МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.383

 Н. Е. ЕГАРМИН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Рассматриваются колебания тонкого упругого вращающегося кольца. Свойства материала кольца полагаются линейными и подчиняющимися закону Гука. Исследуемые здесь нелинейности обусловлены чисто геометрическими обстоятельствами. Колебания кольца носят произвольный характер и не являются, вообще говоря, стоячими волнами.

Установлен ряд нелинейных эффектов, проявляющихся в эволюции волновой картины колебаний. Основной из них заключается в том, что в общем случае волновая картина прецессирует относительно резонатора даже при отсутствии вращения основания. Показано, что этот эффект столь велик, что требует обязательного учета при разработке волновых твердотельных гироскопов (ВТГ).

1. Нелинейные выражения потенциальной и кинетической энергий вращающегося упругого кольца. Введем в каждой точке срединной поверхности кольца локальную ортогональную систему координат с единичными векторами $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$. Вектор $\mathbf{e}_r$ будем считать направленным вдоль радиуса недеформированного кольца внутрь, а $\mathbf{e}_\varphi$ — по касательной к осевой линии недеформированного кольца в сторону увеличения окружного угла φ. Радиус-вектор $\mathbf{R}$ точки срединной поверхности после деформации может быть представлен в виде разложения по этим векторам следующим образом

$$\mathbf{R} = (w - R_0)\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi \tag{1.1}$$

где $w = w(\varphi)$, $v = v(\varphi)$ — соответственно нормальное и тангенциальное смещения точек осевой линии, R_0 — радиус недеформированного кольца.

Назовем z-слоем слой кольца, удаленный на расстояние z от срединной поверхности. Согласно гипотезам Кирхгоффа — Лява радиус-вектор $\mathbf{R}_z$ точек z-слоя после деформации определяется формулой

$$\mathbf{R}_z = (w - R_0)\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{n} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к осевой линии кольца. При отсутствии деформации векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{n}$ совпадают.

Из формулы (1.1) следует, что

$$\partial\mathbf{R}/\partial\varphi = R_0(1 + \varepsilon)\mathbf{e}_\varphi + R_0\omega\mathbf{e}_r \tag{1.3}$$

где введены обозначения $\varepsilon = (v' - w)/R_0$, $\omega = (w' + v)/R_0$, штрих означает дифференцирование по углу φ. При выводе формулы (1.3) принимались во внимание деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена, которые в данном частном случае кругового кольца имеют вид $\mathbf{e}_r' = -\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\varphi' = +\mathbf{e}_r$. Введем также в рассмотрение величину G согласно формуле $[(1 + \varepsilon)^2 + \omega^2]^{1/2}$. Тогда единичный вектор касательной к осевой линии кольца после деформации будет определяться формулой

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial\mathbf{R}/\partial\varphi}{|\partial\mathbf{R}/\partial\varphi|} = \frac{(1 + \varepsilon)\mathbf{e}_\varphi + \omega\mathbf{e}_r}{G}$$

А вектор $\mathbf{n}$ выразится так

$$\mathbf{n} = [(1+\varepsilon)\mathbf{e}_r - \omega \mathbf{e}_\varphi]/G, \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}) = 1 \tag{1.4}$$

Подставим выражение (1.4) для вектора $\mathbf{n}$ в формулу (1.2) и определим производную $\partial \mathbf{R}_z/\partial\varphi$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial\varphi} = \left(R_0 - z\frac{1+D}{G}\right)[(1+\varepsilon)\mathbf{e}_\varphi + \omega \mathbf{e}_r]$$
$$D = \frac{1}{G^2}\left((1+\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} - \omega\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right) \tag{1.5}$$

Деформация z-слоя задается по определению [1] выражением

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\frac{(\partial \mathbf{R}_z/\partial\varphi)^2 - (R_0 - z)^2}{(R_0 - z)^2} \tag{1.6}$$

а потенциальная энергия деформации кольца равна

$$\Pi = \frac{1}{2}E\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{+h}\varepsilon_z^2(R_0 - z)dzd\varphi \tag{1.7}$$

где E — модуль Юнга материала, h — полутолщина кольца, которая считается величиной постоянной.

