МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 681.3.062

© 1993 г. А. Ф. БРАГАЗИН, В. В. ЛЕОНОВ, В. М. РУДЕНКО,
И. П. ШМЫГЛЕВСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НИЗКОЛЕТЯЩЕГО ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассматривается орбитальное движение спутника, который полагается материальной точкой, в поле Земли с возмущениями, обусловленными гравитационными неоднородностями. В качестве обобщенных координат выбираются элементы кватерниона, определяющего пространственную ориентацию орбиты, а также скоростные параметры. Для анализа уравнений динамики спутника используется модификация метода осреднения, основанная на применении групп Ли. Все вычисления производятся символьно, на ЭВМ, при помощи языка компьютерной алгебры REDUCE. Построена осредненная система в четвертом приближении, которая может быть основой для синтеза эффективных алгоритмов прогноза положения спутника.

1. Основные уравнения. Введем в рассмотрение инерциальную геоцентрическую экваториальную декартову систему координат $OXYZ$, (базис I_γ), орт $\mathbf{i}_1$ которой направлен в точку весеннего равноденствия γ в эпоху, орт $\mathbf{i}_3$ — к северному полюсу Мира вдоль оси вращения Земли, орт $\mathbf{i}_2$ дополняет систему до правой. Состояние спутника в базисе I_γ в произвольный момент времени естественным образом определяется векторами положения $\mathbf{R}$ и скорости $\mathbf{V}$, для которых справедливы уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mu}{R^3}\mathbf{R} + \mathbf{W} \tag{1.1}$$

где μ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, $\mathbf{W}$ — вектор возмущающих ускорений.

В качестве новых переменных для задания пространственной ориентации орбиты и положения спутника на ней введем кватернион $\Pi(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ перехода от базиса I_γ к орбитальному базису Q с началом в центре масс искусственного спутника Земли (ИСЗ) и ортами, определяемыми по формулам

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{q}_3 = -\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{V}}{|\mathbf{R}\times\mathbf{V}|} = -\frac{\mathbf{H}}{H}, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{H}$ — вектор кинетического момента спутника, приведенный к единице массы. Предполагается, что компоненты кватерниона Π удовлетворяют нормировочному уравнению связи

$$\pi_0^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

Для задания формы и размеров орбиты введем параметры

$$V = \mu/H, \quad V_1 = H/R, \quad V_2 = R^{\bullet} \tag{1.4}$$

Переменные V_1 и V_2 суть компоненты вектора $\mathbf{V}$ в базисе Q:

$$\mathbf{V}_Q = (V_1, V_2, 0)\,|_Q = V_1\mathbf{q}_1 + V_2\mathbf{q}_2$$

Формулы перехода от исходных параметров спутника в базисе I_γ **R** и **V** к новым переменным П, V, V_1 и V_2 записываются следующим образом [1, 2]:

$$\mathbf{R}_I = \Pi \circ \mathbf{R}_Q \circ \Pi^*, \quad \mathbf{V}_I = \Pi \circ \mathbf{V}_Q \circ \Pi^*, \quad \mathbf{R}_Q = R\mathfrak{q}_2 = \frac{\mu}{VV_1}\mathfrak{q}_2 \tag{1.5}$$

Полная система уравнений возмущенного движения ИСЗ в новых переменных (основные уравнения) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{V_1}W_1, \quad \frac{dV_1}{dt} = \Omega_3 V_2 + W_1$$

$$dV_2/dt = \Omega_3 (V - V_1) + W_2, \quad 2d\Pi/dt = \Pi \circ \Omega_Q \tag{1.6}$$

$$\Omega_Q = (0, \Omega_2, \Omega_3)_Q = \left(0, -\frac{W_3}{V_1}, -\frac{1}{\mu}VV_1^2\right), \quad \mathbf{W}_Q = (W_1, W_2, W_3)$$

где $\mathbf{W}_Q$ и Ω_Q — вектора возмущающего ускорения и угловой скорости вращения базиса Q относительно I_γ соответственно, заданные в проекциях на оси орбитальной системы координат.

