении по e не влияет на изменение величины k). Выпишем еще, в явном виде, общее решение уравнения (1.7) при $e=0$, $\varepsilon=0$, которое понадобится при вычислении интегралов (2.5)–(2.8):

$$Q_1(\delta, k_1) = 2 \arcsin \left\{ k_1 \operatorname{sn} \left(\frac{2K(k_1)}{\pi} \delta, k_1 \right) \right\}, \quad Q_2(\delta, k_2) = 2 \operatorname{am} \left(\frac{K(k_2)}{\pi} \delta, k_2 \right)$$

Индекс 1 относится к колебательным, а индекс 2 — к вращательным движениям. Частоты колебаний и вращений равны, соответственно $\omega_1(k_1) = \pi\alpha/2K(k_1)$, $\omega_2(k_2) = \pi\alpha/k_2 K(k_2)$. Здесь $K(k_i)$ ($i=1, 2$) — полный эллиптический интеграл первого рода.

Особым точкам системы (2.4) соответствуют стационарные режимы движения с постоянными $k=k_*$, $\vartheta=\vartheta_*$. В случае колебаний стационарные режимы представляют собой $2\pi s$ — периодические по «времени» $\tau = \omega_0 t$ колебания, а в случае вращений — вращения с временем полного оборота вокруг центра масс равным $2\pi s$. Для определения k_* , ϑ_* имеем уравнения

$$\sin \vartheta = -\chi \varepsilon^2 P(k)/e M_s(k) \quad (2.9)$$

$$s\omega(k) - 1 - \frac{1}{J'(k)} [e N_s(k) \cos \vartheta + \varepsilon^2 s R(k)] = 0$$

Как показали вычисления, правая часть первого уравнения (2.9) по модулю не превосходит единицу лишь при условии $k_i \geq k_i^{\min}$ ($i=1, 2$), где

$$k_1^{(\min)} = \begin{cases} 0, & s=1, 2 \\ 4 [2\chi \varepsilon^2 \chi_0 / e s]^{1/(s-2)}, & s=2j+1 \quad (j=1, 2, \dots) \\ 4 [8\chi \varepsilon^2 \chi_0 / 3e s]^{1/(s-2)}, & s=2j+2 \quad (j=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\chi_0 = (3 - \alpha^2) [b_3 + b_7]/3$$

$$k_2^{(\min)} = 4 [\chi \xi \varepsilon^2 / 14e]^{-1/2s}, \quad \xi = 81b\omega_0/5 \quad (s=1, 2, \dots)$$

Это означает, что при $k_i < k_i^{(\min)}$ стационарные режимы разрушаются под влиянием диссипации.

Разрешая первое уравнение из (2.9) относительно ϑ имеем

$$\vartheta_* = (-1)^m \vartheta_0 + \pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\vartheta_0 = \arcsin \left(-\chi \frac{\varepsilon^2 P(k_*)}{e M_s(k_*)} \right), \quad ak_* \quad (2.10)$$

k_* определяется из уравнения

$$s\omega(k) - 1 - \frac{1}{J'(k)} \left[e N_s(k) (-1)^m \left(1 - \left(\chi \frac{\varepsilon^2 P(k)}{e M_s(k)} \right)^2 \right)^{1/2} + \varepsilon^2 s R(k) \right] = 0 \quad (2.11)$$

Значения k_* , ϑ_* и k_* , $\vartheta_* + 2\pi s$ отвечают одному и тому же стационарному режиму, поэтому далее $m = 0, 1, 2, \dots, 2s - 1$.

В плоскости α, k уравнение (2.11) задает кривую $k_*(\alpha)$, которую называют резонансной. Эта кривая имеет две ветви (одна ветвь соответствует четному m , а другая — нечетному m), имеющие общие точки если $\vartheta_0 = \pi/2$ (точка минимума $k_*(\alpha)$) или $N_s(k_*) = 0$ (точка пересечения ветвей). В случае колебаний при резонансах $s = 1, 2, 3, 4$ качественный ход резонансных кривых изображен на фиг. 2—5 соответственно, а в случае вращений при резонансе $s = 1$ — на фиг. 6.