Подставим формулу (1.5) в (1.6), а ее в свою очередь — в (1.7) и выполним интегрирование по z в указанных пределах. При интегрировании все подынтегральные выражения будем раскладывать в ряды по степеням z и будем ограничиваться только двумя первыми членами разложения, как это принято обычно при построении теории оболочек или балок. Более того, будем пренебрегать влиянием растяжения на изгиб [2]. Это означает, что в членах пропорциональных z^2 величину G полагаем равной единице. В результате изгибная часть потенциальной энергии оказывается пропорциональной квадрату величины

$$\varkappa_2 = (1+\varepsilon)\partial\omega/\partial\varphi - \omega\partial\varepsilon/\partial\varphi \tag{1.8}$$

А вся потенциальная энергия деформации после интегрирования по z определяется формулой

$$\Pi = \frac{1}{2}ER_0H_0\int_0^{2\pi}(\varepsilon_{22}^2 + a^2\varkappa_2^2)d\varphi$$
$$a^2 = \tfrac{1}{12}H_0^2/R_0^2, \quad \varepsilon_{22} = \tfrac{1}{2}(G^2 - 1) = \varepsilon + \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2 + \omega^2) \tag{1.9}$$

где $H_0 = 2h$ — полная толщина кольца, а $\varkappa_2$ определяется формулой (1.8). Заметим, что обычно в нелинейной теории оболочек [2] и колец ограничиваются в изгибной части потенциальной энергии лишь линейным выражением $\varkappa_2 = \partial\omega/\partial\varphi$. Заметим также, что при использовании низкочастотных колебаний релеевского типа учет члена ε^2 в выражении для ε_{22} представляется излишним. Поэтому в дальнейшем полагаем

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon + \omega^2/2 \tag{1.10}$$

Итак, потенциальная энергия кольца имеет вид (1.9) с учетом обозначений (1.8) и (1.10). А кинетическая энергия вращающегося кольца имеет обычный вид

$$T = \frac{1}{2}\rho_0H_0R_0\int_0^{2\pi}[(\dot v + \Omega R_0 - \Omega w)^2 + (\dot w + \Omega v)^2]d\varphi \tag{1.11}$$

2. Вывод нелинейных уравнений динамики вращающегося нерастяжимого кольца. Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона.

На основе формул (1.11), (1.9) составим удельный лагранжиан $l = l(w, \dot{w}, w', w'', v, \dot{v}, v')$. Методика вывода уравнений Лагранжа для распределенных систем описана, например, в [3]. Эти уравнения в данном случае будут иметь следующий вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial l}{\partial v'} - \frac{\partial l}{\partial v} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial l}{\partial w''} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial l}{\partial w'} - \frac{\partial l}{\partial w} = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Или в развернутом виде (члены порядка Ω^2 и $\dot{\Omega}$ во внимание принимать не будем):

$$\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} - \varkappa^2(w''' + v'') - \frac{\varkappa^2}{R_0^2}(w' + v)\,[(w' + v)(w''' + v'') + (w'' + v')^2] -$$
$$- \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} + \frac{\lambda}{R_0}(w' + v) = 0 \tag{2.2}$$

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \varkappa^2(w^{\mathrm{IV}} + v''') + \frac{\varkappa^2}{R_0^2}\,[(w' + v)^2(w^{\mathrm{IV}} + v''') +$$
$$+ (w'' + v')^3 + 4(w''' + v'')(w'' + v')(w' + v)] -$$
$$- \frac{\lambda}{R_0}(w'' + v') - \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{w' + v}{R_0} - \lambda = 0$$

$$\varkappa^2 = a^2\delta^2,\quad \delta^2 = E/(\rho_0 R_0^2),\quad \lambda = \delta^2\left((v' - w) + 1/2\,(w' + v)^2/R_0\right) \tag{2.3}$$

