

УДК 531.384

© 1993 г. А. П. ИВАНОВ

ЕДИНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОПОРЕ

Предлагается новая форма уравнений движения твердого тела на горизонтальной плоскости, пригодная для описания опорной фазы, перелетов и ударов об опору. Фазовые переменные сохраняют непрерывность во все время движения, что обеспечивает эффективность аналитических и численных методов исследования.

1. Постановка задачи. Поместим начало координат инерциальной системы $OXYZ$ в опорной плоскости; область возможного движения задается неравенством $Z \geq 0$. Тело ограничено выпуклой поверхностью без ребер и может касаться плоскости в одной из своих точек. Ограничение на перемещения тела выражается геометрической неудерживающей связью

$$q \geq 0 \quad (1.1)$$

где q — аппликата его нижней точки.

Возможны три типа движения системы со связью (1.1): свободное ($q > 0$), опорное ($q = \dot{q} = 0$) и импульсивное ($q = 0, \dot{q} < 0$). Наиболее просто описывается свободное движение [1]: согласно общим теоремам динамики

$$\dot{Q} = P, \quad \dot{K} = 0 \quad (1.2)$$

где Q — количество движения, K — кинетический момент, P — вес тела. Система (1.2) интегрируема (случай Эйлера).

В опорной фазе выполняются уравнения

$$\dot{Q} = P + R, \quad \dot{K} = GA \times R, \quad q = 0 \quad (1.3)$$

Здесь A — точка контакта, G — центр тяжести тела, R — реакция плоскости. Зависимость R от координат и скоростей зависит от характера трения. Система (1.3) представляет собой классическую задачу механики твердого тела, ее анализу посвящены многочисленные работы (см. обзор во введении [2]).

В [1] указаны границы применимости уравнений (1.3): если вертикальная составляющая реакции становится отрицательной, то тело подпрыгивает, и надо пользоваться системой (1.2).

Под влиянием тяготения контакт с опорой возобновляется в некоторый момент t_0 , что в общем случае сопровождается ударом. Уравнения стереомеханической теории удара имеют вид

$$\Delta Q = I, \quad \Delta K = GA \times I, \quad I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} R(t) dt \quad (1.4)$$

где I — ударный импульс, τ — продолжительность удара, величина которой пре-

небрежимо мала. Если удар упругий, то после него тело совершает новый перелет и так далее.

Традиционный подход к исследованию движений с ударами состоит в применении уравнений (1.2) или (1.3) на интервалах безударного движения и приспособывании граничных условий на концах этих интервалов при помощи соотношений (1.4). Однако, если удары не вполне упруги, то переход от прыжков к опорной фазе (1.3) сопровождается бесконечным числом ударов на конечном интервале времени [3]. Очевидно, что метод приспособывания в данном случае непригоден.

Целью публикуемой работы является построение единой формы уравнений движения твердого тела на опоре, пригодной для описания всех случаев (1.2) — (1.4). За основу взят метод непрерывного представления, разработанный в [4].

2. Случай гладкой опоры. Допустим вначале, что трение в опоре отсутствует. Тогда реакция R нормальна плоскости $R = (0, 0, N)$, $N \geq 0$. Свяжем с телом систему главных осей $GX'Y'Z'$ и будем определять его положение координатами x, y, z точки G в инерциальной системе и углами Эйлера θ, ψ, φ . Уравнения (1.3) примут вид (m — масса тела)

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = N - mg, \quad \dot{K} = GA \times (0, 0, N) \quad (2.1)$$

Одностороннюю связь (1.1) представим в виде

$$q = z - f(\theta, \varphi) \geq 0 \quad (2.2)$$

где функция $f(\theta, \varphi)$ описывает форму тела: ее значение равно расстоянию от точки G до плоскости в момент касания при заданных значениях θ, φ (очевидно, что эта величина не зависит от ψ).