Более подробно рассмотрим характер резонансных кривых в случае колебаний при резонансах $\omega = 1, 1/2$, когда стационарные режимы существуют при любом сколь угодно малом k_1 . Поведение резонансной кривой при резонансе $\omega = 1$ в окрестности точки $\alpha = 1, k = 0$ описывается приближенным соотношением

$$\alpha^2 - 1 = k_1^2/2 \pm 2e/k_1 + \varepsilon^2 \eta \quad (2.12)$$

где $\eta = (3 - \alpha^2)(b_1 + 2b_2)/3$. Правая ветвь резонансной кривой имеет вертикальную касательную в точке $A_1(\alpha_0, k_{10})$ (фиг. 2), где $\alpha_0^2 = 1 + 3(2e)^{2/3}/2 + \varepsilon^2 \eta$, $k_{10} = (2e)^{1/3}$. Если $\alpha > \alpha_0$, то существует три стационарных режима, а если $\alpha < \alpha_0$ — один.

При резонансе $\omega = 1/2$ ветви резонансной кривой в точках $B_1(\alpha^{(1)}, 0)$, $B_2(\alpha^{(2)}, 0)$ пересечения с осью $k_1 = 0$ имеют вертикальные касательные (фиг. 3). Значения $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ находятся из уравнения

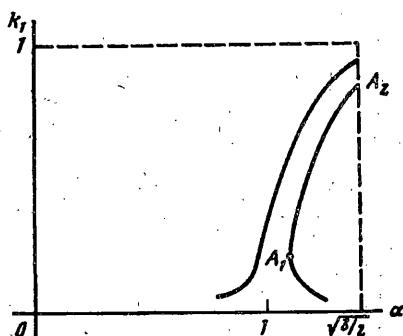
$$\alpha^2 - \frac{1}{4} = \pm \frac{3}{8} e \left(1 - \left(\frac{4\chi\alpha_0\varepsilon^2}{3e} \right)^2 \right)^{1/2} + \varepsilon^2 \eta \quad (2.13)$$

Для определения $\alpha^{(1)}$ нужно взять знак минус в правой части (2.13), а для определения $\alpha^{(2)}$ — знак плюс.

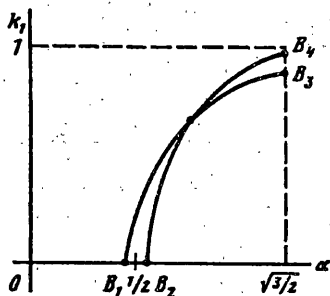
3. Устойчивость стационарных режимов. Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решений k_* , ϑ_* усредненной системы (2.4). Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности решений k_* , ϑ_* системы (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \chi \varepsilon^2 \frac{1}{J'} \frac{\partial P}{\partial k} \Big|_{k=k_*} - \frac{e}{(J')^3} \left[s\omega' (J')^2 + J'' (e N_s \cos \vartheta_* + \varepsilon^2 s R) - \right. \\ \left. - J' \left(e \frac{\partial N_s}{\partial k} \cos \vartheta_* + \varepsilon^2 s \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right] M_s \cos \vartheta_* \Big|_{k=k_*} + \frac{e}{(J')^2} N_s \sin \vartheta_* \times \\ \times \left(e \frac{\partial M_s}{\partial k} \sin \vartheta_* + \chi \varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial k} \right) \Big|_{k=k_*} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

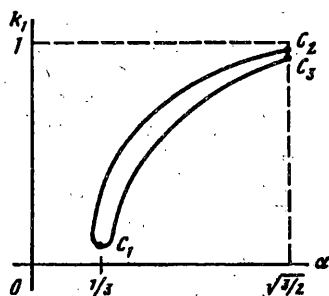
$$J'' = d^2 J / dk^2, \quad \omega' = d\omega / dk$$



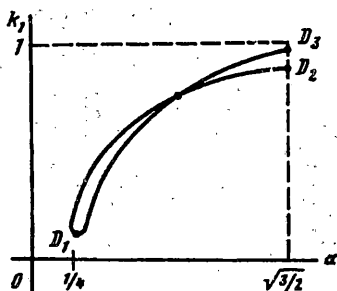
Фиг. 2



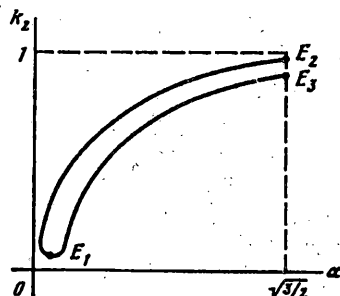
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Условия асимптотической устойчивости решений ϑ_* , k_* (т. е. отрицательности вещественных частей корней уравнения (3.1)) имеют вид

$$\frac{1}{J'} \chi \varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial k} \Big|_{k=k_*} < 0 \quad (3.2)$$

$$\left[\frac{s\omega'}{J'} - e \left(\frac{J''}{(J')^3} N_s - \frac{1}{(J')^2} \frac{\partial N_s}{\partial k} \right) \cos \vartheta_* + \varepsilon^2 s \left(\frac{J''}{(J')^3} R - \frac{1}{(J')^2} \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right] \times \\ \times M_s \cos \vartheta_* \Big|_{k=k_*} < 0 \quad (3.3)$$