Перейдем к безразмерным переменным по следующим формулам: $w = \mu R_0 w_*$, $v = \mu R_0 v_*$, $t = t_*/\varkappa$, $\Omega = \mu\varkappa\Omega_*$, $\lambda = \mu R_0 \varkappa^2 \lambda_*$. Тогда в новых безразмерных переменных уравнения (2.2) и соотношение (2.3) примут вид

$$\ddot{v} - 2\mu\Omega\dot{w} - (w''' + v'') - \mu^2(w' + v)\,[(w' + v)(w''' + v'') + (w'' + v')^2] -$$
$$- \partial\lambda/\partial\varphi + \mu\lambda(w' + v) = 0$$
$$\ddot{w} + 2\mu\Omega\dot{v} + (w^{\mathrm{IV}} + v''') + \mu^2\,[(w' + v)^2(w^{\mathrm{IV}} + v''') +$$
$$+ (w'' + v')^3 + 4(w''' + v'')(w'' + v')(w' + v)] -$$
$$- \mu\lambda(w'' + v') - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{w' + v}{R_0} - \lambda = 0 \tag{2.4}$$
$$(v' - w) + 1/2\,\mu(w' + v)^2 = a^2\lambda$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей звездочку у безразмерных переменных опускаем. Уравнения (2.4) описывают нелинейные колебания тонкого растяжимого кольца и содержат два малых параметра. Параметр μ характеризует малость амплитуды колебаний кольца, а параметр a — малость его толщины. В зависимости от соотношений между этими параметрами возможны различные частные случаи.

Полагая в уравнениях (2.4) $\mu = 0$ и $a^2 = 0$, получим уравнения, определяющие линейные колебания нерастяжимого кольца. Если в уравнениях (2.4) положить $\mu = 0$, но $a^2 \neq 0$, то будем иметь два уравнения, определяющие линейные колебания тонкого упругого растяжимого кольца. Наконец, если в уравнениях

(2.4) положить $a^2 = 0$, $\mu \neq 0$, то получим уравнения, определяющие нелинейные колебания нерастяжимого кольца

$$\begin{gathered}
\ddot{v} - 2\mu\Omega\dot{w} - (w''' + v'') - \frac{\mu^2}{2}(w' + v)\left((w' + v)^2\right)'' - \lambda' + \mu\lambda(w' + v) = 0 \\
\ddot{w} + 2\mu\Omega\dot{v} + (w^{IV} + v''') + 1/2\mu^2\left[(w' + v)\left((w' + v)^2\right)''\right]' - \\
- \lambda - \mu\left[\lambda(w' + v)\right]' = 0 \\
v' - w + 1/2\mu(w' + v)^2 = 0
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Эти уравнения и будут предметом дальнейшего анализа. Они представляют собой систему трех уравнений относительно неизвестных w, v, λ. Отметим, что уравнения (2.5) можно получить и иначе, а именно, воспользовавшись методом неопределенного множителя Лагранжа. При таком подходе переменная λ не определялась бы первоначально через v и w согласно формуле (2.3), а сразу вводилась бы как независимая функция от φ и t. Согласно методу неопределенного множителя варьированию подвергался бы не удельный лагранжиан, составленный на основе формул (1.9), (1.11), а функция

$$\begin{gathered}
l^* = 1/2(\dot{v} + \Omega R_0 - \Omega w)^2 + 1/2(\dot{w} + \Omega v)^2 - \\
- 1/2\varkappa^2(1 + (w' + v)^2/R_0^2)(w'' + v')^2 - \lambda f(v, w, v', w')
\end{gathered}$$

где $f(v, w, v', w')$ — уравнение связи: $f = v' - w + 1/2(w' + v)^2/R_0 = 0$.

Подставляя функцию l^* в общий вид уравнений Лагранжа распределенной системы (2.1), вновь получим уравнения динамики (2.5).

3. Уравнения для медленных переменных. В связи с наличием малого параметра уравнения (2.5) целесообразно исследовать одним из методов малого параметра, например, методом многих масштабов. Для получения нелинейных эффектов в невращающемся кольце требуется построить два приближения. Для обнаружения специфических нелинейных эффектов во вращающемся кольце требуется построить уже три приближения. Можно ограничиться и вторым приближением, но тогда в качестве решения порождающей системы следует брать решение линейной задачи о колебаниях вращающегося кольца.

