

УДК 531.383

© 1993 г. В. Ф. ЖУРАВЛЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА (ВТГ)

Излагаются основные моменты теории ВТГ, включающие в себя математическую формулировку физического принципа, положенного в основу этих гироскопов (инертность волн), детальный анализ структуры линейных возмущений стоячих волн и изложение принципов управления волнами и их стабилизации.

Первое описание экспериментов, в которых наблюдался эффект инертности волн, приведено в [1].

В качестве теоретического обоснования авторы этого эксперимента сослались на работу [2]. Однако результат [2] установлен только для постоянной скорости вращения кольца, из чего никак не следует эффект инертности волн, проявляющийся в ускоренных движениях, что как раз и имело место в описанных экспериментах.

Первое теоретическое описание эффекта инертности волн приведено в [3], однако там это было сделано в первом приближении метода осреднения. В [4] показано, что эффект не зависит от степени приближения и для кольца является точным.

1. Физические основы ВТГ. 1.1. Плоская кинематическая прецессия стоячих волн. В основу создания ВТГ положен новый физический принцип, справедливый для всех свободных упругих систем, обладающих осевой симметрией, и который может быть, поэтому, пояснен на примере простейшей из таких систем — на примере тонкого упругого кругового кольца.

Известны следующие уравнения колебаний такого кольца в своей плоскости [4]:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0 \quad (1.1)$$

в котором через $w(t, \varphi)$ обозначено радиальное перемещение точки кольца, имеющей на кольце угловую координату φ . Штрихи означают дифференцирование по углу φ , а точки — по времени t ; $\omega(t)$ — угловая скорость вращения кольца в его плоскости, предполагаемая известной и зависящая произвольным образом от времени.

Уравнение (1.1) допускает решение в виде гармонической волны

$$w = q_1(t) \cos k\varphi + q_2(t) \sin k\varphi, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Значение $k=0$ не имеет смысла рассматривать, поскольку такая форма колебаний соответствует деформациям растяжения; в то время как уравнение (1.1) записано для нерастяжимого кольца. Значение $k=1$, формально возможно, однако оно означает перемещение кольца как жесткого целого без каких-либо деформаций, что не представляет для нас интереса.

Если рассматривать только колебания вида (1.2), то кольцо, как колебательная система, эквивалентно плоскому изотропному осциллятору, положение которого определяется двумя координатами q_1 и q_2 .

Подставляя (1.2) в (1.1), находим уравнения движения такого осциллятора

$$(k^2 + 1)\ddot{q}_1 - 4k\dot{\omega}\dot{q}_2 - 2k\dot{\omega}q_2 + k^2[(k^2 - 1)^2 + \omega^2(k^2 - 3)]q_1 = 0 \quad (1.3)$$

$$(k^2 + 1)\ddot{q}_2 + 4k\dot{\omega}\dot{q}_1 + 2k\dot{\omega}q_1 + k^2[(k^2 - 1)^2 + \omega^2(k^2 - 3)]q_2 = 0$$

Систему (1.3) удобно записать в векторной форме

$$(k^2 + 1)\ddot{q} - 4k\omega\dot{q} - 2k\dot{\omega}\Gamma q + \nu^2 q = 0 \quad (1.4)$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu^2 = k^2[(k^2 - 1)^2 + \omega^2(k^2 - 3)]$$

Если кольцо не вращается, то $\omega \equiv 0$ и система (1.3) распадается на уравнения двух независимых одномерных осцилляторов, для которых общее решение имеет вид

$$q_1 = a \cos \mu t + m \sin \mu t, \quad q_2 = b \cos \mu t + n \sin \mu t \quad (1.5)$$

с произвольными постоянными a, b, m, n и с частотой $\mu = k(k^2 - 1)(k^2 + 1)^{-1/2}$. В соответствии с (1.2) решение (1.4) определяет в этом случае следующий закон колебаний кольца:

$$w = (a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \cos \mu t + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \sin \mu t \quad (1.6)$$

При произвольных начальных условиях уравнения (1.5) определяют в плоскости (q_1, q_2) эллипс. В случае, когда этот эллипс вырождается в отрезок прямой решение (1.6) определяет в кольце стоячую волну. В случае противоположного вырождения, когда эллипс превращается в окружность формула (1.6) определяет в кольце бегущую волну.

Если $\omega \neq 0$, то прямолинейных колебаний в плоскости (q_1, q_2) в общем случае система (1.3) не имеет. Иными словами во вращающемся кольце стоячие волны невозможны. Однако, в этом случае в кольце существуют такие колебания, которые в некоторой вращающейся относительно него системе координат имеют вид стоячих волн. Такие волны мы будем называть *прецессирующими волнами*. Скорость соответствующей вращающейся системы координат будем называть *скоростью прецессии волны*.

Покажем существование такой системы координат и ее единственность.

Переход к вращающейся системе координат в уравнении (1.1) означает замену угловой переменной φ на $\varphi + \gamma(t)$, где угол $\gamma(t)$ определяет положение подвижной системы координат относительно кольца.

Если вместо φ в формулу (1.2) поставить $\varphi + \gamma$, то получим, что q_1 и q_2 надо заменить на $q_1 \cos k\gamma + q_2 \sin k\gamma$ и $-q_1 \sin k\gamma + q_2 \cos k\gamma$ соответственно.

Это преобразование поворота приводит к тому, что во вращающейся системе координат уравнение (1.4) приобретает вид

$$(k^2 + 1)\ddot{q} + \Gamma \{2k [(k^2 + 1)\dot{\gamma} - 2\omega] \dot{q} + k [(k^2 + 1)\ddot{\gamma} - 2\dot{\omega}] q\} + [\nu^2 + 4k^2\omega\dot{\gamma} - (k^2 + 1)k^2\dot{\gamma}^2] q = 0 \quad (1.7)$$

Для переменных во вращающейся системе координат сохраняются прежние обозначения.