Первые два уравнения системы (2.1) отделяются от остальных уравнений движения и легко интегрируются. Правые части остальных уравнений линейны относительно величины N . Составляя линейные комбинации этих уравнений, можно преобразовать их к такой форме, где из четырех скалярных уравнений лишь одно будет содержать реакцию N . Остальные три уравнения инвариантны, таким образом, типу движения: они остаются справедливыми при перелетах и ударах.

Данную процедуру исключения реакции проще всего осуществить при помощи лагранжева формализма. Кинетическая и потенциальная энергия тела выглядят так

$$2T = m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{q} + f_\theta \dot{\theta} + f_\varphi \dot{\varphi})^2] + J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2, \quad \Pi = mg(q + f), \quad q \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

где $J_{1,2,3}$ — главные центральные моменты инерции.

Из уравнений Лагранжа

$$m(\dot{q} + f_\theta \dot{\theta} + f_\varphi \dot{\varphi}) = N - mg, \quad \dot{p}_\theta = T_\theta, \quad \dot{p}_\varphi = T_\varphi, \quad \dot{p}_\psi = 0 \quad (2.4)$$

$$p_\theta = \partial T / \partial \dot{\theta}, \quad p_\psi = \partial T / \partial \dot{\psi}, \quad p_\varphi = \partial T / \partial \dot{\varphi}$$

лишь первое содержит величину N . Преобразуем его к виду

$$\ddot{q} = UN + F \quad (2.5)$$

где U, F зависят от $q, \varphi, \theta, \dot{q}, p_\theta, p_\varphi, p_\psi$, причем $U > 0$. При перелетах $q > 0$,

$N = 0$, при ударах вектор I в (1.4) вертикален, а его модуль определяется из граничных условий

$$\dot{q}^+ = -\kappa \dot{q}^- \quad (2.6)$$

где знаки минус и плюс соответствуют началу и концу удара, а $\kappa \in (0, 1]$ — ньютоновский коэффициент восстановления. Полагая

$$q = |s|, \quad \dot{q} = Wv * \text{sign } s, \quad W = 1 - k * \text{sign}(sv), \quad k = (1 - \kappa)/(1 + \kappa) \in [0, 1) \quad (2.7)$$

получим представление движения в переменных, непрерывных во все время движения; граничные условия (2.6) в силу замены (2.7) автоматически выполняются при пересечении фазовой траекторией плоскости $s = 0$ [4].

Изменение вспомогательных переменных описывается системой

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = W^{-1}F * \text{sign } s \quad (2.8)$$

причем при $s = v = 0$ правые части доопределяются так

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{v} = \max \{0, F\} \quad (2.9)$$

В итоге универсальные уравнения движения твердого тела не ниже гладкой плоскости складываются из первых двух уравнений (2.1) и системы (2.4), в которой первое уравнение заменено на (2.8), а вместо q, \dot{q} подставлены выражения (2.7).

Пример. Круглый диск радиуса ρ , геометрический центр которого C не совпадает с центром масс G , движется в плоскости XOZ . Направим ось GX' по линии CG , а ось GZ' — перпендикулярно плоскости диска, тогда $y \equiv 0$, $\theta \equiv \pi/2$, $\psi \equiv 0$, а в (2.2) $f(\varphi) = \rho + r * \sin \varphi$, $r = |CG| \in (0, \rho)$. В формулах (2.3), (2.4), (2.8) получаем

$$\begin{aligned} 2T &= m [\dot{x}^2 + (\dot{q} + r\dot{\varphi} * \cos \varphi)^2] + J_3 \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = mg(q + r * \sin \varphi) \\ \dot{\varphi} &= B(p_\varphi - mr\dot{q} * \cos \varphi), \quad \dot{p}_\varphi = -mrB^2 * \sin \varphi * [J_3 \dot{q} + rp_\varphi * \cos \varphi] (p_\varphi - \\ &- mr\dot{q} * \cos \varphi) - mgr * \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$F = r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g = rB^2 \sin \varphi * (p_\varphi - mr\dot{q} * \cos \varphi)^2 - g, \quad B = (mr^2 \cos^2 \varphi + I_3)^{-1}$$

Воспользуемся уравнениями (2.10) для исследования движений с начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $q(0) = \dot{q}(0) = 0$, $\varphi(0) = -\pi/2$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 > 0$ (т. е. при $t = 0$ центр масс занимает наинизшее положение).