В (3.3) отброшены члены порядка χ^2 , ε^2 . Если хотя бы одно из условий (3.2), (3.3) выполняется с обратным знаком, то имеет место неустойчивость.

Вычисления показали, что как в случае колебаний, так и в случае вращений условие (3.2) всегда выполнено. Условие (3.3) можно упростить. Заметим, что величина $|\omega'/J'|$ ограничена снизу отличной от нуля константой, равной $1/8$ в случае колебаний и 1 в случае вращений, поэтому $|\omega'/J'| > \varepsilon$ при любом

допустимом k . Кроме того, можно показать, что, за исключением случая колебаний при резонансе $\omega = 1$ выражения $(J''N_s/J' - \partial N_s/\partial k)/(J')^2$ и $s(J''R/J' - \partial R/\partial k_1)/(J')^2$ ограничены. Следовательно при достаточно малых ε на знак правой части (3.3) влияет только первое слагаемое в квадратных скобках, а это значит, что при малых ε условие (3.3) с учетом выражения (2.10) можно переписать в виде

$$\frac{s\omega' M_s (-1)^m}{J'} \Big|_{k=k_*} < 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s-1) \quad (3.4)$$

Проверка условия (3.4) показала, что стационарные режимы колебаний (за исключением резонанса $\omega = 1$) асимптотически устойчивы при m нечетном (ветви B_1B_3 , C_1C_2 , D_1D_2 на фиг. 3—5 соответственно) и неустойчивы при m четном (ветви B_2B_4 , C_1C_3 , D_1D_3 на фиг. 3—5 соответственно), а стационарные режимы вращений асимптотически устойчивы при m четном (ветвь E_1E_2 на фиг. 6) и неустойчивы при m нечетном (ветвь E_1E_3 на фиг. 6).

В случае колебаний вблизи резонанса $\omega = 1$ при достаточно малых k_1 выражение $e[(J''/J' - \partial N_1/\partial k_1) \cos \vartheta_1/(J')^2 \sim O(e/k_1^2)]$, а $\omega'/J' = -1/8 + O(k_1^2)$, поэтому в (3.3) необходимо учитывать как первое так и второе слагаемые в квадратных скобках. В этом случае, принимая во внимание, что выражение $s(J''R/J' - \partial R/\partial k_1)/(J')^2$ ограничено при всех допустимых k_1 , условие (3.3) при малых ε с учетом выражения (2.10) можно записать в виде

$$(-1)^m M_1 \left[\frac{\omega'}{J'} + e \left(\frac{J''}{(J')^3} N_1 - \frac{1}{(J')^2} \frac{\partial N_1}{\partial k_1} \right) (-1)^m \cos \vartheta_0 \right] \Big|_{k_1=k_{1*}} < 0, \quad (3.5)$$

$$(m = 0, 1)$$

Проверка условия (3.5) показала, что вблизи резонанса $\omega = 1$ при $m = 1$ стационарный режим колебаний асимптотически устойчив (левая ветвь кривой на фиг. 2) а при $m = 0$ неустойчив, если $k_{1*} > k_{10}$ (участок A_1A_2 правой ветви на фиг. 2) и асимптотически устойчив, если $k_{1*} < k_{10}$ (участок правой ветви, расположенный ниже точки A_1 , на фиг. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д. М., Маркеев А. П. Динамика неоднородного упругого кольца в гравитационном поле. М., 1988, 42 с. (Препринт Ин-та проблем механики АН СССР № 331).
2. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
3. Демидович Б. П. Колебания стержня, изогнутого по дуге круга // Инж. сб. 1949. Т. 5. Вып. 2. С. 112—132.
4. Маркеев А. П. К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163—174.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
6. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. Черноусько Ф. Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528—538.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1991