Найдем условия существования в этой системе прямолинейной формы колебаний в плоскости (q_1, q_2) :

$$q_1 = q_1^0 \xi(t), \quad q_2 = q_2^0 \xi(t) \quad (1.8)$$

Здесь q_1^0, q_2^0 — произвольные константы, а $\xi(t)$ — скалярная функция времени, подлежащая определению.

Если подставить (1.8) в (1.7), то можно заметить, что для существования в (1.7) решения вида (1.8) достаточно потребовать обращения в нуль коэффициента при Γ :

$$2[(k^2 + 1)\dot{\gamma} - 2\omega]\xi + [(k^2 + 1)\ddot{\gamma} - 2\dot{\omega}]\xi = 0 \quad (1.9)$$

При любых $\xi(t)$ это можно обеспечить выбором угла $\gamma(t)$ по формуле

$$\gamma = \frac{2}{k^2 + 1} \int \omega(t) dt \quad (1.10)$$

После чего скалярная функция $\xi(t)$ найдется из уравнения

$$(k^2 + 1)\ddot{\xi} + [\nu^2 + 4k^2\omega\dot{\gamma} - (k^2 + 1)k^2\dot{\gamma}^2]\xi = 0$$

в котором вместо γ надо подставить (1.10).

Покажем, что условие (1.10) является и *необходимым* для существования в системе (1.7) прямолинейной формы колебаний. Обозначим $(k^2 + 1)\dot{\gamma} - 2\omega = u$ и рассмотрим (1.9): $2u\dot{\xi} + \dot{u}\xi = 0$. Откуда находим (c — произвольная постоянная):

$$\xi = c/\sqrt{u} \quad (1.11)$$

Решение (1.11) показывает, что функция $\xi(t)$ не может менять знак. Следовательно она не определяет колебательный процесс. Таким образом, к стоячим волнам относится только рассмотренный выше случай, приводящий к формуле (1.10).

Изложенное выше можно суммировать в виде *теоремы*.

Какой бы ни была зависимость угловой скорости кольца от времени (в классе дифференцируемых на бесконечном полуинтервале функций) существует и единственная вращающаяся относительно кольца система координат, в которой при некоторых начальных условиях колебания кольца воспринимаются как стоячие волны.

Скорость этой системы координат выражается формулой (1.10). Частным случаем из нее вытекает результат Брайона [2], установленный им только для случая постоянной скорости $\dot{\omega} \equiv 0$.

Заметим, что соотношение, верное для стационарного случая, как правило не бывает верным для нестационарного. Поэтому формула (1.10) описывает новый физический эффект, не замеченный Брайаном, и установленный, по-видимому впервые, авторами патента «Vibratory rotation sensor» экспериментально [1].

Формулу (1.10) ввиду ее точного характера можно сколько угодно раз дифференцировать. В частности, можно заметить, что ускорение прецессии волны пропорционально ускорению кольца:

$$\ddot{\gamma} = \frac{2}{k^2 + 1} \ddot{\omega}$$

Поскольку ускорение кольца пропорционально приложенному к нему моменту внешних сил $I\dot{\omega} = M$, то можно утверждать, что этот момент вызывает не только ускорение кольца, но и ускорение прецессирующей волны $1/2(k^2 + 1)I\ddot{\gamma} = M$.

Все сказанное и позволяет определить обсуждаемый физический эффект в неравномерно вращающемся кольце, как эффект *инертности упругих волн* в нем.

Эффект (1.10), который установлен для уравнения колебаний кольца (1.1) без каких-либо приближений, с различной степенью точности верен и для произвольных упругих тел, обладающих осевой симметрией. Различие будет состоять только в величине масштабного коэффициента, равного для кольца $2/(k^2 + 1)$.

1.2. Пространственная прецессия стоячих волн. Установленный выше эффект имеет одномерный характер. Он допускает следующее обобщение. Если рассмотреть упругое тело, обладающее сферической симметрией, то в случае его вращения в пространстве с угловой скоростью, меняющейся как по модулю, так и по направлению, в этом теле возможны прецессирующие волны упругих колебаний, причем их скорость прецессии также носит пространственный характер.

Рассмотрим упругое сферически симметричное твердое тело со свободной границей, на которое действуют массовые силы плотности f .

Главный вектор сил, действующих на тело $\int_V f dm$, без ограничения общности

будем полагать, равным нулю. Под действием главного момента $\int_V r \times f dm$ тело меняет свою ориентацию в пространстве (r — радиус-вектор произвольной точки тела, dm — элемент массы, V — область занятая телом).

Для описания упругих деформаций тела введем систему координат x_1, x_2, x_3 , связанную с телом так, чтобы выполнялись условия

$$\int_V x dm = 0, \quad \int_V r \times x dm = 0$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — упругое смещение точки, в недеформированном состоянии занимавшей положение r .

Эти условия характеризуют трехгранник, относительно которого, тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается.

Ставится следующая задача: зная абсолютную скорость трехгранника x_1, x_2, x_3 в проекциях на его же оси — $\omega(t)$ определить, как ведут себя волны упругих деформаций.

Для вывода уравнений упругих колебаний тела исходим из принципа Даламбера — Лагранжа

$$\int_V \left[\ddot{x} + \omega \times (\omega \times (r + x)) + \dot{\omega} \times (r + x) + 2\omega \times \dot{x} + \frac{1}{\rho} \nabla \Pi - f \right] dx dm = 0 \quad (1.12)$$

Здесь ρ — плотность, зависящая лишь от $|r|$, $\nabla \Pi$ — градиент квадратичного функционала линейной теории упругости. Координаты, определяющие угловое положение тела, как целого не варьируются, предполагается, что $\omega(t)$ — известная функция времени.

