

УДК 521.1

© 1993 г. М. А. УРЮПИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ КАРТОГРАФИРОВАНИЯ АНОМАЛИЙ

Предлагается алгоритм типа фильтра Калмана для оценивания возвышений геоида на основе сравнения данных от инерциальной навигационной системы, находящейся на борту объекта, и внешних данных о его местоположении. Алгоритм позволяет вести оценивание по мере поступления информации на борту объекта. Никаких ограничений на траекторию объекта и априорное распределение аномалий не накладывается. По полученным данным строятся оценки отклонений отвесных линий и вторых производных аномального геопотенциала.

Препятствием для дальнейшего повышения точности инерциальной навигации является неточность знания формы и поля тяготения Земли. Формой Земли будем считать геоид — уровенную поверхность потенциала силы тяжести, на океанах совпадающую с невозмущенной поверхностью воды. Отличия геоида и поля тяготения реальной Земли от эллипсоидальной модели Земли принято называть аномалиями. Такими аномалиями, которые будем считать случайными функциями, заданными на поверхности эллипсоидальной Земли, являются: возвышение геоида над эллипсоидом, отличия величин ускорения силы тяжести модельной и реальной, отклонения отвесных линий (УОЛ). Эти аномалии, существующие реально, но не учитываемые в алгоритмах инерциальных навигационных систем (ИНС), приводят к ошибкам в выработке навигационных параметров.

Из числа аномалий для инерциальной навигации особенно важны УОЛ, непосредственно приводящие к погрешности определения местоположения. Из спектрального состава аномалий для инерциальной навигации наиболее существенны аномалии с длиной волны, проходимой объектом за 84,4 мин — период собственных колебаний ИНС. Данные о таких аномалиях в настоящее время недостаточны и поэтому задача определения параметров аномального гравитационного поля Земли (особенно УОЛ) на борту движущегося объекта является важной и актуальной, не только для инерциальной навигации, но и для съемки геофизических параметров Земли.

Используемые в настоящее время методы съемки гравитационного поля Земли основаны на обработке данных измерений после проведения съемки и не позволяют получать значения параметров аномального поля в процессе съемки в реальном времени.

В последнее время стали активно разрабатываться методы определения параметров аномального гравитационного поля с помощью инерциальной навигации. Для включения компонент аномалий в точку местоположения объекта в число оцениваемых параметров необходимо описать в зависимости от времени их динамику в процессе движения объекта. Эта задача до сих пор решалась в предположении прямолинейного (в любом случае без самопересечений) движения объекта, а также стационарности и изотропности поля аномалий. Тогда можно построить самосогласованные стохастические дифференциальные уравнения для параметров аномального поля как функций времени и использовать их для построения алгоритмов оценивания параметров аномального поля.

Предлагается иной подход к описанию аномального поля, не накладывающий ограничений на траекторию движения объекта. Суть его заключается в том, что вводится в рассмотрение числовая карта аномалий, охватывающая область движения объекта и вместо параметров аномального поля соответствующих точке местоположения объекта, в число оцениваемых параметров включается фрагмент этой карты. Стационарности и изотропности поля аномалий при таком представлении не требуется.

В публикуемой работе рассматривается задача определения возвышений геоида, непосредственно не измеряемых на борту объекта. Это позволяет ограничиться двумерной картой аномального геопотенциала, из которой однозначно получаются возвышения геоида, УОЛ и вторые производные аномального геопотенциала. Возвышение геоида над эллипсоидом в данной точке эллипсоида равно значению аномального геопотенциала, деленному на величину ускорения силы притяжения в данной точке эллипсоида (уравнение Брунса). Для определенности будем рассматривать числовые карты с равномерной прямоугольной сеткой по широте и долготе, хотя возможно рассмотрение неравномерных и гексагональных сеток.

