МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.381

 И. А. ГАЛИУЛЛИН

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ, ЛИНЕЙНЫХ ПО СКОРОСТЯМ

Получены необходимые и достаточные условия существования регулярных прецессий твердого тела с одной закрепленной точкой под действием сил, являющихся линейными функциями от обобщенных скоростей, соответствующих углам Эйлера. Рассмотрен случай, когда силы гироскопические. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы силовое поле обладало нулевым потенциалом. Проведено исследование обобщенной задачи Гриоли о существовании регулярной прецессии тела, на каждую точку которого действует сила, вычисляемая как векторное произведение скорости точки на один и тот же вектор, получающийся линейным преобразованием из некоторого постоянного вектора.

1. Рассматривается твердое тело с произвольной закрепленной точкой O. Его движение описывается изменением величин эйлеровых углов ψ, θ, φ, определяющих положение связанной с телом правой прямоугольной тройки осей $Oxyz$ относительно декартовых осей $OXYZ$ инерциальной системы.

Пусть движение твердого тела является регулярной прецессией с осью собственного вращения z и осью прецессии Z, где направления выбраны так, чтобы соответствующие постоянные проекции угловых скоростей ω_r и ω_e были положительны. Без нарушения общности можно предположить, что в начальный момент времени оси x и X совпадают. Тогда если θ_0 — постоянное значение угла нутации, то уравнения

$$\psi = \omega_e t, \quad \varphi = \omega_r t, \quad \theta = \theta_0 \tag{1.1}$$

будут описывать данную регулярную прецессию. В [1] приведена система дифференциальных уравнений движения твердого тела с одной закрепленной точкой при выборе фазового пространства обобщенных координат ψ, θ, φ и соответствующих обобщенных скоростей ω_ψ, ω_θ, ω_φ. Параметры в (1.1) должны быть таковыми, чтобы семейство фазовых траекторий (или хотя бы одна), отвечающих регулярной прецессии, составляло интегральное многообразие Ω:

$$\begin{gathered} \omega_\psi = \omega_e, \quad \omega_\varphi = \omega_r, \quad \omega_\theta = 0 \\ \theta = \theta_0, \quad \psi = \varkappa\varphi \ (\varkappa = \omega_e^{-1}\omega_r) \end{gathered} \tag{1.2}$$

При фиксированных значениях параметров (1.2) определяет прямую в R^6; возможное увеличение размерности Ω отражает допустимый произвол в выборе величин ω_e, ω_r, θ_0 и $\varkappa$.

В [1] решена задача определения обобщенных сил поля, в котором данное тело с осевыми моментами A, B, C и центробежными моментами D, E, F (в стандартных обозначениях) совершает регулярную прецессию с заданными параметрами. Соответствующие выражения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&Q_\psi = b_{12}\omega_\psi\omega_\theta + b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi + b_{22}\omega_\theta^2 + b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi + b_{33}\omega_\varphi^2 + L_\Omega \\
&Q_\theta = c_{11}\omega_\psi^2 + c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi + c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi + c_{33}\omega_\varphi^2 + M_\Omega \\
&Q_\varphi = d_{11}\omega_\psi^2 + d_{12}\omega_\psi\omega_\theta + d_{22}\omega_\theta^2 + N_\Omega
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

где функции L_Ω, M_Ω, N_Ω произвольны всюду кроме многообразия Ω, на котором они обращаются в нуль, а коэффициенты при обобщенных скоростях вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
&b_{12} = -2c_{11} = a\sin 2\theta - 2e\cos 2\theta \\
&b_{13} = -2d_{11} = 2b\sin^2\theta + d\sin 2\theta, \quad b_{22} = b\cos\theta - d\sin\theta \\
&b_{23} = (f - C)\sin\theta, \quad b_{33} = d\sin\theta \\
&c_{13} = -d_{12} = (f + C)\sin\theta + 2e\cos\theta \\
&c_{23} = -2d_{22} = -2b, \quad c_{33} = e \\
&a = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - F\sin 2\varphi - C \\
&b = 1/2\,(A - B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi, \quad d = D\sin\varphi - E\cos\varphi \\
&e = E\sin\varphi + D\cos\varphi, \quad f = 2F\sin 2\varphi + (A - B)\cos 2\varphi
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Также в [1] указаны выражения для L_Ω, M_Ω, N_Ω при условии, что твердое тело помещено в поле позиционных сил, т. е. обобщенные силы не зависят от ω_ψ, ω_θ, ω_φ.