Уравнения движения будем записывать в обобщенных координатах Лагранжа, для выбора которых поступаем следующим образом.

Пусть $\omega \equiv 0$. Спектр собственных колебаний свободного твердого тела дискретен, т. е. существует неограниченная возрастающая последовательность частот собственных колебаний $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ которой соответствует последовательность собственных функций $h_1(r), h_2(r), \dots$, образующих ортонормированную систему

$$\int_V h_k(r) h_l(r) dm = \delta_k^l = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

Упругие колебания вращающегося тела ($\omega \neq 0$) будем разыскивать в виде ряда по этим собственным функциям:

$$x(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) h_n(r) \quad (1.13)$$

Коэффициенты этого ряда и рассматриваются в качестве независимых лагранжевых координат. Для получения уравнений движения в этих переменных следует подставить (1.13) в (1.12) и приравнять нулю коэффициенты при независимых δq_n . При этом получается бесконечная система дифференциальных уравнений второго порядка, обладающая специфической структурой.

Специфика эта определяется тем, что задача о собственных колебаниях сферически симметричного твердого тела очевидно допускает группу $SO(3)$, поэтому спектр собственных частот вырожден и состоит из последовательности, по крайней мере трехкратных частот: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 \leq \nu_4 = \nu_5 = \nu_6 \leq \dots$. Конфигурационное пространство при этом представляет собой прямое произведение трехмерных собственных подпространств: $\{h_1, h_2, h_3\} \times \{h_4, h_5, h_6\} \times \dots$. По этой причине уравнения колебаний тела в лагранжевых переменных представляют собой бесконечную систему уравнений, которую можно разбить на группы, содержащие по три уравнения каждая.

Запишем искомые уравнения в виде

$$\ddot{q} + Aq + \kappa G\dot{q} + 2\kappa G\dot{q} + L = 0$$

$$q = \begin{pmatrix} q_{3m-2} \\ q_{3m-1} \\ q_{3m} \end{pmatrix}, \quad \kappa = \left\| \int_V h_{3m-1} \times h_{3m} dm \right\|$$

(1.14)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots, \infty)$$

Здесь A — матрица позиционных сил и центробежных сил, G — матрица вращения; p, q, r — проекции вектора $\omega(t)$ на оси x_1, x_2, x_3 .

Если бы $L \equiv 0$, то система (1.14) представляла бы собой систему несвязанных друг с другом систем шестого порядка, описывающих эволюцию каждой формы колебаний отдельно. Через L обозначены все те члены, которыми уравнения для разных форм друг с другом связаны.

Влияние этих членов на динамику волн незначительно в том смысле, что в первом приближении асимптотического метода осреднения это влияние равно нулю. При применении метода осреднения малой считается величина угловой скорости и ее производной по времени.

Как и в одномерном случае, если $G \equiv 0$ система (1.14) допускает существование прямолинейных траекторий в подпространстве $(q_{3m-2}, q_{3m-1}, q_{3m})$, которым соответствуют стоячие волны в соответствии с (1.13). Если переменные q подвергнуть преобразованию вращения $q \rightarrow Mq$, M — ортогональная матрица ($M^T M = E$), то в преобразованной системе стоячие волны возможны и при $G \neq 0$.

Покажем это. Выполняя в (1.14) замену $q \rightarrow Mq$, найдем

$$\ddot{q} + 2M^T(\dot{M} + \kappa GM)\dot{q} + M^T(\ddot{M} + 2\kappa GM + \kappa \dot{G}M + AM)q = 0$$

(По-прежнему для переменных во вращающейся системе координат сохраняются обозначения исходных переменных).

Если матрицу M выбрать из условия

$$\dot{M} = -\kappa GM \quad (1.15)$$

то полученная система примет вид

$$\ddot{q} + M^T(A - \kappa^2 G^2)Mq = 0 \quad (1.16)$$

с симметрической матрицей позиционных сил. Если пренебречь ω^2 (центробежными силами), то матрица A будет определять сферический тензор $A = \alpha E$, где α — скаляр, а E — единичная матрица и уравнение (1.16) примет вид $\ddot{q} + \alpha q = 0$, в котором возможны прямолинейные колебания.

Уравнения (1.15) определяют ту вращающуюся систему координат (M — матрица перехода к ней), в которой существуют стоячие волны упругих колебаний сферически симметричного тела. Это уравнение имеет вид уравнения Пуассона, сравним его с уравнением Пуассона для самого тела $N = -GN$. Видно, что угловая скорость стоячей волны относительно тела (Ω_i) пропорциональна угловой скорости тела относительно неподвижного пространства

$$\Omega_i(t) = \kappa \omega_i(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.17)$$

Это равенство не имеет векторного характера, поскольку ω_i в нем представляет проекции угловой скорости тела на оси, связанные с ним, а Ω_i — проекции угловой скорости волны относительно тела на оси, связанные с самой волной.

Формула (1.17) представляет обобщение формулы (1.10) на пространственный случай.

1.3. *Прецессия стоячих волн в системах дробной связности.* Как уже ранее отмечено в формулах (1.2) или (1.10) подразумевается, что $k = 2, 3, \dots$

Масштабный коэффициент

$$\kappa = 2/(k^2 + 1) \quad (1.18)$$

достигает при этом максимального значения при $k = 2$ и стремится к нулю при больших k . При любых значениях k масштабный коэффициент *не превосходит единицы*, что означает, что волна в своем вращении относительно пространства отстает от кольца.