Для замыкания системы (1.6) ее следует дополнить формулами для расчета возмущающих ускорений. В работе рассматриваются возмущения, обусловленные второй зональной гармоникой разложения гравитационного поля Земли. Их проекции на оси базиса Q определяются по формулам

$$W_1 = 4k_{20}(\pi_1\pi_3 - \pi_0\pi_2)(\pi_2\pi_3 + \pi_0\pi_1)$$

$$W_2 = \tfrac{1}{2}k_{20}(1 - 4(\pi_2\pi_3 + \pi_0\pi_1)^2)$$

$$W_3 = 2k_{20}(\pi_2\pi_3 + \pi_0\pi_1)[1 - 2(\pi_1^2 + \pi_2^2)] \tag{1.7}$$

$$k_{20} = -3(\mu/R^2)c_{20}(R_e/R)^2$$

где R_e — экваториальный радиус Земли, c_{20} — безразмерная константа.

2. Применение метода осреднения. Для интегрирования основных уравнений движения ИСЗ применим метод осреднения. С этой целью (1.6) преобразуется к одночастотной системе в стандартной форме с медленными амплитудами и одной быстрой фазой. Ограничение класса рассматриваемых движений околокруговыми орбитами ИСЗ дает основание для выбора в качестве малого параметра эксцентриситета.

Сначала совершим переход к стандартной форме в уравнениях для кватерниона П. Введем промежуточный базис Q' такой, что переход от I_γ к Q' задан некоторым кватернионом $N(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$, а от Q' к Q — кватернионом $\Psi(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$. Очевидно, во все время движения справедливо тождество

$$\Pi \equiv N \circ \Psi \tag{2.1}$$

Кватернионы N и Ψ удовлетворяют кинематическим уравнениям

$$dN/dt = \tfrac{1}{2}N \circ \Omega_{Q'}', \quad d\Psi/dt = \tfrac{1}{2}\Psi \circ \Omega_Q'' \tag{2.2}$$

Здесь $\Omega'_{Q'}$ — угловая скорость вращения базиса Q' относительно базиса I_γ в проекциях на оси Q', а Ω''_Q — угловая скорость вращения базиса Q относительно базиса Q' в проекциях на базис Q, причем

$$\Omega_{Q'}' + \Omega_Q'' \equiv \Omega \tag{2.3}$$

в любом базисе.

Для однозначного задания кватернионов N и Ψ равенств (2.1) и (2.3), разумеется, недостаточно, и имеющейся свободой выбора можно распорядиться для получения удобного вида уравнений. Прежде всего, потребуем, чтобы кватернион Ψ определял поворот на угол ψ вокруг оси q_3 для совмещения базиса Q' с базисом Q:

$$\Psi = (\cos [\tfrac{1}{2}\psi], 0, 0, \sin [\tfrac{1}{2}\psi]) \tag{2.4}$$

Из (2.4) сразу следует, что Ω_Q'' имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$\Omega_Q'' = \Omega^0 q_3 \tag{2.5}$$

где величина Ω^0 должна быть определена в ходе дальнейших преобразований. Из тождества (2.3) определяется следующее значение Ω' в проекциях на Q:

$$\Omega_Q' = \Omega_2 q_2 + (\Omega_3 - \Omega^0)\, q_3 \tag{2.6}$$

В кинематическом уравнении для N вектор Ω' задается проекциями на оси базиса Q':

$$\Omega_{Q'}' = \Psi \circ \Omega_Q' \circ \Psi^* = (-\Omega_2 \sin\psi,\ \Omega_2 \cos\psi,\ \Omega_3 - \Omega^0) \tag{2.7}$$

Пусть кватернион N имеет тождественно равную нулю компоненту

$$\nu_3 \equiv 0 \tag{2.8}$$

Из условия $\dot\nu_3 = 0$ определяется значение Ω^0:

$$\Omega^0 = \Omega_3 + \Delta\Omega, \quad \Delta\Omega = \frac{\Omega_2}{\nu_0}(\nu_1 \cos\psi + \nu_2 \sin\psi) \tag{2.9}$$

Преобразование кинематического уравнения закончено.