Метод многих масштабов [4] предполагает построение разложений всех независимых переменных в ряды по степеням малого параметра

$$\begin{gathered}
w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots, \\
v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Одновременно вводятся различные масштабы времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$, так что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \varepsilon\frac{d}{dt_1} + \varepsilon^2\frac{d}{dt_2} + \ldots \tag{3.2}$$

Причем все члены разложений w_i, v_i, λ_i являются функциями от t_0, t_1, t_2 и т. д. Например, $w_0 = w_0(t_0, t_1, t_2, \ldots)$.

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в исследуемые уравнения (2.5) и разделяя затем в этих уравнениях члены при различных степенях параметра μ, получим совокупность систем уравнений нулевого, первого, второго и т. д. приближений. Решая их последовательно, строим поочередно члены разложений (3.1). Для того, чтобы в каждом приближении не возникало секулярных членов, должны выполняться некоторые условия. Эти условия и дают уравнения, описывающие эволюцию медленных членов разложений (3.1). Одновременно с построением более высоких членов разложений (3.1) будет проявляться зависимость предыдущих (более низких) членов разложения от более медленных масштабов времени. Например, в нулевом приближении получаем порождающее решение

$w_0(t_0)$, $v_0(t_0)$, $\lambda_0(t_0)$. Из условия отсутствия секулярных членов в первом приближении находим зависимости $w_0(t_0, t_1)$, $v_0(t_0, t_1)$, $\lambda_0(t_0, t_1)$. Построив первое приближение, находим $w_1(t_0)$, $v_1(t_0)$, $\lambda_1(t_0)$, и т. д. Реализация описанной процедуры не встречает никаких принципиальных затруднений, однако для построения второго и тем более третьего приближений приходится делать очень громоздкие выкладки.

Задача значительно облегчается благодаря возможности использовать результаты исследования [5], автор которого изучал эволюцию бегущих волн в быстро вращающемся кольце. Уравнения работы [5] значительно сложнее уравнений (2.5), так как вместо традиционно используемых в механике стержней и оболочек локальных систем координат там используется глобальная полярная система координат. Другими словами, вместо переменных w, v используются переменные $R(t, \varphi)$ — длина радиус-вектора точек с материальной координатой φ после деформации в момент времени t, $\Theta(t, \varphi)$ — угол между радиус-вектором точки после деформации и осью Ox системы координат, вращающейся относительно инерциальной с угловой скоростью Ω. Из формулы (1.1) следует, что $R = [(R_0 - w)^2 + v^2]^{1/2}$. С другой стороны, видно, что $\sin(\Theta - \varphi) = v/R$. Отсюда получаем $\Theta = \varphi + \arcsin v/R$.

Обратное преобразование имеет вид $v = R\sin(\Theta - \varphi)$, $w = R_0 - R\cos(\Theta - \varphi)$. С помощью этих формул уравнения [5] могут быть преобразованы к виду (2.5) и наоборот. Единственное отличие заключается в членах порядка Ω^2, которые в уравнениях (2.5) сознательно опущены. Изучение эффектов пропорциональных Ω^2 не ставится целью настоящей работы.

Нулевое приближение уравнений (2.5) берем в виде двух бегущих в противоположные стороны волн

$$w_0 = A_1\cos(k\varphi + \nu t_0 + \beta_1) + A_2\cos(k\varphi - \nu t_0 + \beta_2) \tag{3.3}$$