Между тем, нетрудно представить себе упругую систему, для которой справедливы те же уравнения (1.1), но с другими граничными условиями, для которых в формуле (1.18) коэффициент k может принимать дробные значения.

Рассмотрим в качестве примера замкнутое круговое кольцо, состоящее из двух витков. Поскольку кольцо рассматривается бесконечно тонким, то система по-прежнему плоская. Пространственный период такой системы равен 4π и решение (1.2), удовлетворяющее уравнению (1.1) и новым граничным условиям запишется так

$$w = q_1(t) \cos \frac{k}{2} \varphi + q_2(t) \sin \frac{k}{2} \varphi \quad (1.19)$$

Теперь в формулу для масштабного коэффициента (1.18) вместо k надо подставить $1/2k$, что приводит к выражению

$$\kappa = 8/(k^2 + 4) \quad (1.20)$$

У такой системы возможна форма колебаний с одним узлом (в формулах (1.19) и (1.20) $k = 1$). Для этой формы масштабный коэффициент равен $8/5$, т. е. *превышает единицу*. Волна относительно пространства вращается в сторону, противоположную вращению кольца.

Нетрудно представить себе упругую систему, в которой возможна форма колебаний с любым рациональным номером. Если считать, что практической реализацией математической модели кольца может служить достаточно длинный прямой круговой цилиндр (настолько длинный, чтобы краевыми условиями на его торцах можно было пренебречь), то вырезав из этого цилиндра винтовую линию с достаточно малой крутизной подъема, получим практическое приближение к такой системе. Рассматривая при этом в формуле (1.18) $k \rightarrow 0$ будем иметь для масштабного коэффициента $\kappa \rightarrow 2$.

2. *Общая классификация возмущений.* Рассмотренные в п. 1 свойства стоячих волн в идеальных резонаторах являются неустойчивыми по отношению к исчезающе малым возмущениям. Так, сколь угодно малые отклонения от симметричной формы резонатора, или от симметрии упругих свойств приводят к тому, что прецессия стоячей волны во вращающейся оболочке становится невозможной.

Для создания работоспособного прибора в условиях реальных возмущений в систему необходимо вводить обратные связи, препятствующие разрушению прецессирующих волн.

Чтобы правильно сформировать обратные связи необходимо ясно представить себе какие эволюции под действием возмущений претерпевают стоячие волны и разделить возмущения по признаку вызываемой ими эволюции.

2.1. *Конус стоячих волн.* Малые возмущения, в число которых включаются и электрические силы, необходимые для поддержания колебаний и управления ими, приводят к появлению в правой части системы (1.1) малых членов, зависящих от времени, от пространственной переменной φ , от величины перемещения w и от производных w по времени и по φ . Кроме того, малыми будем считать все члены, содержащие угловую скорость ω и ее производную $\dot{\omega}$.

Представим общее решение такого уравнения в форме

$$w = \sum_{k=2}^{\infty} q_1^k(t) \cos k\varphi + q_2^k(t) \sin k\varphi$$

Акцентируя внимание на второй форме колебаний кольца ($k=2$), введем обозначения $q_1^2(t) = q_1(t)$, $q_2^2(t) = q_2(t)$. Тогда система уравнений (1.3), рассматриваемая для второй формы может быть переписана в виде

$$\ddot{q}_1 + q_1 = \varepsilon Q_1 [t, q^t, \dot{q}^t], \quad \ddot{q}_2 + q_2 = \varepsilon Q_2 [t, q^t, \dot{q}^t] \quad (2.1)$$

Здесь, без ограничения общности принято $v_2 = 1$. Правые части системы (2.1) зависят не только от $q = q^2$, но и от всех остальных форм q^k , для которых необходимо написать уравнения, аналогичные (2.1).

В системе (2.1) выполним замену фазовых переменных $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ по следующим формулам:

$$q_1 = x_1 \cos t + x_3 \sin t, \quad q_2 = x_2 \cos t + x_4 \sin t \quad (2.2)$$

$$\dot{q}_1 = -x_1 \sin t + x_3 \cos t, \quad \dot{q}_2 = -x_2 \sin t + x_4 \cos t$$

Если возмущения отсутствуют ($\varepsilon = 0$), то $x \equiv \text{const}$ и в конфигурационном пространстве (q_1, q_2) уравнения (2.2) определяют эллипс. Т. е. каждая точка фазового пространства x определяет единственную эллиптическую траекторию в пространстве q и наоборот каждой эллиптической траектории в пространстве q соответствует единственная неподвижная точка в пространстве x .

Среди эллиптических траекторий есть вырожденные. Как уже отмечено в п. 1.1 стоячим волнам соответствуют отрезки прямых в пространстве q , а бегущим волнам — окружности.

В первом случае x в (2.2) должно удовлетворять условию

$$K = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \quad (2.3)$$

Если траектория — окружность, то x удовлетворяет условию

$$L = (x_1 \pm x_4)^2 + (x_2 \mp x_3)^2 = 0 \quad (2.4)$$

В четырехмерном пространстве x уравнение (2.3) определяет трехмерный конус. Многообразие, задаваемое условием (2.4) представляем собой двумерную ось этого конуса.

Таким образом, множество всех стоячих волн в кольце находится в 1—1 соответствии с точками конуса (2.3) в пространстве x , а множество всех бегущих волн — с точками его оси — (2.4).

В отношении этого пункта выразим угол, определяющий ориентацию стоячей волны относительно кольца — θ , через параметры x_1, x_2, x_3, x_4 .