Здесь будет рассмотрен случай, когда Q_ψ, Q_θ, Q_φ являются линейными функциями обобщенных скоростей. Тогда обращаются в нуль вторые частные производные этих функций по ω_ψ, ω_θ, ω_φ. С учетом выражений (1.3) это дает линейную систему уравнений в частных производных относительно L_Ω, M_Ω, N_Ω, опуская запись которой, приведем лишь ее решение (искомые функции предполагаются непрерывными по ψ, θ, φ и обладающими непрерывными третьими производными по ω_ψ, ω_θ, ω_φ):

$$
\begin{aligned}
&L_\Omega = -b_{12}\omega_\psi\omega_\theta - b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi - b_{22}\omega_\theta^2 - b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi - b_{33}\omega_\varphi^2 + l_1\omega_\psi + l_2\omega_\theta + l_3\omega_\varphi + l_0 \\
&M_\Omega = -c_{11}\omega_\psi^2 - c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi - c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi - c_{33}\omega_\varphi^2 + m_1\omega_\psi + m_2\omega_\theta + m_3\omega_\varphi + m_0 \\
&N_\Omega = -d_{11}\omega_\psi^2 - d_{12}\omega_\psi\omega_\theta - d_{22}\omega_\theta^2 + n_1\omega_\psi + n_2\omega_\theta + n_3\omega_\varphi + n_0
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

где l_i, m_i, n_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ — непрерывные функции ψ, θ, φ.

Подстановка (1.5) в (1.3) дает выражения для обобщенных сил в виде линейных функций от ω_ψ, ω_θ, ω_φ. При этом их коэффициенты и свободные члены продолжаются произвольным образом на все пространство с сохранением непрерывности исходя из условия, наложенного на функции L_Ω, M_Ω, N_Ω, а именно: так как в точках Ω они обращаются в нуль, то, учитывая соотношения (1.2), имеем

$$
\begin{aligned}
&\omega_e l_1\big|_\Omega + \omega_r l_3\big|_\Omega + l_0\big|_\Omega = 2b\omega_e\omega_r\sin^2\theta_0 + d\omega_r(2\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r)\sin\theta_0 \\
&\omega_e m_1\big|_\Omega + \omega_r m_3\big|_\Omega + m_0\big|_\Omega = 2f\omega_e(\omega_e\cos\theta_0 + 2\omega_r)\sin\theta_0 + \\
&+ e(\omega_e^2\cos 2\theta_0 + 2\omega_e\omega_r\cos\theta_0 + \omega_r^2) + C\omega_e\sin\theta_0(\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r) -
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

$$- \tfrac{1}{4}(A+B)\,\omega_e^2 \sin 2\theta_0$$

$$\omega_e n_1 \Big|_\Omega + \omega_r n_3 \Big|_\Omega + n_0 \Big|_\Omega = -b\omega_e^2 \sin^2\theta_0 - \tfrac{1}{2} d\omega_e^2 \sin 2\theta_0$$

Равенства (1.6) обобщают аналогичные выражения, полученные в [1], где рассмотрен случай, соответствующий наличию лишь свободных членов l_0, m_0, n_0 в формулах, определяющих обобщенные силы[1]. Ниже исследуется другой случай, в известном отношении противоположный: свободные члены в (1.5) полагаются равными нулю, так что Q_ψ, Q_θ, Q_φ представляют собой линейные формы обобщенных скоростей.

2. Пусть твердое тело подвержено действию линейных гироскопических сил. Тогда матрица, составленная из коэффициентов указанных линейных форм, будет кососимметрической, и выражения для обобщенных сил приобретают вид

$$Q_\psi = l\omega_\theta + m\omega_\varphi \tag{2.1}$$

$$Q_\theta = -l\omega_\psi + n\omega_\varphi, \quad Q_\varphi = -m\omega_\psi - n\omega_\theta$$

где функции l, m, n, непрерывно зависят от ψ, θ, φ (в обозначениях п. 1 $l_1 = m_2 = n_3 = 0$, $l_2 = -m_l = l$, $l_3 = -n_1 = m$, $m_3 = -n_2 = n$).

