МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.38

© 1993 г. И. В. СКОРОБОГАТЫХ

ОБ ОДНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ЭФФЕКТЕ В ДВУХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Показано, что во вращающемся сферически симметричном упругом теле с абсолютно твердой шаровой вставкой внутри будет существовать эффект прецессии волн крутильных колебаний, аналогичный явлениям, изученным в [1]—[4]. Кроме того, выяснено, что подобный же эффект можно обнаружить при малых крутильных колебаниях абсолютно твердого тела с упругими связями. Рассмотренные механические эффекты можно использовать для создания датчиков инерциальной навигации (угла поворота и угловой скорости).

1. О крутильных колебаниях вращающегося сферически симметричного упругого тела. Пусть механическая система, состоящая из сферически симметричного упругого тела и абсолютно твердой сферической вставки, так что центры симметрии обоих тел совпадают, вращается в инерциальном пространстве с постоянной угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. На общей границе Γ твердого и упругого тел упругие перемещения равны нулю. Материал упругого тела изотропен и однороден и подчиняется линейной теории малых деформаций. Ставится задача изучения крутильных колебаний упругого тела (колебания других типов не учитываются).

Вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ принадлежит пространству $H = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t): \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \in (W_2^1(\Omega))^3, \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mid_\Gamma = 0\}$, где Ω — область, занимаемая недеформированным упругим телом, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы недеформированного тела, W_2^1 — пространство С. Л. Соболева. В пространстве H существует ортонормированный базис из собственных форм колебаний $\{\mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \mathbf{U}_k(\mathbf{r}), \mathbf{V}_k(\mathbf{r})\}_{k=1}^{k=\infty}$. Формам с индексом k соответствует частота ν_k. Представим формы в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_k(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_1 V_k(x, r) \times \mathbf{r} = -\mathbf{e}_2 V_k(x, r) z + \mathbf{e}_3 V_k(x, r) y \\
\mathbf{U}_k(\mathbf{r}) &= -\mathbf{e}_2 V_k(y, r) \times \mathbf{r} = -\mathbf{e}_1 V_k(y, r) z + \mathbf{e}_3 V_k(y, r) x \\
\mathbf{V}_k(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_3 V_k(z, r) \times \mathbf{r} = -\mathbf{e}_1 V_k(z, r) y + \mathbf{e}_2 V_k(z, r) x
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные векторы осей XYZ, неподвижных относительно твердого тела и имеющих начало в центре симметрии; $r = |\mathbf{r}|$. Условия ортонормированности форм (1.1) запишутся (здесь и далее интегралы берутся по области Ω)

$$\begin{aligned}
&\int V_k(z, r) V_i(x, r)\, xz\,dxdydz = \int V_k(z, r) V_i(y, r)\, yz\,dxdydz = \\
&= \int V_k(x, r) V_i(y, r)\, xy\,dxdydz = 0 \\
&\int V_k^2(x, r) z^2 dxdydz = \int V_k^2(x, r) y^2 dxdydz = \int V_k^2(y, r) x^2 dxdydz = \\
&= \int V_k^2(y, r) z^2 dxdydz = \int V_k^2(z, r) x^2 dxdydz = \int V_k^2(z, r) y^2 dxdydz = \frac{1}{2} \quad (k, i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Отметим, что если функция $V_k(x, r)$ четна по первому аргументу, то она описывает такое колебание относительно оси X, когда верхняя и нижняя части упругого тела движутся одинаково, «в одной фазе» относительно экватора упругого тела. Если же функция нечетна, то они движутся «в противофазе».

Раскладывая вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ по базису пространства H:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (p_k(t)\, \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) + r_k(t)\, \mathbf{U}_k(\mathbf{r}) + q_k(t)\, \mathbf{V}_k(\mathbf{r}))$$

и используя формулы (1.1) и (1.2), а также предположение о малости угловой скорости по сравнению с наинизшей частотой колебаний, из вариационного принципа получим уравнения движения

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_k + \nu_k^2 p_k - 2\sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_{mk} (\omega_3 \dot{r}_m - \omega_2 \dot{q}_m) = 0 \\ &\ddot{r}_k + \nu_k^2 r_k - 2\sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_{mk} (-\omega_3 \dot{p}_m + \omega_1 \dot{q}_m) = 0 \\ &\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k - 2\sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_{mk} (\omega_2 \dot{p}_m - \omega_1 \dot{r}_m) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь опущены члены порядка ω^2 и введены обозначения

$$\varkappa_{mk} = \int V_m(z, r)\, V_k(x, r)\, y^2 dxdydz = \int V_m(y, r)\, V_k(x, r)\, z^2 dxdydz =$$

$$= \int V_m(y, r)\, V_k(z, r)\, x^2 dxdydz = \varkappa_{km}$$

В случае, если хотя бы одна из подинтегральных функций нечетна по первому аргументу, интегралы обращаются в нуль. В целях упрощения исследования уравнений выберем направления осей XYZ так, чтобы вектор угловой скорости имел вид $\omega = \omega_3 \mathbf{e}_3$. Тогда (1.3) перепишется