Стоячую волну для второй формы колебаний можно записать так: $w = r \cos(t - \alpha) \cos 2(\varphi - \theta)$. Поскольку, очевидно имеют место равенства

$$x_1 = r \cos \alpha \cos 2\theta, \quad x_2 = r \cos \alpha \sin 2\theta, \quad x_3 = r \sin \alpha \cos 2\theta, \quad x_4 = r \sin \alpha \sin 2\theta$$

то искомая связь получается такой $r^2 \sin 4\theta = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4)$, $r^2 \cos 4\theta = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$, $r^2 = x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Введем обозначения для двух квадратичных форм, сопряженных квадратичной форме K : $K_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4$, $K_2 = 1/2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$. И окончательно, угол, определяющий ориентацию стоячей волны может вычисляться по формулам $\sin 4\theta = 2K_1/x^2$, $\cos 4\theta = 2K_2/x^2$.

2.2. *Базис инфинитезимальных эволюций.* Пусть $\varepsilon \neq 0$. Тогда $x \neq \text{const}$ и точка $x(t)$ медленно движется в пространстве x . Рассмотрим траекторию $x(t)$,

которая в начальный момент времени находилась на конусе $x(0) \in K$. В пространстве q точке $x(0)$ соответствует некоторый отрезок прямой, который в дальнейшем под воздействием возмущений может претерпевать следующие эволюции: прецессия формы — медленное вращение отрезка в плоскости q , когда существует такая вращающаяся система координат в q , в которой отрезок неподвижен; изменение частоты колебаний $q(t)$ вдоль неподвижного отрезка; изменение амплитуды колебаний, когда изменяется только длина отрезка; разрушение формы — это такая ее эволюция, которая не сводится к первым трем.

Всем этим типам эволюции прямолинейной формы колебаний в q , соответствуют определенные направления движения точки $x(t)$ в фазовом пространстве.

Направление наискорейшего разрушения прямолинейной формы определяется нормалью к конусу (2.3) $e_1 = dK/dx = \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\}$.

Для выяснения направления, определяющего прецессию, подвергнем (2.2) преобразованию поворота $x \rightarrow y$ (α — угол поворота):

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \cos t + x_3 \sin t \\ x_2 \cos t + x_4 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_3 \sin t \\ y_2 \cos t + y_4 \sin t \end{pmatrix}$$

Откуда вытекает $y_1 = x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha$, $y_2 = -x_1 \sin \alpha + x_3 \cos \alpha$, $y_3 = x_2 \cos \alpha + x_4 \sin \alpha$, $y_4 = -x_2 \sin \alpha + x_4 \cos \alpha$. Вектор, определяющий искомое направление, имеет вид

$$e_2 = \frac{dy}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\}$$

Для построения направления, определяющего изменение частоты, подвергнем (2.2) преобразованию трансляции по времени (τ — параметр преобразования):

$$\begin{pmatrix} x_1 \cos(t + \tau) + x_3 \sin(t + \tau) \\ x_2 \cos(t + \tau) + x_4 \sin(t + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_3 \sin t \\ y_2 \cos t + y_4 \sin t \end{pmatrix}$$

Откуда следует $y_1 = x_1 \cos \tau + x_3 \sin \tau$, $y_2 = x_2 \cos \tau + x_4 \sin \tau$, $y_3 = -x_1 \sin \tau + x_3 \cos \tau$, $y_4 = -x_2 \sin \tau + x_4 \cos \tau$. Вектор, определяющий искомое направление, имеет вид

$$e_3 = \frac{dy}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}$$

Для построения направления, определяющего изменения амплитуды, подвергнем (2.2) преобразованию растяжения (μ — параметр растяжения):

$$\begin{pmatrix} (1 + \mu)x_1 \cos t + (1 + \mu)x_3 \sin t \\ (1 + \mu)x_2 \cos t + (1 + \mu)x_4 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_3 \sin t \\ y_2 \cos t + y_4 \sin t \end{pmatrix}$$

Искомое направление задается вектором

$$e_4 = \frac{dy}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Итак, базис инфинитезимальных эволюций таков

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\} & e_2 &= \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} \\ e_3 &= \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\} & e_4 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где e_1 определяет разрушение стоячей волны, e_2 — ее прецессию, e_3 — изменения частоты и e_4 — изменение амплитуды.

Отметим важнейшие свойства построенного базиса.

Свойство 1 (Матрица Грама). Вычислим матрицу скалярных произведений:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (e_1 \cdot e_1) & \dots & (e_1 \cdot e_4) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_4 \cdot e_1) & \dots & (e_4 \cdot e_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 & 2K \\ 0 & x^2 & -2K & 0 \\ 0 & -2K & x^2 & 0 \\ 2K & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$

Ее определитель $\det \Gamma = (x^4 - 4K^2)^2$. Этот определитель на конусе ($K=0$), равен восьмой степени нормы вектора x : $\det \Gamma|_{K=0} = \|x\|^8$. На оси конуса (2.4) он равен нулю $x^4 - 4K^2 = 0$.

Свойство 2. Эволюционный базис e_1, e_2, e_3, e_4 ортогонален на конусе. Это свойство непосредственно следует из вида матрицы Грама.

Свойство 3. Четыре векторных поля (2.5) порождают четырехпараметрическую абелеву группу Ли диффеоморфизмов фазового пространства x в себя. Это следует из того, что, как нетрудно проверить, все скобки Пуассона векторных полей (2.5) равны нулю

$$[e_k, e_j] = 0 \quad \forall k, j$$

Свойство 4. Базис (2.5) является неголономным. Из четырех векторов базиса только два потенциальны $e_1 = dK/dx$, $e_4 = dS/dx$, где $S = 1/2(x^2 - 1) = 1/2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)$ определяет сферу единичного радиуса.