Так как в начальный момент $\sin \varphi < 0$ и величина F отрицательна, то диск скользит по опоре. При этом в отсутствие трения механическая энергия сохраняется

$$E = T + \Pi = 0,5Bp_\varphi^2 + mgr \sin \varphi \equiv E_0 \quad (2.11)$$

$$E_0 = 0,5mj^2\dot{\varphi}_0^2 - mgr, \quad J_3 = mj^2$$

Выразим величину p_φ^2 из равенства (2.11):

$$p_\varphi^2 = 2mgrB^{-1}(\Gamma - \sin \varphi), \quad \Gamma = E_0/(mgr) \quad (2.12)$$

Так как левая часть соотношения (2.12) неотрицательна, то $\sin \varphi \leq \Gamma$. Следовательно, если $\Gamma < 1$, то движение имеет характер колебаний в окрестности относительного равновесия $\varphi = -\pi/2$. В случае $\Gamma = 1$ диск асимптотически стре-

мится к неустойчивому равновесию: $\varphi \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow +\infty$. Наконец, если $\Gamma > 1$, то энергия диска достаточна для его вращения.

Условие сохранения контакта $F \leq 0$ имеет вид

$$\sin^2 \varphi - 2\Gamma \sin \varphi + 1 + j^2/r^2 \geq 0 \quad (2.13)$$

Левая часть в (2.13) минимальна при $\sin \varphi = \Gamma$, если $\Gamma \leq 1$ (в этом случае неравенство выполняется для любых φ) или при $\varphi = \pi/2$, если $\Gamma > 1$; в последнем случае минимальное значение равно $2 - 2\Gamma + j^2/r^2$. Следовательно, при условии $1 \leq \Gamma \leq \Gamma_1 = r + j^2/(2r^2)$ диск будет вращаться без отрыва от опоры, а если $\Gamma > \Gamma_1$, то контакт прерывается при значении

$$\varphi = \varphi_1 = \arcsin [\Gamma - (\Gamma^2 - 2\Gamma_1 + 1)^{1/2}] \quad (2.14)$$

Допустим, что $\Gamma = \Gamma_1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда формула (2.14) приводит к оценке $\varphi_1 = \pi/2 - \eta_1$, $\eta_1 = 2r\varepsilon^{1/2}/j + O(\varepsilon)$.

При перелете $\ddot{\varphi} = 0$, откуда

$$q = r [\sin \varphi_1 - \sin \varphi + (\varphi - \varphi_1) \cos \varphi_1 - 0,5 (\varphi - \varphi_1)^2 \sin \varphi_1] \quad (2.15)$$

$$\dot{q} = r\dot{\varphi}_1 [\cos \varphi_1 - \cos \varphi + (\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_1]$$

Полагая в (2.15) $q = 0$, найдем угол φ в момент приземления t_2 ($\varphi_2 = \pi/2 + \eta_2$, $\eta_2 = 3\eta_1 + O(\varepsilon)$). Отсюда при $t = t_2$ получаем оценки

$$\dot{q} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad g - r\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 = O(\varepsilon) \quad (2.16)$$

Для описания движения при $t > t_2$ удобно воспользоваться функцией Ляпунова (см. [4]):

$$L = [0,5 (1 - k^2) v^2 - F |s|]^{3/2} + \alpha s v \quad (2.17)$$

непрерывной в области $F < 0$, содержащей изображающую точку при $t = t_2$. Параметр α подбирается так, что функция (2.17) положительно определена, а ее производная удовлетворяет соотношению $dL/dt = -O(L^{2/3})$.