1. Пусть $\{P_{ij}, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M\}$ — числовая карта аномального гравитационного потенциала. Для вычисления его значения в заданной точке выбирается окружающий эту точку фрагмент карты размером $n \times m$ и по выбранным значениям интерполируется искомое значение

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i(x) a_j(y) \quad (1)$$

где x, y — координаты точки в фрагменте карты, $a_i(x), a_j(y)$ — интерполяционные полиномы. Для получения первых g_x, g_y и вторых $\Gamma_{xx}, \Gamma_{xy}, \Gamma_{yy}$ производных аномального геопотенциала достаточно в формуле (1) вместо $a_i(x)$ и $a_j(y)$ подставить их производные

$$g_x(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i'(x) a_j(y), \quad g_y(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i(x) a_j'(y)$$

$$\Gamma_{xx}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i''(x) a_j(y), \quad \Gamma_{yy}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i(x) a_j''(y)$$

$$\Gamma_{xy}(x, y) = \Gamma_{yx}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} a_i'(x) a_j'(y)$$

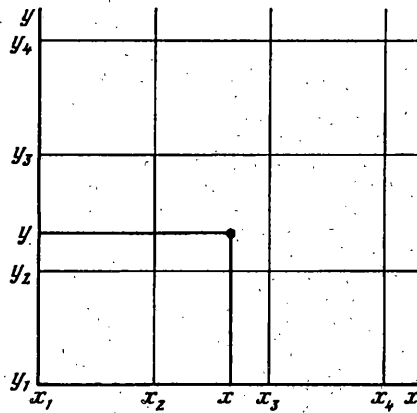
Для сохранения непрерывности вторых производных при движении объекта достаточно выбрать фрагмент карты размером 4 на 4 (фиг. 1). При этом формула (1) и соответствующие ей формулы для первых и вторых производных справедливы для внутренней области фрагмента $x_2 \leq x \leq x_3, y_2 \leq y \leq y_3$.

Фрагмент карты аномального геопотенциала $P_{ij}(i, j=1, \dots, 4)$ будем представлять в виде 16-мерного вектора x_p . При движении объекта внутри области интерполяции компоненты вектора x_p постоянны

$$dx_p/dt = 0 \quad (2)$$

но при пересечении объектом границы этой области происходит переход к новому фрагменту карты и компоненты вектора x_p меняются скачкообразно.

2. В качестве инерциальной навигационной системы рассматривается ИНС, невозмущаемая в гравитационном поле эллипсоидальной Земли [1]. Объект, несущий эту ИНС, может двигаться на постоянной высоте по заданной траектории в аномальном гравитационном поле. Возмущенное состояние ИНС может быть описано следующими переменными [2]: ρ_1, ρ_2 — два малых угла поворота приборного (горизонтируемого) трехгранника ИНС вокруг двух его осей и харак-



Фиг. 1

теризующих отклонение его третьей оси от вертикали, u_1, u_2 — две малых угловых скорости, являющихся разностями угловых скоростей приборного и горизонтального трехгранников в проекциях на те же оси, таким образом $(\rho_1, u_1, \rho_2, u_2)^T = x_g$ — вектор возмущенного состояния контура горизонта; l_1, l_2, l_3 — три малых угла поворота счислимого трехгранника относительно приборного вокруг собственных осей, таким образом, $(l_1, l_2, l_3)^T = x_i$ — вектор возмущенного состояния контура счисления. Возмущенное состояние ИНС может быть описано уравнением

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_g \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{gg} & F_{gi} \\ 0 & F_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{g\Delta} \\ F_{i\Delta} \end{pmatrix} x_{\Delta} + \begin{pmatrix} F_{gw} \\ 0 \end{pmatrix} x_w \quad (3)$$

где x_g — вектор возмущенного состояния контура горизонта, x_i — вектор возмущенного состояния контура счисления, x_{Δ} — вектор инструментальных погрешностей, x_w — вектор аномальных гравитационных ускорений. Матрицы F_{gg}, F_{gi}, F_{ii} приведены в [2], а вид матриц $F_{g\Delta}$ и $F_{i\Delta}$ и вектора x_{Δ} и их размерности определяются спецификой конкретной ИНС.