Свойство 5 (Глобальные эволюции конуса $K=0$ вдоль векторных полей (2.5)). Выпишем операторы ортов эволюционного базиса

$$U_1 = x_4 \frac{d}{dx_1} - x_3 \frac{d}{dx_2} - x_2 \frac{d}{dx_3} + x_1 \frac{d}{dx_4}$$

$$U_2 = x_2 \frac{d}{dx_1} - x_1 \frac{d}{dx_2} + x_4 \frac{d}{dx_3} - x_3 \frac{d}{dx_4}$$

$$U_3 = x_3 \frac{d}{dx_1} + x_4 \frac{d}{dx_2} - x_1 \frac{d}{dx_3} - x_2 \frac{d}{dx_4}$$

$$U_4 = x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3} + x_4 \frac{d}{dx_4}$$

Глобальная эволюция K вдоль конуса e_1 : $\exp \{ \pm U_1 \tau \} K = K \operatorname{ch} 2\tau \pm 1/2 x^2 \operatorname{sh} 2\tau$. При $\tau \rightarrow \infty$ многообразие $K \operatorname{ch} 2\tau \pm 1/2 x^2 \operatorname{sh} 2\tau = 0$ стремится к многообразию $K \pm 1/2 x^2 = 0$, представляющему собой ось конуса (2.4). То есть вдоль поля e_1 все траектории начинающиеся на конусе $K=0$ стремятся к оси конуса. Иными словами стоячие волны превращаются в бегущие.

Глобальная эволюция K вдоль e_2, e_3 и e_4 определяется тем фактом, что $U_2 K = 0$, $U_3 K = 0$, $U_4 K = 2K$. Откуда следует, что K является инвариантом векторных полей e_2 и e_3 , а многообразие $K=0$ является инвариантным многообразием векторного поля e_4 .

Свойство 6. Определитель системы базисных векторов (2.5):

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \quad (2.6)$$

$$= -4(x_1 x_2 + x_3 x_4)^2 - (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)^2$$

С другой стороны, поскольку определитель матрицы Грама равен квадрату определителя (2.6) ($\det \Gamma = \Delta^2$), можно для (2.6) получить и такое выражение

$\Delta = 4K^2 - x^4$. Откуда видно, что определитель равен нулю, как и определитель Грама на оси конуса и равен четвертой степени нормы x (со знаком минус) на самом конусе $K=0$.

В п. 2.1 введены обозначения для двух конусов сопряженных конусу K :

$$K_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4; \quad K_2 = 1/2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) \quad (2.7)$$

Векторные поля, порожденные нормальными к этим конусам ортогональны друг другу и ортогональны e_1 во всех точках пространства x . В этих обозначениях имеем два представления для Δ ($\Delta = -4(K_1^2 + K_2^2) = 4K^2 - x^4$).

2.3. *Оператор проектирования возмущений.* Осуществим в системе (2.1) переход к переменным (2.2) и выполним осреднение по явно входящему времени. При этом по всем остальным переменным q^k ($k > 2$) следует выполнить аналогичный переход. Если предположить, что зависимость Q_1 и Q_2 от q и \dot{q} не содержит степеней выше двух, то после осреднения связь уравнений, отвечающих разным формам исчезает и в переменных x система (2.1) приобретает вид

$$\dot{x} = \varepsilon X(x) \quad (2.8)$$

в котором правая часть $X(x)$ связана с правыми частями Q в (2.1) следующим образом:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} -E \sin t \\ E \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} dt \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Наиболее общий вид линейных по координатам и скоростям сил в системе (2.1), следующий:

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} = (C + H + N) \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} + (D + G + \Gamma) \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \quad H = h \begin{vmatrix} \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & -\cos 4\alpha \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}, \quad G = g \begin{vmatrix} \cos 4\beta & \sin 4\beta \\ \sin 4\beta & -\cos 4\beta \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

где C — симметрическая матрица потенциальных сил сферического типа; H — симметрическая матрица потенциальных сил гиперболического типа; N — кососимметрическая матрица непотенциальных сил; D — симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа; G — симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа; Γ — кососимметрическая матрица гироскопических сил. Матрицы C и D — диагональные (сферические тензоры), матрицы H и G имеют след, равный нулю (девиаторы).

Коэффициенты h и g определяют нормы девиаторов гиперболических сил, а углы α и β — ориентацию главных осей жесткости и демпфирования относительно тела кольца. Углы 2α и 2β определяют ориентацию осей девиаторов относительно осей q_1 и q_2 .

Выполним отображение всех перечисленных сил в правые части системы (2.8) по формуле (2.9). В результате получим

$$C: X(x) = 1/2c\{-x_3, -x_4, x_1, x_2\}$$

$$H: X(x) = 1/2h\{-x_3, x_4, x_1, -x_2\} \cos 4\alpha + \{-x_4, -x_3, x_2, x_1\} \sin 4\alpha]$$

$$N: X(x) = 1/2n\{-x_4, x_3, x_2, -x_1\}$$

$$D: X(x) = 1/2d\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$G: X(x) = 1/2g[\{x_1, -x_2, x_3, -x_4\} \cos 4\beta + \{x_2, x_1, x_4, x_3\} \sin 4\beta]$$

$$\Gamma: X(x) = 1/2\gamma\{x_2, -x_1, x_4, -x_3\}$$

Теперь, для того, чтобы выяснить, какую эволюцию вызывают все эти силы достаточно спроектировать их на векторы эволюционного базиса (2.5).

Если нас интересует локальная эволюция стоячей волны, то, в силу ортогональности базиса (2.5) на конусе $K=0$, при вычислении проекций достаточно брать скалярные произведения найденных выше векторов X с векторами (2.5).