Вследствие оценок (2.16) величина L обращается в ноль за время $\Delta t = O(\varepsilon^{1/2})$, после чего движение продолжается в опорной фазе. Определим полную энергию диска при $t > t_2 + \Delta t$. Она будет равна величине $E_\tau = 0,5Bv_\tau^2 + mgr \sin \varphi$. При $t = t_2$ имеем $E_\tau = E_0 - E_n$, $E_n = O(\varepsilon^3)$, а в интервале $t \in (t_2, t_2 + \Delta t)$ производная E_τ , имеющая вид

$$dE_\tau/dt = -mgr^2\dot{q}B \cos^2 \varphi - mrJ_3B^3 (p_\varphi - mr\dot{q} \cos \varphi) \dot{q}p_\varphi$$

является величиной $O(\dot{q})$. Следовательно, на этом интервале изменение E_τ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$.

Окончательно приходим к выводу: для достаточно малых значений $\varepsilon = \Gamma - \Gamma_1$ диск будет совершать вращательное движение с отрывами на каждом обороте вблизи значений $\theta = \pi/2 \pmod{2\pi}$ с последующим затухающим бесконечноударным процессом («дребезгом») и интервалом опорного движения.

При $\Gamma > \Gamma_0$ в общем случае движение диска после отрыва сопровождается ударами. Однако, существует и бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{\Gamma_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), соответствующая периодическим безударным движениям. В [5] доказана теорема 3 о финальных движениях неоднородного колеса в случае абсолютно неупругих соударений его с опорой. Применяя вышеописанную методику, можно обобщить эту теорему для случая $\kappa \in (0, 1)$.

3. Случай кулоновского трения. При наличии трения реакция R имеет

касательную составляющую: $R = (R_x, R_y, N)$. Уравнения (1.3) составляют систему шести уравнений второго порядка

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = R_y, \quad m\ddot{z} = N - mg, \quad K = (r_2N + fR_y, -r_1N - fR_x, r_1R_y - r_2R_x) \\ GA = (r_1, r_2, -f), \quad K = (K_x, K_y, K_z) \quad (3.1)$$

Для получения уравнений движения в единой форме необходимо исключить составляющие реакции из уравнений (3.1). Так как эти уравнения линейны относительно R , то несложно образовать три их линейных комбинации, не содержащие реакции. Определим квазискорости

$$\dot{\pi}_1 = K_x - mf\dot{y} - mr_2\dot{z}, \quad \dot{\pi}_2 = K_y + mf\dot{x} + mr_1\dot{z}, \quad \dot{\pi}_3 = K_z + mr_2\dot{x} - mr_1\dot{y} \quad (3.2)$$

В формулах (3.2) выражения составляющих кинетического момента через производные эйлеровых углов имеют известный вид (см. [2]), а явный вид функций $r_{1,2}$ можно определить путем сравнения двух систем (2.1) и (2.4). В результате получаем

$$r_1 = f_0 \sin \psi - f_\varphi \cos \psi / \sin \theta, \quad r_2 = -f_0 \cos \psi - f_\varphi \sin \psi / \sin \theta$$

Для производных квазискоростей (3.2) вследствие (3.1) имеем следующие выражения

$$\ddot{\pi}_1 = mgr_2 - mf\ddot{y} - m\dot{r}_2\dot{z}, \quad \ddot{\pi}_2 = -mgr_1 + mf\ddot{x} + m\dot{r}_1\dot{z}, \quad \ddot{\pi}_3 = m\dot{r}_2\dot{x} - m\dot{r}_1\dot{y} \quad (3.3)$$

Заметим, что уравнения (3.3) получены без каких-либо предположений о характере трения.