где A_1, A_2, β_1, β_2 — функции медленных времен t_1, t_2 и так далее. В [5] показано, что $A_1(t_1, t_2) = \text{const}$ и $A_2(t_1, t_2) = \text{const}$. А для β_1 и β_2 получены уравнения, которые после перехода к исходным размерным переменным будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\dot\beta_1 &= \frac{2k\Omega}{k^2+1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{A_1^2}{R_0^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{A_2^2}{R_0^2}\\
\dot\beta_2 &= \frac{2k\Omega}{k^2+1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{A_1^2}{R_0^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{A_2^2}{R_0^2}\\
\nu_0 &= k(k^2-1)/[k^2+1]^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где α_0, α_1, α_2, α_3 — безразмерные коэффициенты, являющиеся функциями номера формы k и безразмерного параметра $\Omega_0 = \Omega\nu_0^2/\nu$. Значения параметров $\alpha_0, \ldots, \alpha_3$ определяются очень громоздкими выражениями [5]. Здесь приведем только их значения для $k = 2$. Причем ограничимся только первыми двумя членами разложения по Ω (нулевым и первым), так как членами порядка Ω^2 изначально пренебрегалось. При этих ограничениях имеем следующие значения параметров α_i:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_{00} = -10\nu_0 + O(\Omega_0^2) = -12\sqrt{5} + O(\Omega_0^2)\\
\alpha_2 &= \alpha_{20} = -7776/100 + O(\Omega_0^2)\\
\alpha_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}\Omega_0 + O(\Omega_0^2) = 297/10 + 13/30\Omega_0 + O(\Omega_0^2)\\
\alpha_3 &= \alpha_{10} - \alpha_{11}\Omega_0 + O(\Omega_0^2) = 297/10 - 13/30\Omega_0 + O(\Omega_0^2)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Такой характер разложения α_i в ряды по степеням Ω_0 имеют при любом номере формы k. Второй нуль в индексе параметров α_i соответствует значениям этих параметров при $\Omega = 0$.

4. Переход к декартовым переменным описания волновой картины. Представление (3.3) в сочетании с формулами (3.4) для медленных переменных не дает достаточно наглядного представления об эволюции волновой картины колебаний оболочки (резонатора ВТГ). Поэтому помимо представления колебаний в виде двух бегущих в противоположные стороны волн

$$w(t, \varphi) = A_1 \cos(k\varphi + \nu t + \beta_1) + A_2 \cos(k\varphi - \nu t + \beta_2) \tag{4.1}$$

рассмотрим еще следующее

$$w(t, \varphi) = a \cos \nu t \cos k\varphi + b \cos \nu t \sin k\varphi + m \sin \nu t \cos k\varphi + n \sin \nu t \sin k\varphi \tag{4.2}$$

Сопоставляя формулы (4.1), (4.2) видим, что

$$\begin{aligned} &a = A_1 \cos \beta_1 + A_2 \cos \beta_2, \quad m = -A_1 \sin \beta_1 + A_2 \sin \beta_2 \\ &b = -A_1 \sin \beta_1 - A_2 \sin \beta_2, \quad n = -A_1 \cos \beta_1 + A_2 \cos \beta_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Обратные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} &A_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{I - S}, \quad A_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{I + S} \\ &\cos \beta_1 = \frac{a - n}{\sqrt{I - S}}, \quad \sin \beta_1 = -\frac{m + b}{\sqrt{I - S}} \\ &\cos \beta_2 = \frac{a + n}{\sqrt{I + S}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{m - b}{\sqrt{I + S}} \\ &I = a^2 + m^2 + b^2 + n^2, \quad S = 2(an - bm) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Дадим правила «перепроектирования» уравнений динамики от переменных a, m, b, n, к переменным A_1, β_1, A_2, β_2 и обратно. Из формул (4.3) после дифференцирования получим

$$\left\|\begin{matrix} \dot a \\ \dot m \\ \dot b \\ \dot n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{a - n}{\sqrt{I - S}} & \dfrac{m + b}{2} & \dfrac{a + n}{\sqrt{I + S}} & -\dfrac{m - b}{2} \\ \dfrac{m + b}{\sqrt{I - S}} & -\dfrac{a - n}{2} & \dfrac{m - b}{\sqrt{I + S}} & \dfrac{a + n}{2} \\ \dfrac{m + b}{\sqrt{I - S}} & -\dfrac{a - n}{2} & -\dfrac{m - b}{\sqrt{I + S}} & -\dfrac{a + n}{2} \\ -\dfrac{a - n}{\sqrt{I - S}} & -\dfrac{m + b}{2} & \dfrac{a + n}{\sqrt{I + S}} & -\dfrac{m - b}{2} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \dot A_1 \\ \dot \beta_1 \\ \dot A_2 \\ \dot \beta_2 \end{matrix}\right\| \tag{4.5}$$