Вне конуса базис (2.5) неортогонален, поэтому в общем случае проектирование сил X осуществляется по правилам неортогонального проектирования $X_e = (A^T)^{-1}X$, где A^T — матрица, получаемая транспонированием матрицы (2.6) с дополнительным делением каждого столбца на норму $\|e_i\| = \|x\|$ (векторы X_e и X здесь понимаются как матрицы-столбцы),

Обратную матрицу $(A^T)^{-1}$ можно вычислить при помощи матрицы Грама $\Gamma = x^2 A A^T$:

$$(A^T)^{-1} = x^2 \Gamma^{-1} A$$

Матрица, обратная найденной в п. 2.2 матрице Гама, легко вычисляется:

$$\Gamma^{-1} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 & -2K \\ 0 & x^2 & 2K & 0 \\ 0 & 2K & x^2 & 0 \\ -2K & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$

где Δ — (2.6). Перед тем, как свести вычисленные таким образом проекции сил X на базис e в таблицу разделим все найденные проекции на норму $\|x\|$. Смысл операции состоит в следующем.

Разделив проекции сил на e_1 на норму $\|x\|$, мы получаем нормированную на амплитуду волны скорость ее разрушения.

Поскольку скорость изменения фазового вектора вдоль e_2 определяет изменение угла прецессии в фазовом пространстве, то при делении этой скорости на модуль фазового вектора мы получаем скорость изменения самого угла.

Скорость изменения фазового вектора в направлении орта e_3 определяет скорость накопления временной фазы τ в функциях типа $\sin(t + \tau)$. Для получения скорости накопления этой фазы и надо делить фазовую скорость на модуль фазового вектора.

Если обозначить буквой r полную амплитуду колебаний $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, то для нахождения скорости изменения логарифма амплитуды ($\ln r$) также необходимо делить фазовую скорость на модуль фазового вектора. Разумность рассмотрения именно такой скорости следует из того, что в линейных системах изменение амплитуды обычно происходит по экспоненциальному закону и интерес представляет лишь показатель экспоненты.

Если, в дополнение к сказанному, проекции на e_2 разделить на 2, то скорость прецессии волны в фазовом пространстве превращается в соответствующую скорость в реальном физическом пространстве. С учетом всего сказанного таблица локальных эволюций принимает вид (таблица).

При построении этой таблицы было учтено, что вне конуса угол, определяющий прецессию волновой картины, вычисляется по формулам $\sin 4\theta = 2K_1/\sqrt{-\Delta}$, $\cos 4\theta = 2K_2/\sqrt{-\Delta}$.

Из таблицы следует, что потенциальные сферические силы (матрица сил G) приводит к изменению только частоты колебаний.

Гиперболические потенциальные силы (матрица H) приводят к разрушению стоячей волны и к изменению частоты колебаний если $K=0$. Вне конуса стоячих

	C	H	N	D	G	Γ
$dest K$ (e1)	0	$-\frac{hx^2}{2\sqrt{-\Delta}} \sin 4(\theta - \alpha)$	$-\frac{n}{2}$	0	$-\frac{gK}{\sqrt{-\Delta}} \cos 4(\theta - \beta)$	0
$\dot{\theta}$ (e2)	0	$-\frac{hK}{2\sqrt{-\Delta}} \cos 4(\theta - \alpha)$	0	0	$\frac{gx^2}{4\sqrt{-\Delta}} \sin 4(\theta - \beta)$	$\frac{\gamma}{4}$
$\dot{\tau}$ (e3)	$-\frac{c}{2}$	$-\frac{hx^2}{2\sqrt{-\Delta}} \cos 4(\theta - \alpha)$	0	0	$\frac{gK}{\sqrt{-\Delta}} \sin 4(\theta - \beta)$	0
$(\ln r)$ (e4)	0	$\frac{hK}{\sqrt{-\Delta}} \sin 4(\theta - \alpha)$	0	$\frac{d}{2}$	$\frac{gx^2}{2\sqrt{-\Delta}} \cos 4(\theta - \beta)$	0

волн эти силы приводят также и к прецессии волнового поля и к изменению амплитуды.

Непотенциальные силы (N) приводят только к разрушению стоячей волны.

Диссипативные силы (D) приводят только к изменению амплитуды.

Диссипативные силы гиперболического типа (G) вызывают прецессию стоячей волны и изменение ее амплитуды на конусе $K=0$. Если $K \neq 0$, то возникает дополнительно изменение K и изменение амплитуды. Гироскопические силы приводят только к прецессии волнового поля.

Таблица позволяет делать не только качественный анализ влияния возмущений на эволюцию стоячей волны, но также содержит и количественную информацию.

Так, если $K=0$, то из второй строчки таблицы извлекаем

$$\dot{\theta} = \frac{g}{4} \sin(\theta - \beta) + \frac{\gamma}{4}$$

Это уравнение отделилось от всех остальных и может интегрироваться независимо.

Поскольку, в соответствии с (1.3) коэффициент γ равен $(\delta/\zeta)\omega$, то эффект возмущения гироскопическими силами при $g=0$ имеет вид $\dot{\theta} = \delta/\zeta\omega$, что совпадает с (1.10).

Если $g \neq 0$ и $\gamma = 0$, то написанное уравнение имеет две особые точки, соответствующие двум стационарным состояниям стоячей волны, которые совпадают с главными осями диссипации. Одно состояние устойчиво (в этом состоянии диссипация наименьшая) и другое состояние неустойчиво (то, в котором диссипация наибольшая). Максимальный «уход» достигается в промежуточном состоянии и равен $g/4$. Два стационарных состояния существуют и в случае $|\gamma| < |g|$. Если $|\gamma| > |g|$, то угол прецессии стоячей волны оказывается неограниченным.