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_k + \nu_k^2 p_k - 2\sum_m \varkappa_{mk} \omega_3 \dot{r}_m = 0 \\ &\ddot{r}_k + \nu_k^2 r_k + 2\sum_m \varkappa_{mk} \omega_3 \dot{p}_m = 0, \quad \ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

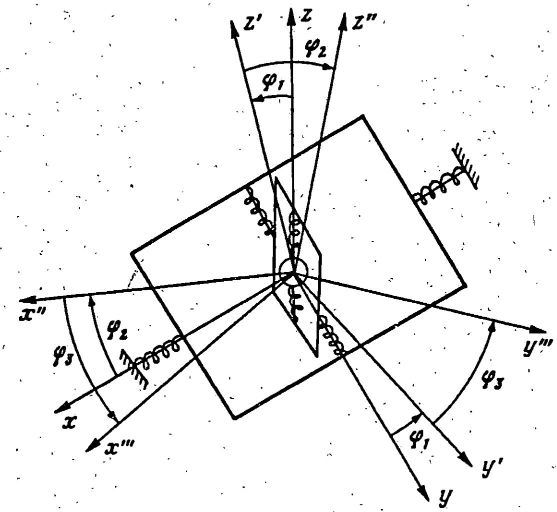
Последнее уравнение системы (1.4) описывает гармонические колебания на формах $\mathbf{V}_k$.

Преобразуем первые две группы уравнений. Сложим первую со второй, умноженной на мнимую единицу i, и обозначив $z_k = p_k + ir_k$, получим систему с постоянными коэффициентами

$$\ddot{z}_k + \nu_k^2 z_k + 2i\omega_3 \sum_m \varkappa_{mk} \dot{z}_m = 0$$

Поскольку движение происходит с постоянной угловой скоростью, то уравнения движения имеют интеграл энергии. Отсюда следует, что все собственные частоты уравнений чисто мнимые. Можно также считать, учитывая что угловая скорость много меньше наинизшей частоты крутильных колебаний, что $\omega_3 = \omega\varepsilon$, где ε — безразмерный малый параметр. Будем искать собственные вектора $\mathbf{e}_n = \mathrm{colon}\,(e_{n1}, \ldots, e_{ne}, \ldots)$ и частоты системы (1.4) в виде рядов по степеням малого параметра ε, пользуясь методом последовательных приближений. Подставив $\mathrm{colon}\,(e_{n1}(\varepsilon), \ldots, e_{ne}(\varepsilon), \ldots) \exp(i\nu_n(\varepsilon)\, t)$ в (1.4) получим уравнение

$$-\nu_n^2(\varepsilon)\, e_{nk}(\varepsilon) + \nu_k^2 e_{nk}(\varepsilon) - 2\omega\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_{mk} \nu_n(\varepsilon)\, e_{nm}(\varepsilon) = 0 \tag{1.5}$$



откуда при $\varepsilon = 0$ легко выводится $\nu_n(0) = \pm\nu_n$; $e_{nk}(0) = 0$; $n \neq k$. Компоненты $e_{nn}(0)$ можно считать равными 1.

Последующие приближения получаются дифференцированием равенства (1.5) по ε и последующей подстановкой $\varepsilon = 0$. Кроме того, используется условие нормировки собственного вектора, которое можно взять в форме $(\mathbf{e}_n(\varepsilon), \mathbf{e}_n(\varepsilon)) = \mathrm{const}$, где $(\ldots)$ — эрмитово скалярное произведение. Дифференцируя это тождество нужное число раз и подставляя $\varepsilon = 0$ получим необходимые дополнительные уравнения.

В первом приближении найдем

$$\nu_n(\varepsilon) = \pm\nu_n - \varkappa_{nn}\omega\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad e_{nn}(\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^2)$$
$$e_{nk}(\varepsilon) = \pm\frac{2\nu_n\omega\varepsilon}{(\nu_k^2 - \nu_n^2)} + O(\varepsilon^2) \tag{1.6}$$

Уравнения (1.6) показывают, что с точностью первого приближения включительно будут существовать волны крутильных колебаний, прецессирующие с угловой скоростью $-\varkappa_{nn}\omega\varepsilon$, и с частотой $\pm\nu_n$.