В частности, такой вид имеет место, когда действуют обобщенные потенциальные силы с тождественно равной нулю силовой функцией. Согласно с терминологией, принятой в работах итальянских механиков (например, [2, 3]), говорят, что тело находится в поле сил нулевого потенциала. В этом случае обобщенный потенциал является линейной формой обобщенных скоростей

$$V^* = v_1\omega_\psi + v_2\omega_\theta + v_3\omega_\varphi \tag{2.2}$$

Коэффициенты $v_i = v_i(\psi, \theta, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ в дальнейшем будут полагаться обладающими непрерывными вторыми частными производными. При этом предположении найдем условия, позволяющие по данным l, m, n определить функции v_1, v_2, v_3 в выражении (2.2).

По определению обобщенного потенциала выполняются соотношения

$$\frac{\partial v_1}{\partial\theta} - \frac{\partial v_2}{\partial\psi} = l, \quad \frac{\partial v_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_3}{\partial\psi} = m, \quad \frac{\partial v_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_3}{\partial\theta} = n \tag{2.3}$$

которые попарно образуют системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно v_i $(i = 1, 2, 3)$. При этом в каждой паре неизвестной будет считаться та функция v_i, которая встречается в обоих уравнениях. Необходимым и достаточным условием разрешимости подобных систем является равенство перекрестных производных соответствующим образом выделенных правых частей уравнений. В рассматриваемом случае это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v_2}{\partial\psi\partial\varphi} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial\psi\partial\theta} = \frac{\partial m}{\partial\theta} - \frac{\partial l}{\partial\varphi} \\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial\psi\partial\theta} = \frac{\partial n}{\partial\psi} + \frac{\partial l}{\partial\varphi} \\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial\psi\partial\varphi} = \frac{\partial m}{\partial\theta} - \frac{\partial n}{\partial\psi}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Равенства (2.4) представляют собой линейную систему относительно встречающихся в левой части трех видов вторых смешанных производных.

[1] Функции l_0, m_0, n_0 в [1] обозначены соответственно L, M, N. К сожалению, на с. 8 имеется опечатка: в среднем из выражений, аналогичных (1.6), отсутствуют два последних слагаемых, указанные здесь.

Система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов (равный 2) совпадает с рангом присоединенной матрицы. Это приводит к условию

$$\partial m/\partial\theta - \partial l/\partial\varphi - \partial n/\partial\psi = 0 \qquad (2.5)$$

являющемуся необходимым и достаточным для возможности по имеющимся выражениям обобщенных сил (2.1) определить структуру коэффициентов нулевого потенциала (2.2), иными словами, это — условие «обобщенной потенциальности» рассматриваемой гироскопической системы.

3. Исследование существования регулярной прецессии твердого тела в каждом конкретном силовом поле сводится к определению такого множества параметров, при котором выполняются условия (1.6). Размерность пространства параметров равна $9 + \sigma$: в их число входят моменты тела, а также характеристики регулярной прецессии, наконец, σ — количество параметров поля и находящегося под его действием тела, например, масса и координаты центра масс. Искомое множество можно определить таким же способом, как и в [1], а именно: функции l_i, m_i, n_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ раскладываются в тройной ряд Фурье (конечный или бесконечный) с последующей заменой $\theta \to \theta_0$, $\psi = \varkappa\varphi$; приравнивание в (1.6) коэффициентов при одинаковых синусах и косинусах — образующих ортогональную систему — дает совокупность алгебраических уравнений, и дальнейшее исследование сводится к изучению их совместности.

Обратная задача построения — по заданной регулярной прецессии (1.1) — силового поля (1.3) решается также с использованием равенств (1.6), причем неоднозначно, что характерно для обратных задач [4]. Один из вариантов решения состоит в распространении этих равенств на все пространство R^3 $\{\psi, \theta, \varphi\}$: тогда в левых частях снимаются значки $|_\Omega$, а в правых допускается замена $\theta_0 \to \theta$, $\varphi \to \varkappa^{-1}\psi$. В этом случае соотношения (1.6) представляют систему трех линейных уравнений с девятью неизвестными l_i, m_i, n_i $(i = 0, 1, 3)$, которая всегда имеет решение при произвольном выборе шести из них.