Преобразуем уравнения для скоростных параметров V, V_1, V_2. В качестве медленных переменных примем V, а также новые переменные V_a и V_b, определяемые формулами

$$\begin{aligned} V_1 &= V + \Delta V = V + V_a \cos\psi + V_b \sin\psi \\ V_2 &= -V_a \sin\psi + V_b \cos\psi \end{aligned} \tag{2.10}$$

В итоге, в новых переменных основные уравнения (1.6) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
& d\psi/dt = \Omega_3 + \Delta\Omega, \quad dV/dt = -\varkappa W_1 \\
& dV_a/dt = -\Delta\Omega V_b + (1 + \varkappa)\, W_1 \cos\psi - W_2 \sin\psi \\
& dV_b/dt = \Delta\Omega V_a + (1 + \varkappa)\, W_1 \sin\psi + W_2 \cos\psi \\
& d\nu_0/dt = \tfrac{1}{2}\Omega_2 (\nu_1 \sin\psi - \nu_2 \cos\psi) \\
& d\nu_1/dt = -\tfrac{1}{2}\Omega_2 \left(\frac{\nu_0^2 + \nu_2^2}{\nu_0}\sin\psi + \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_0}\cos\psi\right) \\
& d\nu_2/dt = \tfrac{1}{2}\Omega_2 \left(\frac{\nu_0^2 + \nu_1^2}{\nu_0}\cos\psi + \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_0}\sin\psi\right) \\
& \varkappa = \frac{V}{V_1} = \frac{V}{V + V_a\cos\psi + V_b \sin\psi}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где Ω_2 и Ω_3 определены формулами (1.6), а $\Delta\Omega$ — выражением (2.9).

Полученные уравнения по сложности примерно эквивалентны уравнениям для обычных оскулирующих параметров, однако в них не входят тригонометрические функции медленных переменных. Единственная особенность возникает при $\nu_0 = 0$, что соответствует $\mathbf{q}_3 = -\mathbf{i}_3$, т. е. экваториальной орбите с обратным движением. В случае необходимости она легко устраняется изменением направления $\mathbf{i}_3$ или $\mathbf{q}_3$ или введением соответствующего дополнительного кватерниона.

Перейдем в уравнениях (2.11) к безразмерным переменным. Выберем в качестве единиц длины, скорости, ускорения, угловой скорости величины радиуса R_n, скорости V_n, центростремительного ускорения g_n и угловой скорости Ω_n на некоторой круговой орбите радиуса R_n (опорной орбите) соответственно:

$$V_n = \sqrt{\mu/R_n}, \quad g_n = \mu/R_n^2, \quad \Omega_n = \sqrt{\mu/R_n^3} \tag{2.12}$$

В качестве безразмерного времени примем центральный полярный угол, проходимый материальной точкой по опорной орбите

$$\tau = \Omega_n (t - t_0) \tag{2.13}$$

Приведенные к выбранным единицам измерения переменные далее обозначаются соответствующими малыми (строчными) буквами.

Способ введения малого параметра связан с ограничением класса рассматриваемых движений. Принимается, что ИСЗ движется по околокруговым орбитам вокруг Земли с эксцентриситетом $e \simeq 2\cdot 10^{-2}$. Тогда можно считать, что безразмерные величины v_a, v_b, $1-v$ являются величинами первого порядка малости, а величина возмущающего ускорения $|\mathbf{w}|$ — второго порядка малости. Введем формально малый параметр ε как указатель порядка малости, и заменим величины Ω_2, Ω_3, $\Delta\Omega$, W_1, W_2, W_3 в уравнениях (2.11) явными выражениями из (1.6), (2.9) и (1.7). В качестве независимой переменной в уравнениях движения удобно выбрать центральный полярный угол ϑ, задающий положение спутника на орбите и определяемый соотношениями

$$\dot{\vartheta}(\tau) = -\omega_3, \quad \tau'(\vartheta) = -1/\omega_3 \tag{2.14}$$