Определитель стоящей здесь матрицы равен $-[I^2 - S^2]^{1/2}$. Из формул (4.4) после дифференцирования находим

$$\left\|\begin{matrix} \dot A_1 \\ \dot \beta_1 \\ \dot A_2 \\ \dot \beta \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2} \left\|\begin{matrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & -\sin \beta_1 & -\cos \beta_1 \\ -\dfrac{\sin \beta_1}{A_1} & -\dfrac{\cos \beta_1}{A_1} & -\dfrac{\cos \beta_1}{A_1} & \dfrac{\sin \beta_1}{A_1} \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ -\dfrac{\sin \beta_2}{A_2} & \dfrac{\cos \beta_2}{A_2} & -\dfrac{\cos \beta_2}{A_2} & -\dfrac{\sin \beta_2}{A_2} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \dot a \\ \dot m \\ \dot b \\ \dot n \end{matrix}\right\| \tag{4.6}$$

Определитель этого преобразования, обратного к преобразованию (4.5), равен, очевидно, $-1/[I^2 - S^2]^{1/2}$. Если заданы уравнения динамики в переменных A_1,

β_1, A_2, β_2, то формулы (4.5) позволяют записать эти уравнения в декартовых координатах a, m, b, n. Напротив, если заданы уравнения динамики в декартовых координатах, то с помощью формул (4.6) можно записать эти уравнения в терминах амплитуд и фаз бегущих в противоположные стороны волн. Эти преобразования имеют особенность при $I = \pm S$, т. е. когда колебания представляют собой одну бегущую волну.

Воспользовавшись формулами (4.5), получаем в данном случае

$$\dot a = m\dot\eta_1 + b\dot\eta_2,\quad \dot m = -a\dot\eta_1 + n\dot\eta_2$$

$$\dot b = n\dot\eta_1 - a\dot\eta_2,\quad \dot n = -b\dot\eta_1 - m\dot\eta_2 \tag{4.7}$$

$$\eta_1 = (\beta_1 - \beta_2)/2,\quad \eta_2 = (\beta_1 + \beta_2)/2$$

Из формул (3.4) следует, что

$$\dot\eta_1 = -\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{8\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{I}{R_0^2} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{8\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{S}{R_0^2}$$

$$\dot\eta_2 = \frac{2k\Omega}{k^2+1} + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{8\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{I}{R_0^2} + \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{8\alpha_0}\frac{\nu}{\nu_0}\frac{S}{R_0^2} \tag{4.8}$$

5. Переход к каноническим переменным описания волновой картины. Наиболее наглядным является представление волновой картины в виде суперпозиции стоячих волн, ортогональных в конфигурационном пространстве и квадратурных по времени

$$w(t, \varphi) = p\cos k(\varphi - \vartheta)\sin(\nu t + \gamma) - q\sin k(\varphi - \vartheta)\cos(\nu t + \gamma) \tag{5.1}$$

где ϑ будем называть ориентацией волновой картины, γ — ее фазой, p — амплитуда основной волны, q — амплитуда узловой квадратурной волны.

Поэтому в качестве следующего шага перейдем от уравнений (4.7) для декартовых координат к уравнениям для медленных переменных I, S, ϑ, γ, где $I = p^2 + q^2 = a^2 + m^2 + b^2 + n^2$ — интенсивность волны, $S = 2pq = 2(an - bm)$ — эллиптичность колебаний. Если волновая картина вырождается в чисто стоячую волну, то будем иметь $S = 0$, $q = 0$. Величина I будет при этом равна квадрату амплитуды этой стоячей волны, а параметр ϑ станет углом ориентации этой стоячей волны. Переменные I, S, ϑ, γ будем называть каноническими параметрами волновой картины.