Пусть теперь силы являются гироскопическими, и Q_ψ, Q_θ, Q_φ имеют вид (2.1). Тогда левые части первого и третьего из равенств (1.6) пропорциональны с коэффициентом $-\varkappa$. Рассматривая соответственно правые части, получаем

$$b\omega_e \sin\theta_0 + d(\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r) = 0 \qquad (3.1)$$

Так как b и d имеют выражения (1.4), то равенство (3.1) является тождеством по переменной φ. Отсюда следует, что

$$A = B, \quad F = 0 \qquad (3.2)$$

а также два варианта

$$D = E = 0 \qquad (3.3)$$

$$\omega_r = -\omega_e\cos\theta_0 \qquad (3.4)$$

Таким образом, доказана следующая теорема, разъясняющая смысл соотношений (3.2)—(3.4).

Теорема. Регулярные прецессии твердого тела в поле линейных гироскопических сил возможны лишь с осью собственного вращения, расположенной перпендикулярно круговому сечению эллипсоида для закрепленной точки. При этом тело либо является симметричным, либо, в противном случае, прецессия обратная и модуль угловой скорости собственного вращения равен модулю проекции на эту ось угловой скорости прецессии тела.

Второй вариант соответствует тому, что вектор мгновенной угловой скорости ортогонален оси собственного вращения и, следовательно, находится в плоскости кругового сечения. В силу этого дополнительного свойства регулярная прецессия оказывается не более, чем четырехпараметрической.

Условия (1.6) для случая гироскопических сил (когда выполняются равенства (3.2)) приобретают вид

$$
\begin{aligned}
& m(\psi,\theta,\varphi)\,\Big|_{\Omega} \equiv m(\varkappa\varphi,\theta_0,\varphi) = (D\sin\varphi - E\cos\varphi)\,(2\omega_e\cos\theta_0+\omega_r)\sin\theta_0 \\
& (\omega_r n(\psi,\theta,\varphi) - \omega_e l(\psi,\theta,\varphi))\,\Big|_{\Omega} \equiv \omega_r n(\varkappa\varphi,\theta_0,\varphi) - \omega_e l(\varkappa\varphi,\theta_0,\varphi) = \\
& = (E\sin\varphi + D\cos\varphi)\,(\omega_e^2\cos 2\theta_0 + 2\omega_e\omega_r\cos\theta_0 + \omega_r^2) + \\
& + [(C-A)\,\omega_e\cos\theta_0 + C\omega_r]\,\omega_e\sin\theta_0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Если функции l, m, n разложить в двойной ряд Фурье по ψ и φ с коэффициентами, зависящими от θ:

$$
\begin{aligned}
& k(\psi,\theta,\varphi) = \sum_{i,j=0} (h_{kij}^{cc}(\theta)\cos i\varphi\cos j\psi + h_{kij}^{cs}(\theta)\cos i\varphi\sin j\psi + \\
& + h_{kij}^{sc}(\theta)\sin i\varphi\cos j\psi + h_{kij}^{ss}(\theta)\sin i\varphi\sin j\psi)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

где k — это поочередно l, m, n, — то равенства (3.5) оказываются эквивалентными системе, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых синусах и косинусах в (3.5) с учетом (3.6) после подстановки $\psi = \varkappa\varphi$. Опуская запись этой системы, отметим в заключение, что приведенная теорема справедлива и для более узкого класса линейных гироскопических сил, а именно: когда тело находится в поле сил нулевого потенциала. В этом случае функции l, m, n должны удовлетворять условию (2.5). Тогда на коэффициенты в представлении (3.6) накладываются дополнительные ограничения (вызванные условием (2.5)) в виде соотношений, которые здесь также не приводятся.

4. Рассмотрим задачу Гриоли [2] о движении твердого тела, на каждую точку которого действует сила, вычисляемая как векторное произведение скорости этой точки на один и тот же для всех точек постоянный вектор H^*. Известными примерами здесь служат силы Кориолиса, действующие на тело во вращающейся системе отсчета, и силы магнитного поля с постоянным вектором напряженности H, когда тело электрически заряжено и соответствующее распределение является стационарным. В такой постановке задача изучалась в [2, 3, 5—7] и ряде других, из современных исследований отметим [8, 9]. Одним из возможных обобщений может быть выбрана аналогичная постановка, где роль вектора H^* играет линейно преобразованный вектор $\Lambda^\circ\mathrm{H}^*$, не обязательно постоянный. Здесь будет рассматриваться случай, когда матрица Λ преобразования Λ° в подвижной системе $Oxyz$ постоянна и невырожденна.