Кулоновское трение характеризуется соотношениями

$$R_x = -\mu N \cos \beta, \quad R_y = -\mu N \sin \beta \quad (3.4)$$

где β — угол между осью X и горизонтальной составляющей скорости в точке A (ограничимся случаем, когда эта составляющая не обращается в ноль). По формуле Эйлера

$$v(A) = \omega \times GA + v(G) = (\dot{x} - f\omega_y - r_2\omega_z, \dot{y} + f\omega_x + r_1\omega_z, \dot{z} + r_2\omega_x - r_1\omega_y)$$

$$\cos \beta = v_x(A) [v_x^2(A) + v_y^2(A)]^{-1/2}, \quad \sin \beta = v_y(A) [v_x^2(A) + v_y^2(A)]^{-1/2}$$

В общем случае угол β изменяется со временем, но можно указать и ряд задач (например, при плоском движении), когда он остается неизменным. Остановимся на этом частном случае подробнее. Положим

$$\dot{\pi}_4 = \dot{x} * \sin \beta - \dot{y} * \cos \beta, \quad \dot{\pi}_5 = \dot{x} * \cos \beta + \dot{y} * \sin \beta + \mu \dot{z} \quad (3.5)$$

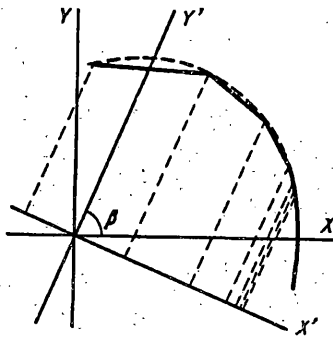
тогда вследствие (3.4) имеем

$$\ddot{\pi}_4 = 0, \quad \ddot{\pi}_5 = -\mu g \quad (3.6)$$

Уравнения (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) остаются справедливыми во все время движения (при сделанных оговорках). Для их замыкания добавим соотношения (2.8), замечая при этом, что в равенстве (2.5) при наличии трения (3.4) не обязательно $U > 0$. Неравенство $U \leq 0$ приводит к парадоксальным ситуациям [6], которые здесь не рассматриваются.

Пример. Для сферически-симметричного тела $K = J\omega$, $f \equiv \rho$, $r_1 = r_2 = 0$, где ρ — радиус, J — момент инерции относительно диаметра. В этом случае

$$\dot{\pi}_1 = J\omega_x - m\rho\dot{y}, \quad \dot{\pi}_2 = J\omega_y + m\rho\dot{x}, \quad \dot{\pi}_3 = J\omega_z, \quad \ddot{\pi}_1 = 0, \quad \ddot{\pi}_2 = 0, \quad \ddot{\pi}_3 = 0 \quad (3.7)$$



Изучим приземление вращающегося мяча, брошенного под углом к горизонту. С учетом формул (3.7) получаем такое уравнение для изменения угла β :

$$\beta = \left[\operatorname{arctg} \frac{v_y(A)}{v_x(A)} \right] = \frac{(\ddot{y} + \rho \dot{\omega}_x) \cos \beta - (\ddot{x} - \rho \dot{\omega}_y) \sin \beta}{v_x^2(A) + v_y^2(A)} = 0$$

т. е. этот угол имеет постоянное значение, определяемое из начальных условий. Движение описывается уравнениями (2.8), (3.5)—(3.7), которые легко интегрируются. В системе (2.8), описывающей движение вдоль вертикали, $F = -g$, поэтому ее решение полностью определяется начальными значениями переменных z , \dot{z} . Мяч совершает бесконечное число подскоков, высота которых падает в геометрической прогрессии со знаменателем κ^2 , а длительность — в прогрессии со знаменателем κ . После затухания прыжков контакт более не прерывается. Как следует из (3.5), (3.6):

$$\pi_4 = \pi_4^0 + \dot{\pi}_4^0 (t - t^0), \quad \pi_5 = \pi_5^0 + \dot{\pi}_5^0 (t - t^0) - 1/2 \mu g (t - t^0)^2 \quad (3.8)$$

Если $\dot{\pi}_4 \neq 0$, то кривая (3.8) — это парабола. Если оси x , y повернуть на угол $\beta - \pi/2$, то полученные переменные x' , y' связаны с квазикоординатами π_4 , π_5 по формулам $x' = \pi_4$, $y' = \pi_5 - \mu q$ (см. фигуру).