2. О колебаниях твердого тела с упругими связями. Покажем, что существует аналогия рассматриваемого выше явления с колебаниями абсолютно твердого тела в кардановом подвесе с упругостью.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из невесомого карданова подвеса с симметричным твердым телом внутри него (фигура). Все оси подвеса снабжены упругими связями одинаковой жесткости c, которые позволяют осям поворачиваться лишь на очень малые углы. Тело M симметрично в том смысле, что его главные центральные моменты инерции все равны между собой и равны постоянной J. В состоянии покоя, при отсутствии деформаций упругих связей, главные центральные оси совпадают с осями карданова подвеса и осями XYZ. Центр масс тела лежит в точке пересечения осей карданова подвеса.

В качестве лагранжевых переменных выберем углы поворота вокруг осей карданова подвеса (вначале совпадающих с X, Y и Z), соответственно φ_1, φ_2, φ_3. После поворота на угол φ_1 оси XYZ перейдут в $XY'Z'$, после поворота на угол φ_2 в $X''Y'Z''$, и наконец в $X'''Y'''Z''$. При этом единичный репер осей

$X'''Y'''Z''$ colon (e_1''', e_2''', e_3'') будет связан с единичным репером осей XYZ colon (e_1, e_2, e_3) по формуле

$$\operatorname{colon}(e_1''', e_2''', e_3'') = O_3O_2O_1 \operatorname{colon}(e_1, e_2, e_3) = O \operatorname{colon}(e_1, e_2, e_3)$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}, O_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$O = O_3O_2O_1$ — ортогональные матрицы. При этом угловая скорость Ω тела M при изменении углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в проекциях на неподвижные оси XYZ определяется формулами $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \dot{O} O^{\mathrm{T}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(\dot\varphi_3\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \dot\varphi_2\sin\varphi_1) & \dot\varphi_2\cos\varphi_1 - \dot\varphi_3\cos\varphi_2 \\ \dot\varphi_3\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \dot\varphi_2\sin\varphi_1 & 0 & -(\dot\varphi_1 + \dot\varphi_3\sin\varphi_2) \\ -(\dot\varphi_2\cos\varphi_1 - \dot\varphi_3\cos\varphi_2\sin\varphi_1) & \dot\varphi_1 + \dot\varphi_3\sin\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Предположим теперь, что платформа, к которой прикреплен карданов подвес, вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\omega(t)$, проекции которой на оси X, Y, Z, неподвижные относительно платформы будут $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Уравнения движения получим из теоремы об изменении момента количества движения $\mathbf{K}$ в осях X, Y, Z. Вектор $\mathbf{K}$ имеет компоненты

$$(J(\dot\varphi_1 + \dot\varphi_3\sin\varphi_2 + \omega_1), J(\dot\varphi_2\cos\varphi_1 - \dot\varphi_3\cos\varphi_2\sin\varphi_1 + \omega_2),$$

$$J(\dot\varphi_3\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \dot\varphi_2\sin\varphi_1 + \omega_3))$$

а составляющие упругого момента найдутся из равенств

$$M_1 = -c\varphi_1, \quad M_3\sin\varphi_1 + M_2\cos\varphi_1 = -c\varphi_2$$

$$M_3\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - M_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + c\varphi_1\sin\varphi_2 = -c\varphi_3$$

Линеаризованная система в векторной форме, где $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, представима в виде

$$\ddot\varphi + \dot\omega + \omega \times \dot\varphi + c\varphi/J = 0 \tag{2.1}$$

В случае, когда $\dot\omega = 0$, это уравнение описывает прецессию гармонически колеблющегося вектора с угловой скоростью $-\frac{1}{2}\omega$. В случае, если $\omega = \omega(t)\,\mathrm{e}$, $\mathrm{e} = \mathrm{const}$, перейдем к базису, в котором вектор угловой скорости направлен по новой оси Z.

Получим

$$\ddot\varphi_1 - \omega\dot\varphi_2 + c\varphi_1/J = 0, \quad \ddot\varphi_2 + \omega\dot\varphi_1 + c\varphi_2/J = 0, \quad \ddot\varphi_3 + \dot\omega + c\varphi_3/J = 0$$

Преобразованием

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = \Phi \exp\left(-i\int \tfrac{1}{2}\omega\,dt\right)$$

(переходом во вращающуюся систему координат) первые два уравнения сведем к уравнению, вообще говоря, не гармонических колебаний.

Уравнения (1.4) и (2.1) описывают сходные процессы: прецессию волны крутильных колебаний упругого тела и прецессию мгновенной оси крутильных колебаний твердого тела в кардановом подвесе с упругостью. Заметим, что в случае упругого тела скорость прецессии зависит от номера n формы колебаний через коэффициент $\varkappa_{nn}$, а в случае твердого тела она равна с обратным знаком половине угловой скорости вращения платформы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
2. *Журавлев В. Ф.* К динамике упругого твердого тела//Изв АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 93—97.
3. *Вильке В. Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела//Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1988. № 3. С. 25—30.
4. *Дзама М. А., Егармин Н. Е.* Прецессия упругих волн при вращении некоторых классов осесимметричных оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 170—175.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1992