Для определения выражений обобщенных сил воспользуемся уравнениями [8], где правые части представляют собой компоненты главного момента лоренцевых сил в осях xyz, связанных с твердым телом, однако, учитывая более общий характер рассматриваемой задачи, будем полагать коэффициенты произвольными

$$
\begin{aligned}
M_x &= a_{21}^1 q\gamma_1 + a_{22}^1 q\gamma_2 + a_{23}^1 q\gamma_3 + a_{31}^1 r\gamma_1 + a_{32}^1 r\gamma_2 + a_{33}^1 r\gamma_3 \\
M_y &= a_{11}^2 p\gamma_1 + a_{12}^2 p\gamma_2 + a_{13}^2 p\gamma_3 + a_{31}^2 r\gamma_1 + a_{32}^2 r\gamma_2 + a_{33}^2 r\gamma_3 \\
M_z &= a_{11}^3 p\gamma_1 + a_{12}^3 p\gamma_2 + a_{13}^3 p\gamma_3 + a_{21}^3 q\gamma_1 + a_{22}^3 q\gamma_2 + a_{23}^3 q\gamma_3
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где p, q, r — компоненты мгновенной угловой скорости тела, а γ_1, γ_2, γ_3 — компоненты орта оси, направленного вдоль H^* (эта ось в дальнейшем будет полагаться осью прецессии).

Связь между обобщенными силами и моментами устанавливается исходя из формулы

$$
Q_\psi\delta\psi + Q_\theta\delta\theta + Q_\varphi\delta\varphi = M_x\delta\pi_x + M_y\delta\pi_y + M_z\delta\pi_z \tag{4.2}
$$

при этом соотношения между вариациями обобщенных координат ψ, θ, φ и квазикоординат π_x, π_y, π_z (соответствующих квазискоростям p, q, r):

$$\begin{aligned} &\delta\pi_x = \sin\theta \sin\varphi\delta\psi + \cos\varphi\delta\theta \\ &\delta\pi_y = \sin\theta\cos\varphi\delta\psi - \sin\varphi\delta\theta, \quad \delta\pi_z = \cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi. \end{aligned} \tag{4.3}$$

следуют из известных кинематических уравнений Эйлера. Имеем

$$\begin{aligned} &Q_\psi = M_x \sin\theta\sin\varphi + M_y \sin\theta\cos\varphi + M_z\cos\theta \\ &Q_\theta = M_x\cos\varphi - M_y\sin\varphi, \quad Q_\varphi = M_z \end{aligned} \tag{4.4}$$

Выражая в формулах (4.1) моменты через фазовые переменные, введенные в п. 1 (с использованием кинематических уравнений Эйлера и соотношений $\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi$, $\gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi$, $\gamma_3 = \cos\theta$), и подставляя в (4.4), получим в окончательном виде

$$\begin{aligned} &Q_\psi = g_{11}\omega_\psi + g_{12}\omega_\theta + g_{13}\omega_\varphi \\ &Q_\theta = g_{21}\omega_\psi + g_{22}\omega_\theta + g_{23}\omega_\varphi, \quad Q_\varphi = g_{31}\omega_\psi + g_{32}\omega_\theta \end{aligned} \tag{4.5}$$

где коэффициентами g_{ij} служат тригонометрические полиномы от θ и φ (здесь не приведены в силу их громоздкости). Условие кососимметричности матрицы $\|g_{ij}\|$ дает соотношения $g_{ij} = -g_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i > j)$, $g_{11} = g_{22} = 0$. Исходя из этого, приравниваем теперь коэффициенты и свободные члены в соответствующих полиномах. Отсюда следуют девять равенств

$$a_{ij}^{i-\nu} = -a_{i-\nu,j}^{i}\ (i = 2, 3;\ \nu = 1, 2;\ \nu < i;\ j = 1, 2, 3) \tag{4.6}$$

отражающих то обстоятельство, что силы являются гироскопическими. Если далее считать их действием поля нулевого потенциала, то условие (2.5) приводит к дополнительным соотношениям

$$a_{\nu+1,\nu+1}^{\nu} = -a_{\nu+2,\nu+2}^{\nu}\ (\nu = 1, 2, 3;\ 4 \equiv 1;\ 5 \equiv 2) \tag{4.7}$$

так что в выражениях (4.1) остается только шесть произвольных коэффициентов.