В общем случае, изменение во времени вектора инструментальных погрешностей x_{Δ} можно описать уравнениями формирующего фильтра вида

$$dx_{\Delta}/dt = F_{\Delta\Delta}x_{\Delta} + G_{\Delta}\xi(t) \quad (4)$$

где ξ — вектор белых шумов, а матрицы $F_{\Delta\Delta}, G_{\Delta}$ определяются выбранной статистической моделью инструментальных погрешностей. В частном случае, компоненты вектора инструментальных погрешностей x_{Δ} могут быть постоянными случайными величинами или интегралами от белых шумов.

Изменение во времени вектора x_w описать дифференциальным уравнением невозможно, так как траектория объекта может иметь точки самопересечения, где значения x_w должны совпадать. Это затрудняет построение алгоритмов типа фильтра Калмана, оценивающих непосредственно вектор x_w . Алгоритмы, основанные на частотной фильтрации показаний гравитационных градиентометров [3] не являются оптимальными. Выходом является представление аномального гравитационного поля в виде числовой карты [4]. Тогда компонента вектора x_w могут быть выражены через компоненты вектора фрагмента карты x_p : $x_w = F_{wp}x_p$, где компоненты матрицы F_{wp} зависят от траектории движения.

В ИНС эпизодически поступает внешняя информация различной природы:

позиционная, скоростная, градиентометрическая или какая-либо другая. Представить замер можно в следующем виде:

$$z(t) = H_g x_g + H_p x_p + H_\Delta x_\Delta + H_r x_r + H_x x_x + R_z \eta(t) \quad (5)$$

где x_x — вектор систематических погрешностей измерений, η — вектор белых шумов. Матрицы H_g , H_p , H_Δ , H_r определяются содержанием замера, а матрицы H_x и R_z — погрешностями замера.

В общем случае, изменение во времени вектора систематических погрешностей измерений x_x можно описать уравнениями формирующего фильтра вида

$$dx_x/dt = F_{xx} x_x + G_x \zeta(t) \quad (6)$$

где ζ — вектор белых шумов, а матрицы F_{xx} , G_x определяются выбранной статистической моделью систематических погрешностей измерений. В частном случае, компоненты вектора x_x могут быть постоянными случайными величинами или интегралами от белых шумов.

Математическая постановка задачи состоит в оценивании полного вектора состояния системы (2)—(4), (6), включающего в себя компоненты векторов x_g , x_p , x_Δ , x_r , x_x , по измерениям (5).

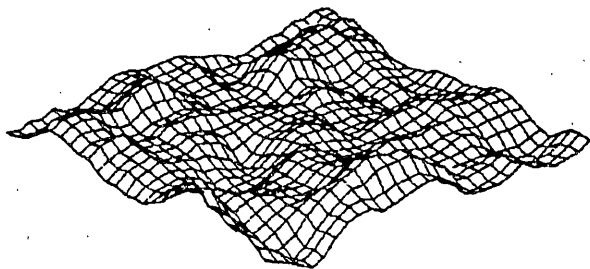
3. В том случае, если имеется полная статистическая информация о рассматриваемой системе и погрешностях замеров, то такая задача может быть решена оптимальным фильтром Калмана. Особенностью является то, что уравнение (2) справедливо лишь для внутренней области текущего фрагмента карты и при переходе через границу этой области вектор x_p терпит разрыв и уравнение (2) приобретает новые начальные условия. Другой особенностью является то, что при возвращении в район карты, для которого уже были построены оценки, необходимо учитывать их при построении новых текущих оценок.