При перелетах $\dot{x} = \text{const}$, $\dot{y} = \text{const}$, $q > 0$, следовательно, центр шара движется по хорде параболы, соединяющей точки, соответствующие моментам ударов. Весь бесконечноударный процесс описывается ломаной линией, проекции звеньев которой на ось X' составляют геометрическую прогрессию. В опорной фазе центр шара продолжает движение по параболе (3.8) вплоть до остановки скольжения, а затем движется по прямой [2], [6]. В случае $\dot{\pi}_4 = 0$ движение мяча параллельно плоскости $Y'Z$.

В общем случае, когда угол β непостоянен, равенства (3.3) остаются справедливыми, а (3.6) — нет. Можно предложить иной способ определения квази-координат. Запишем общие уравнения удара с трением в виде

$$\dot{q}^+ = -\kappa^* \dot{q}^-, \quad \dot{x}^+ = \dot{x}^- + \dot{q}^- H_x, \quad \dot{y}^+ = \dot{y}^- + \dot{q}^- H_y, \quad (3.9)$$

где κ^* , H_x , H_y — некоторые дифференцируемые функции от координат и доударных значений скоростей. Сделаем замену

$$q = |s|, \quad \dot{q} = W^* v \operatorname{sign} s, \quad \dot{x} = \dot{\pi}_x + \dot{q} P_x, \quad \dot{y} = \dot{\pi}_y + \dot{q} P_y, \quad (3.10)$$

$$W^* = 1 - (1 - \kappa)/(1 + \kappa) \operatorname{sign}(sv)$$

подобрав функции P_x , P_y таким образом, чтобы переменные $\dot{\pi}_x$, $\dot{\pi}_y$ при ударах оставались непрерывными. Нетрудно убедиться, что для этого достаточно удовлетворить соотношениям $P_x = -H_x/(1 + \kappa^*)$, $P_y = -H_y/(1 + \kappa^*)$.

Действительно, в этом случае $\dot{x}^+ = \dot{x}_4 + \dot{q}^+ P_x = \dot{x}^- + (\dot{q}^+ - \dot{q}^-) P_x = \dot{x}^- + \dot{q}^- H_x$, что совпадает со второй формулой (3.9); аналогично проверяется третья формула. Дифференцируя равенства (3.10) при $s \neq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{s} &= W^* v, \quad \dot{v} = (F \operatorname{sign} s + \dot{W}^* v) / W^*, \quad \ddot{x}_x = -F P_x - \dot{P}_x W^* v \operatorname{sign} s \\ \ddot{x}_y &= -F P_y - \dot{P}_y W^* v \operatorname{sign} s \end{aligned} \quad (3.11)$$

При $s = 0$ доопределим правые части в (3.11) так

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{v} = \max \{0, F\}, \quad \dot{x}_x = \mu F U^{-1} \cos \beta, \quad \dot{x}_y = \mu F U^{-1} \sin \beta$$

Универсальные уравнения движения включают в себя системы (3.3), (3.11) и формулы, определяющие квазискорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Routh E. G. Dynamics of a system of a rigid bodies. Pt. 1, 2. London: McMillan, 1884. С. 000.
2. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.
3. Нагаев Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1978. 200 с.
4. Иванов А. П. Аналитические методы в теории виброударных систем. // ПИММ, 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 5—21.
5. Иванов А. П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры. // Изв. РАН. МТТ, 1992. № 1. С. 25—31.
6. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1992