Это число совпадает с количеством произвольных коэффициентов уравнений [8], где они характеризуют распределение заряда в теле и имеют следующий смысл

$$A_\nu^* = 1/2\,(a_i^* + a_j^* - a_\nu^*) \tag{4.8}$$

$$a_\nu^* = \int\limits_V (x_i^2 + x_j^2)\,\rho dv, \quad b_\nu = \int\limits_V x_i x_j \rho dv \quad (i, j, \nu = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq \nu)$$

Здесь $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $\rho = \rho\,(x, y, z)$ — функция плотности заряда; интегрирование проводится по объему V тела. Причем соответствие между этими коэффициентами и коэффициентами уравнений (4.1) устанавливается по формулам

$$\varepsilon HA_\nu^* = a_{\nu+2,\nu}^{\nu+1}, \quad \varepsilon Hb_\nu = a_{\nu+1,\nu+1}^{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3;\ 4 \equiv 1;\ 5 \equiv 2) \tag{4.9}$$

Таким образом, рассматриваемое обобщение задачи Гриоли оказывается математически эквивалентным задаче о движении в магнитном поле (с постоянным вектором напряженности) заряженного твердого тела, для которого «электрический» тензор J^* составлен из элементов a_ν^* и b_ν ($\nu = 1, 2, 3$) по тому же закону, что и тензор инерции.

Далее, полагая в выражениях (4.9) коэффициент ε произвольным и отвлекаясь от смысла функции ρ, укажем явные зависимости коэффициентов уравнений (4.1) от элементов тензора J^* и элементов λ_{ij} матрицы Λ. Используя формулу для главного момента, получаем, что условия гироскопичности (4.6) выполняются автоматически, а остающиеся произвольными девять коэффициентов составляют матрицу A^*, где на i,j-ом месте стоит элемент $a_{i+2,j}^{i+1}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ 4 \equiv 1;\ 5 \equiv 2)$, так что справедливо равенство (E^* — единичная матрица):

$$B^*\Lambda = A^*, \quad B^* = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(J^*)\,E^* - J^* \tag{4.10}$$

Дополнительное требование нулевой потенциальности (4.7) поля приводит к трем соотношениям

$$\lambda_{\nu+1,\nu+1}b_\nu + \lambda_{\nu,\nu+1}b_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2,\nu+1}A^*_{\nu+2} = \lambda_{\nu+2,\nu+2}b_\nu + \lambda_{\nu,\nu+2}b_{\nu+2} + \lambda_{\nu+1,\nu+2}A^*_{\nu+1}$$

$$(\nu = 1, 2, 3;\ 4 \equiv 1;\ 5 \equiv 2)$$

означающим, что матрица A^* является симметричной.

Исследуем теперь вопрос о существовании регулярных прецессий в поле сил с главным моментом, вычисляемым по формулам (4.1), — в этом случае на каждую точку тела действует сила, вычисляемая как векторное произведение скорости точки на один и тот же вектор, получающийся линейным преобразованием (с невырожденной и постоянной в подвижной системе матрицей) из некоторого постоянного вектора, вдоль которого предполагается направленной ось прецессии.

Вначале приведём явный вид коэффициентов в выражениях (2.1) или (4.5) с учетом соотношений (4.6):