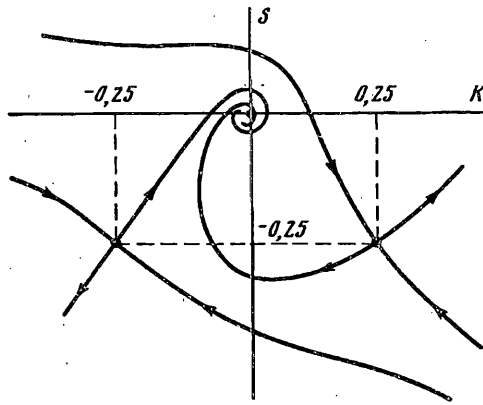
3. Основные принципы управления стоячими волнами. 3.1. Обратные связи в ортогональном дополнении к орту прецессии. В линейных системах вида (2.1) прямолинейная форма колебаний, а следовательно, и стоячая волна в кольце, является неустойчивой при постоянно действующих возмущениях. Как следует из таблицы при наличии сил с матрицей H или N сколь угодно малой амплитуды эта форма невозможна.

Поставим задачу: найти вид обратных связей, при которых прямолинейная форма колебаний в системе (2.1) оказывается устойчивой. При этом обратные связи должны быть такими, чтобы они не приводили ни к каким другим эволюциям формы.

С этой целью выберем в системе (2.8) обратную связь (управление) в виде

$$X(x) = -e_1 K - e_4 S \quad (3.1)$$

Напомним, что $K = x_1 x_4 - x_2 x_3$, а $S = 1/2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)$.



Такая обратная связь удовлетворяет условию $(X \cdot e_2) = 0$, $(X \cdot e_3) = 0$. Иными словами, она лежит в ортогональном дополнении к оси прецессии и оси частоты.

Если x принадлежит конусу $K=0$ и сфере единичного радиуса $S=0$, то воздействие обратной связи на систему равно нулю. Таким образом многообразие $(K=0) \cap (S=0)$ является многообразием точек покоя системы

$$\dot{x} = -\varepsilon(e_1 K + e_4 S) \quad (3.2)$$

Обратная связь $-e_1 K$ должна приводить фазовую точку на конус $K=0$, а обратная связь $-e_4 S$ призвана стабилизировать амплитуду.

Для наглядности запишем систему (3.2) в координатной форме, учитывая выражения для векторов базиса e_1 и e_4 в соответствии с (2.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\varepsilon [x_4(x_1 x_4 - x_2 x_3) + 1/2 x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)] \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon [-x_3(x_1 x_4 - x_2 x_3) + 1/2 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)] \\ \dot{x}_3 &= -\varepsilon [-x_2(x_1 x_4 - x_2 x_3) + 1/2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)] \\ \dot{x}_4 &= -\varepsilon [x_1(x_1 x_4 - x_2 x_3) + 1/2 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для того, чтобы обеспечить управление вида (3.1) в системе (2.8) следует приложить в системе (2.1), как это вытекает из таблицы, непотенциальные силы с матрицами N и D : $\ddot{q} + \dot{q} = -\varepsilon(Nq + D\dot{q})$, причем выбрать числа n и d , пропорциональными K и S .

Если в системе (3.2) многообразие $(K=0) \cap (S=0)$ окажется асимптотически устойчивым многообразием, то в силу его компактности оно будет и устойчивым при постоянно действующих возмущениях $X^v(x)$:

$$\dot{x} = -\varepsilon(e_1 K + e_4 S) + \varepsilon X^v(x)$$

Заметим, что обратная связь вида (3.1) не является единственно возможной. Помимо стабилизации стоячей волны и ее амплитуды можно ввести еще и стабилизацию частоты колебаний, осуществляемую вдоль вектора e_3 . В особенности это следует делать тогда, когда стабилизация амплитуды производится не в автономной форме, как это имеет место в (3.1), а при помощи параметрического возбуждения, как это принято в [1].

В рассмотренном случае (3.1) стабилизация амплитуды использует принцип автоколебаний, близкий к осциллятору Ван-Дер-Поля.

3.2. Дифференциальные уравнения системы с обратной связью в переменных стабилизируемых многообразий. Построим уравнения, определяющие K и S в

силу (3.2). Учитывая, что $dK/dt = dK/dx \cdot \dot{x} = e_1 \cdot \dot{x}$, $dS/dt = dS/dx \cdot \dot{x} = e_4 \cdot \dot{x}$, и имея в виду матрицу Грама и равенство $\|x\|^2 = 2S + 1$, получим

$$dK/d(\epsilon t) = -K(1 + 2S) - 2KS \quad (3.4)$$

$$dS/d(\epsilon t) = -2K^2 + (1 + 2S)S$$

Таким образом, в переменных стабилизируемых многообразий K и S исходная система четвертого порядка (3.3) принимает вид системы второго порядка (3.4).

3.3. Устойчивость многообразия $(K = 0) \cap (S = 0)$. Фазовый портрет двумерной системы (3.4) изображен на фигуре. Имеются две особые точки $(-1/4, -1/4)$ и $(1/4, -1/4)$ типа седла и одна особая точка $(0, 0)$ типа устойчивого фокуса.

В силу компактности многообразия $(K = 0) \cap (S = 0)$ из экспоненциальной устойчивости нуля следует устойчивость этого многообразия при постоянно действующих возмущениях.

Изложенное выше показывает принципиальную возможность использования эффекта инертности упругих волн в реальных системах для создания работоспособных гироскопических приборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. J. Loper et D. D. Lynch. The HRG: A new low-noise inertial rotation sensor. // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange For Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.
2. Bryan G. H. On the beats in the vibrations of revolving cylinder or bell. // Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci. 1890. Vol. 7. P. 101—111.
3. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17—24.
4. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 123 С.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1992