Здесь и далее штрихами обозначается дифференцирование по независимой переменной ϑ. Тогда система (2.11) преобразуется к стандартной форме одночастотной системы в смысле Боголюбова

$$\begin{aligned}
v' &= -\varepsilon^2 6 c_{20}^2 v^5 \nu_0^2 \,[2\nu_1\nu_2 \cos 2\psi + (\nu_2^2 - \nu_1^2)\sin 2\psi]\\
v_a' &= \varepsilon\,(3/2)\, c_{20} v^5 \{\nu_0^2\, [2\nu_1\nu_2 (\cos\psi + 7\cos 3\psi) +\\
&+ (\nu_2^2 - \nu_1^2)(\sin\psi + 7\sin 3\psi)] + (6\nu_0^4 - 6\nu_0^2 + 1)\sin\psi\}\\
v_b' &= -\varepsilon\,(3/2)\, c_{20} v^5 \{\nu_0^2\, [2\nu_1\nu_2 (\sin\psi - 7\sin 3\psi) +\\
&+ (\nu_2^2 - \nu_1^2)(7\cos 3\psi - \cos\psi)] + (6\nu_0^4 - 6\nu_0^2 + 1)\cos\psi\}\\
\nu_0' &= -\varepsilon^2 (3/2)\, c_{20} v^4 \nu_0 (2\nu_0^2 - 1)\, [2\nu_1\nu_2 \cos 2\psi + (\nu_2^2 - \nu_1^2)\sin 2\psi]\\
\nu_1' &= \varepsilon^2 (3/2)\, c_{20} v^4 (2\nu_0^2 - 1)\, [\nu_2 (\nu_2^2 - \nu_1^2 + \nu_0^2)\cos 2\psi -\\
&- \nu_1 (\nu_2^2 - \nu_1^2 + 1)\sin 2\psi - \nu_2]\\
\nu_2' &= -\varepsilon^2 (3/2)\, c_{20} v^4 (2\nu_0^2 - 1)\, [\nu_1 (\nu_2^2 - \nu_1^2 - \nu_0^2)\cos 2\psi +\\
&+ \nu_2 (\nu_2^2 - \nu_1^2 - 1)\sin 2\psi - \nu_1]\\
\psi' &= -1 + \varepsilon^2 3 c_{20} v^4 (2\nu_0^2 - 1)\, [1 - \nu_0^2 + 2\nu_2\nu_1 \sin 2\psi - (\nu_2^2 - \nu_1^2)\cos 2\psi]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В уравнениях фаза ψ является быстрой переменной, остальные переменные v, v_a, v_b, ν_0, ν_1, ν_2 — медленноменяющиеся во времени.

Систему (2.15) необходимо дополнить вторым уравнением из (2.14), связывающим исходное время τ с полярным углом ϑ. После перехода от v к новой скоростной переменной u: $v = 1 - \varepsilon u$ его правая часть разлагается в ряд Тейлора. Тогда, с точностью до членов порядка ε^2 (2.14) примет вид

$$\tau' = 1 - \varepsilon(2\Delta v - 3u) + \varepsilon^2(3\Delta v^2 - 8\Delta v u + 6u^2), \quad \Delta v = v_a \cos\psi + v_b \sin\psi$$

Введением замены $\tau = \vartheta + \tau_v$ это уравнение также приводится к стандартной форме и может быть добавлено к основной системе.

Система, образованная уравнениями (2.11) совместно с уравнением для τ_v исследуется при помощи алгоритма асимптотического интегрирования, использующего методы теории групп Ли [3]. Преобразование, приводящее систему к более простому виду, ищется в классе однопараметрических групп Ли; в алгоритме присутствует процедура осреднения. Результатом его применения являются как осредненные по быстрой переменной уравнения, так и формулы перехода от исходных переменных к переменным в осредненной системе и обратно. Для обеспечения необходимой точности требуется построить несколько высших приближений используемого метода. Задача обработки громоздких символьных выражений решалась при помощи языка компьютерной алгебры REDUCE [4—6]. В программе эффективно использовались процедуры пакета прикладных программ Полимех—символ [5]. В итоге была получена система осредненных уравнений в четвертом приближении [7]. Выписанная с точностью до членов порядка ε^2, она имеет следующий вид:

$$\langle v\rangle' = 0, \quad \langle v_a\rangle' = 0, \quad \langle v_b\rangle' = 0, \quad \langle \nu_0\rangle' = 0$$

$$\langle \nu_1\rangle' = \varepsilon^2 (3/2)\, c_{20} \langle v\rangle^4 \langle \nu_2\rangle (2\langle \nu_0\rangle^2 - 1), \quad \langle \nu_2\rangle' = -\varepsilon^2 (3/2)\, c_{20} \langle v\rangle^4 \langle \nu_1\rangle (2\langle \nu_0\rangle^2 - 1)$$