Эти особенности в рамках калмановской фильтрации могут быть учтены введением в математическое обеспечение ИНС числовой карты оценок аномального поля и числовой карты (карт) ковариаций ошибок этих оценок. Как и при описании аномального поля, в качестве такой карты оценок удобно выбрать числовую карту оценок аномального геопотенциала. В этом случае могут быть построены алгоритмы оценивания возвышений геоида и уклонений отвесных линий.

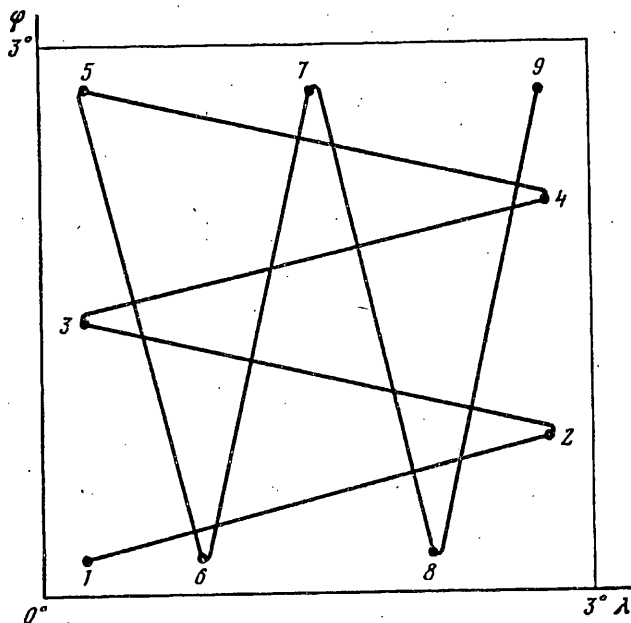
Спецификой алгоритма оценивания для данной задачи является оценивание компонент вектора x_p фрагмента карты аномального геопотенциала. В начальный момент времени в качестве начальных условий для алгоритма оценивания используются априорные оценки компонент фрагмента карты аномального поля. Начальная матрица ковариаций ошибок оценок содержит на главной диагонали квадраты среднеквадратических отклонений (СКО) погрешностей априорных оценок соответствующих компонент. Внедиагональные элементы матрицы ковариаций ошибок оценок вектора x_p равны произведению СКО погрешностей оценок компонент вектора x_p , соответствующих строкам и столбцам, на значение априорной корреляционной функции аномального поля от расстояния между узлами карты, соответствующими этим компонентам.

При движении объекта внутри области интерполяции компоненты вектора x_p постоянны и оценивание осуществляется оптимальным фильтром Калмана. При этом вырабатываются оптимальные оценки полного вектора состояния системы, включая и оценки фрагмента карты аномального геопотенциала, и матрицы ковариаций ошибок этих оценок.

При переходе объектом через границу области интерполяции происходит смена фрагмента карты: часть компонент аномального поля удаляется из числа оцениваемых параметров в карту оценок аномалий, остальные компоненты занимают свои новые места в новом фрагменте, на свободные места из карты оценок аномалий заносятся оценки (априорные или полученные ранее) соответ-