$$\begin{aligned} l &= \tfrac{1}{4}\,(a_{12}^3 - 2a_{23}^1 + a_{31}^2)\sin 2\theta - (a_{21}^1 \sin^2\theta - a_{33}^2\cos^2\theta)\sin\varphi - \\ &- (a_{22}^1\sin^2\theta - a_{13}^3\cos^2\theta)\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\,[(a_{11}^3 + a_{32}^2)\sin 2\varphi + (a_{12}^3 - a_{31}^2)\cos 2\varphi] \\ m &= \tfrac{1}{2}\,(a_{32}^2 - a_{11}^3)\sin^2\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\,(a_{13}^3\sin\varphi - \\ &- a_{33}^2\cos\varphi) + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\,[(a_{31}^2 - a_{12}^3)\sin 2\varphi + (a_{32}^2 + a_{11}^3)\cos 2\varphi] \\ n &= -\tfrac{1}{2}\,(a_{12}^3 + a_{31}^2)\sin\theta - \cos\theta\,(a_{33}^2\sin\varphi + \\ &+ a_{13}^3\cos\varphi) - \tfrac{1}{2}\sin\theta\,[(a_{11}^3 + a_{32}^2)\sin 2\varphi + (a_{12}^3 - a_{31}^2)\cos 2\varphi] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Равенства (3.5), служащие необходимым и достаточным условием существования регулярной прецессии, представляют собой тождества по переменной φ. Подставляя в первое из них выражение (4.11) для m и учитывая (3.4), имеем

$$\begin{aligned} &a_{11}^3 = a_{32}^2 = 0, \quad a_{31}^2 = a_{12}^3 \\ &a_{13}^3 = -D\omega_e, \quad a_{33}^2 = -E\omega_e \end{aligned} \tag{4.12}$$

Тогда в выражениях для l и n исчезают коэффициенты при $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$; используя далее второе из равенств (3.5), получим аналогичным образом

$$a_{21}^1 = -E\omega_e, \quad a_{22}^1 = -D\omega_e, \quad a_{23}^1 = -A\omega_e \tag{4.13}$$

По формулам (4.12), (4.13) определяется матрица A^* за исключением остающихся произвольными двух первых элементов главной диагонали. Симметричность этой матрицы в силу сказанного выше означает, что существование регулярной прецессии предопределяет у поля линейных гироскопических сил наличие нулевого потенциала.

В случае $\Lambda = E^*$ регулярная прецессия симметричного тела под действием лоренцевых сил была впервые указана в [2, 5] и подробно изучена в [3]; в исследовании [7] открыта регулярная прецессия несимметричного тела: условия ее существования вытекают из формул (4.10), (4.12), (4.13), причем матрица

B^* имеет специальный вид, указанный в (4.10). Далее, в [9] также при $\Lambda = E^*$ рассмотрена произвольного вида матрица B^*, и приведены условия, совпадающие с (4.10), (4.12), (4.13), тем самым, получено описание всех возможных в данной постановке регулярных прецессий твердого тела.

Здесь рассмотрено такое обобщение задачи, когда матрица Λ не является единичной. Соотношения (4.10) при условии, что элементы A^* вычисляются по формулам (4.12), (4.13), позволяют определить параметры тела, совершающего регулярную прецессию. Обратная задача о построении гироскопического силового поля ставится и решается в двух вариантах: если искомой характеристикой поля является распределение сил в твердом теле, то при условии невырожденности преобразования Λ° из (4.10) имеем $B^* = A^*\Lambda^{-1}$; если же проводится поиск вектора $\Lambda^\circ H^*$, определяющего силовое поле, то также из (4.10) получаем $\Lambda = (B^*)^{-1} A^*$; добавочное выполнение соотношений (4.11) обеспечивает существование нулевого потенциала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галиуллин И. А.* Регулярные прецессии твердого тела с одной закрепленной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 6—18.
2. *Grioli G.* Moto attorno al baricentro di giroscopio soggetto a forze di potenza nulla // Rend. mat. e sue appl. 1947. Ser. 5. V. 6. No. 3—4. P. 439—463.
3. *Colombo G.* Osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio ed applicazioni ad un caso notevole // Rend. Sem. mat. Univ. Padova. 1951. V. 20. No. 1. P. 59—77.
4. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.
5. *Goldstein H.* The classical motion of a rigid charged body in a magnetic field // Amer. J. Phys. 1951. V. 19. No. 2. P. 100—109.
6. *Grioli G.* Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla // Rend. Sem. mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 90—102.
7. *Grioli G.* Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. fis., mat. e natur. 1957. Ser. 8. V. 22. No. 4. P. 459—463.
8. *Лунёв В. В.* Об однозначных решениях в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 147—154.
9. *Горр Г. В., Курганский Н. В.* О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С.16—20.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1992