$$\langle \tau_v\rangle' = 3\varepsilon \langle u\rangle + \varepsilon^2 (3/2)\,[4\langle u\rangle^2 + \langle v_a\rangle^2 + \langle v_b\rangle^2 + 6c_{20}(6\langle \nu_0\rangle^2 - 6\langle \nu_0\rangle^4 - 1)]$$

$$\langle \psi\rangle' = -1 - \varepsilon^2 3c_{20} \langle v\rangle^4 (2\langle \nu_0\rangle^2 - 1)(1 - \langle \nu_0\rangle^2) \tag{2.16}$$

Система (2.16) имеет аналитическое решение

$$\langle v\rangle = \langle v^0\rangle, \quad \langle v_a\rangle = \langle v_a^0\rangle, \quad \langle v_b\rangle = \langle v_b^0\rangle, \quad \langle \nu_0\rangle = \langle \nu_0^0\rangle$$

$$\langle \nu_1\rangle = \langle \nu_1^0\rangle \cos[\omega_v(\vartheta - \vartheta_0)] + \langle \nu_2^0\rangle \sin[\omega_v(\vartheta - \vartheta_0)]$$

$$\langle \nu_2\rangle = \langle \nu_2^0\rangle \cos[\omega_v(\vartheta - \vartheta_0)] - \langle \nu_1^0\rangle \sin[\omega_v(\vartheta - \vartheta_0)] \tag{2.17}$$

$$\langle \psi\rangle = \langle \psi^0\rangle - \{1 - \varepsilon^2 3c_{20}\langle v^0\rangle^4 [2\langle \nu_0^0\rangle^2 - 1][1 - \langle \nu_0^0\rangle^2]\}(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$\langle \tau\rangle = \langle \tau^0\rangle + \{3\varepsilon\langle u^0\rangle + \varepsilon^2 (3/2)\,[4\langle u^0\rangle^2 + \langle v_a^0\rangle^2 + \langle v_b^0\rangle^2 +$$
$$+ 6c_{20}(6\langle \nu_0^0\rangle^2 - 6\langle \nu_0^0\rangle^4 - 1)\}(\vartheta - \vartheta_0)$$

где v^0, v_a^0, v_b^0, ν_0^0, ν_1^0, ν_2^0, τ_v^0, ψ^0 — начальные значения соответствующих переменных при $\vartheta = \vartheta_0$, $\omega_v = \varepsilon^2 (3/2)\, c_{20}\langle v^0\rangle^4(2\langle \nu_0^0\rangle^2 - 1)$.

Полученные результаты позволяют сформировать принципиально новый подход к построению алгоритмов расчета траектории ИСЗ. Благодаря предварительному аналитическому исследованию решение исходной задачи сводится к интегрированию осредненной системы (2.16). Уравнения этой системы существенно более удобны для численного анализа. Во многих случаях (как, например, в предлагаемой работе) для них удается определить в явном виде аналитическое решение, что вообще исключает необходимость численного интегрирования. Расчеты по формулам, связывающим переменные в исходных и осредненных уравнениях, проводятся только один раз — при определении начальных значений осредненных переменных и при вычислении реальных параметров орбиты по найденному решению осредненной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применением кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М : Наука, 1973. 320 с.
2. *Климов Д. М.* Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984. 120 с.
3. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. REDUCE USER'S MANUAL (version 3.0)/Edited by Antony C. Hearn. The Rand Corporation Santa Monica, CA 90406. 1983. Rand Publication CP78(4/83).
5. *Еднерал В. Ф., Крюков А. П., Родионов А. Я.* Язык аналитических вычислений REDUCE. М.: МГУ, 1989. 176 с.
6. *Климов Д. М., Руденко В. М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 216 с.
7. *Bragazin A. F., Leonov V. V., Rudenko V. M., Shmyglevsky I. P.* Application of computer algebra to the investigation of the orbital satellite motion//Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Comp. (ISSAC). Bonn: 1991, P. 450—451.

Москва

Поступила в редакцию
13.V.1992