Фиг. 2



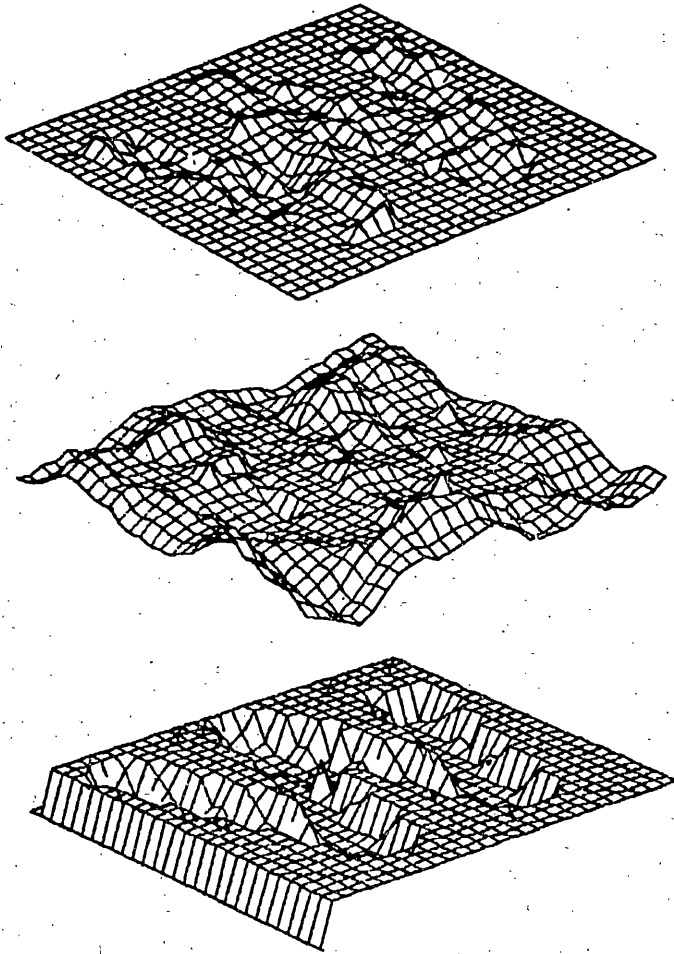
Фиг. 3

ствующих им компонент. Соответствующие перестроения производятся и в матрице ковариаций ошибок оценок: фрагмент матрицы, соответствующий удаляемым из фрагмента карты компонентам, удаляется из матрицы в карту ковариаций ошибок оценок аномального поля; остальные столбцы и строки, соответствующие аномальному полю, занимают новые места; на освободившиеся места добавляется новый фрагмент матрицы ковариаций, соответствующий новым компонентам в фрагменте карты аномалий. Добавляемый фрагмент строится по СКО оставшихся и новых компонент аномального поля и значениям априорной корреляционной функции аномального поля от расстояний между узлами карты, соответствующими этим компонентам.

В том случае, если какая-либо компонента аномального поля вновь попадает в вектор x_p , то при построении добавляемого фрагмента матрицы ковариаций используется фрагмент карты ковариаций ошибок оценок, соответствующий этой компоненте.

После таких перестроений алгоритм оценивания начинает работу с новыми начальными условиями.

После окончания работы алгоритма следует перенести в карту оценок аномального поля выработанные оценки для текущего фрагмента карты, а в карту ковариаций ошибок оценок — матрицу ковариаций ошибок оценок текущего фрагмента карты аномалий. В итоге получаются карты оценок аномального поля



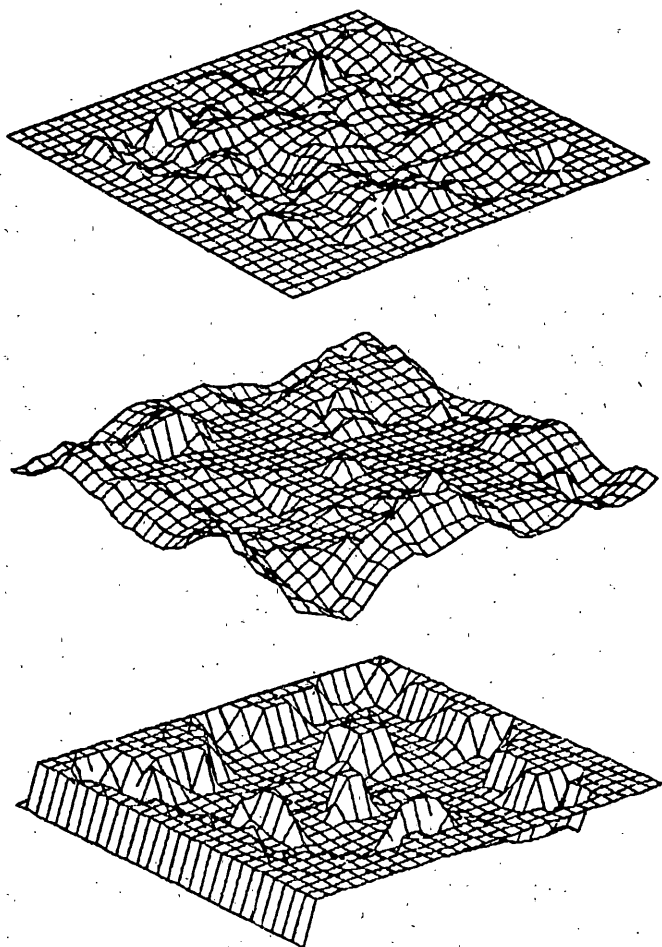
Фиг. 4

и ковариаций ошибок этих оценок для всего района, где происходило движение объекта.

Описанный алгоритм оценивания в рамках калмановского подхода является оптимальным. Недостатком алгоритма является необходимость хранения карты ковариаций ошибок оценок, которая для рассматриваемого случая двумерной карты аномального геопотенциала является трехмерной, а минимальное количество компонент по третьему измерению этой карты для размерности вектора x_p , равной 16, составляет 49. Может быть предложен субоптимальный алгоритм оценивания, практически не снижающий качества оценивания, если сетка числовой карты оценок аномального поля не является чрезмерно частой. В этом случае при хранении выработанных оценок пренебрегается корреляциями между ними и вместо трехмерной карты ковариаций ошибок оценок берется двумерная числовая карта СКО погрешностей оценок. Внедиагональные элементы в начальной матрице ковариаций и в добавляемом фрагменте для текущей матрицы ковариаций могут выбираться нулевыми.

Предложенный подход к оцениванию аномалий формы и тяготения Земли был алгоритмизирован и реализован в виде комплекса программ для ЭВМ.

4. В качестве примера рассматривалось модельное стационарное изотропное аномальное гравитационное поле, задаваемое числовой картой возвышений геоида с нулевым средним значением, среднеквадратическим отклонением $3\sigma = 1$ м и



Фиг. 5

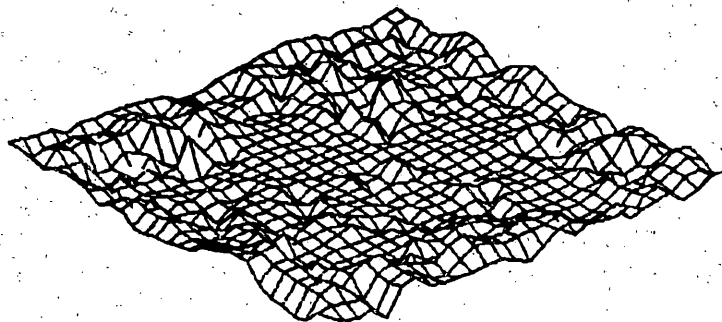
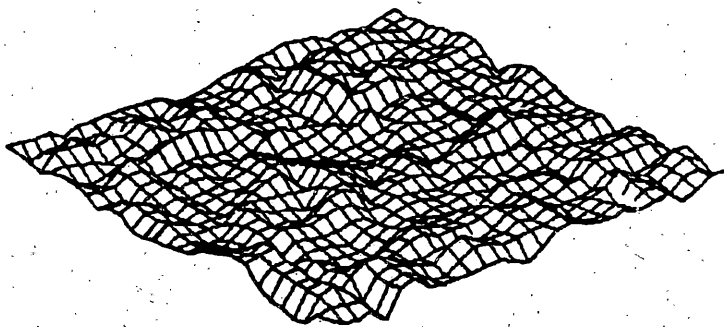
корреляционной функцией $R(x[\text{км}]) = \exp(-0,006|x|) \cos(0,03x)$. Числовая карта представляла собой таблицу чисел размером 30 на 30, соответствующих значениям возвышений геоида в узлах трапеций с равными шагами $0,1^\circ$ по широте и долготу. Вид поля возвышений геоида, задаваемого такой картой, приведен на фиг. 2.

Объект, на котором была установлена ИНС, двигался в таком поле аномалий на постоянной высоте по сложной траектории (фиг. 3) от точки 1 к точке 9. Заметим, что после точки 5 оставшееся неизвестным аномальное поле для объекта стало нестационарным и анизотропным. Траекторию от точки 1 до точки 5 будем называть траекторией *A*, а траекторию от точки 1 до точки 9 — траекторией *B*.

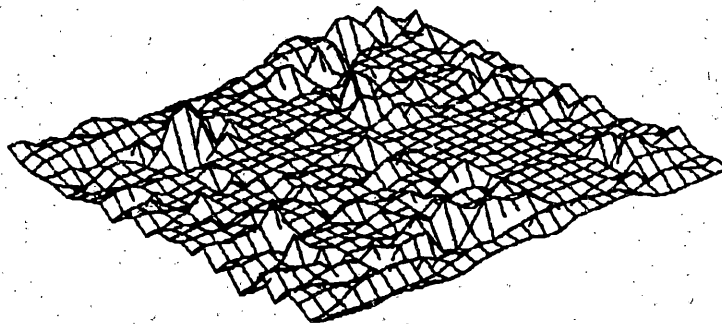
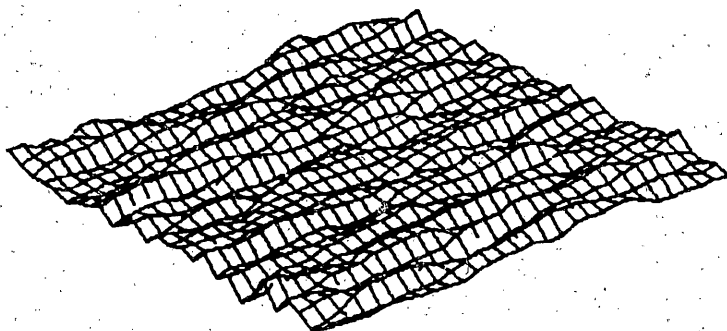
Во время движения объекта предполагалась доступной внешняя информация о координатах с погрешностями порядка 1 м через каждые 2 км пути.

На фиг. 4, 5 приведены оценки поля возвышений геоида, погрешности этих оценок и СКО погрешностей этих оценок для траекторий *A* и *B*.

В качестве примера вычисления оценок УОЛ на фиг. 6 показаны полные УОЛ (величина угла между нормальными к геоиду и эллипсоиду) и погрешности их оценивания для траектории *B*. Заметим, что если возвышения геоида имеют нормальное распределение вероятностей, то нормальное распределение имеют и компоненты УОЛ в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала, определяемые g , и g_x соответственно. Но полные УОЛ, как корень из суммы



Фиг. 6



Фиг. 7

квадратов компонент, уже не имеет нормального распределения и поэтому построение алгоритмов оценивания непосредственно полных УОЛ является непростой задачей.

В качестве примера вычисления оценок вторых производных аномального геопотенциала на фиг. 7 приведены поле Γ_{xx} и погрешности его оценивания для траектории B .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов Д. М.* Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984. 120 с.
2. *Жбанов Ю. К.* Уравнения малых колебаний инерциальной навигационной системы при учете эллипсоидальности Земли // Известия АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 51—56.
3. *Жбанов Ю. К., Климов Д. М., Урюпин М. А.* Математическое моделирование работы инерциальной навигационной системы в аномальном гравитационном поле // Известия АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 13—16.
4. *Урюпин М. А.* Гравиинерциальная навигационная система с картографированием аномалий // Гагаринские научные чтения по авиации и космонавтике 1991. М.: Наука, 1992. С. 155—166.

Москва

Поступила в редакцию
4. III. 1993