Сопоставляя представления (4.2) и (5.1) видим, что имеют место следующие соотношения

$$\sin 2k\vartheta = \frac{2(ab + mn)}{p^2 - q^2},\quad \cos 2k\vartheta = \frac{a^2 + m^2 - b^2 - n^2}{p^2 - q^2}$$

$$\sin 2\gamma = \frac{2(am + bn)}{p^2 - q^2},\quad \cos 2\gamma = \frac{-a^2 + m^2 - b^2 + n^2}{p^2 - q^2} \tag{5.2}$$

$$(p^2 - q^2)^2 = I^2 - S^2$$

Введем обозначение $\mathrm{a} = (a, m, b, n)$. Зная производную вектора a, составим дифференциальные уравнения для медленных переменных I, S, ϑ, γ. С помощью формул преобразования (5.2) приходим к уравнениям следующего вида

$$\dot I = 2(\mathrm{e}_I \cdot \dot{\mathrm{a}}),\quad \dot S = 2(\mathrm{e}_S \cdot \dot{\mathrm{a}})$$

$$k\dot\vartheta = \frac{I}{(p^2 - q^2)^2}(\mathrm{e}_\vartheta^* \cdot \dot{\mathrm{a}}) + \frac{S}{(p^2 - q^2)^2}(\mathrm{e}_\gamma^* \cdot \dot{\mathrm{a}})$$

$$\dot{\gamma} = \frac{I}{(p^2 - q^2)^2} (e^*_\gamma \cdot \dot{a}) - \frac{S}{(p^2 - q^2)^2} (e^*_\vartheta \cdot \dot{a})$$

$$e_I = (a, m, b, n), \; e_S = (n, - b, - m, a) \tag{5.3}$$

$$e^*_\vartheta = (- b, - n, a, m), \; e^*_\gamma = (- m, a, - n, b)$$

Отметим, что при $S = 0$ четыре вектора e_I, e_S, e^*_ϑ e^*_γ образуют в пространстве (a, m, b, n) ортогональный базис. При $S \neq 0$ ортогональность векторов e_I, e_S и векторов e^*_ϑ, e^*_γ нарушается. Однако подпространства (e_I, e_S) и $(e^*_\vartheta, e^*_\gamma)$ остаются ортогональными одно другому. Эти свойства получаются непосредственно из выражений для этих векторов путем вычисления их взаимных скалярных произведений. Матрица скалярных произведений имеет вид

$$\begin{Vmatrix} I & S & 0 & 0 \\ S & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -S \\ 0 & 0 & -S & I \end{Vmatrix}$$

С помощью введенных вспомогательных векторов уравнения (4.7) можно записать в следующей компактной форме

$$\dot{a} = - \dot{\eta}_1 e^*_\gamma - \dot{\eta}_2 e^*_\vartheta \tag{5.4}$$

Подстановка уравнений (5.4) в формулы «перепроектирования» (5.3) приводит к следующим уравнениям, описывающим эволюцию канонических переменных: $\dot{I} = \dot{S} = 0$, $k\dot{\vartheta} = - \dot{\eta}_2$, $\dot{\gamma} = \dot{\eta}_1$. Или, в развернутом виде, принимая во внимание формулы (4.8):

$$\dot{I} = \dot{S} = 0$$

$$\dot{\vartheta} = - \frac{2\Omega}{k^2 + 1} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{8k\alpha_0} \frac{\nu}{\nu_0} \frac{I}{R_0^2} - \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3}{8k\alpha_0} \frac{\nu}{\nu_0} \frac{S}{R_0^2} \tag{5.5}$$

$$\dot{\gamma} = - \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{8\alpha_0} \frac{\nu}{\nu_0} \frac{I}{R_0^2} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{8\alpha_0} \frac{\nu}{\nu_0} \frac{S}{R_0^2}$$

Перепишем уравнения (5.5) следующим образом, используя разложения типа (3.5):

$$\dot{\vartheta} = - \left(\frac{2}{k^2 + 1} + M \frac{I}{R_0^2} \right) \Omega + D \frac{\nu S}{R_0^2}$$

$$\dot{\gamma} = - L\nu I / R_0^2 - kM\Omega S / R_0^2 \tag{5.6}$$

$$M = M(k) = - \alpha_{11}\nu_0 / 4k\alpha_{00}, \; D = D(k) = (\alpha_{20} - \alpha_{10}) / 4k\alpha_{00}\nu_0$$

$$L = L(k) = (\alpha_{20} + \alpha_{10}) / 4\alpha_{00}\nu_0$$

При $k = 2$ получаем $M = 13/2400 \approx 0{,}0054$, $D = 597/3200 \approx 0{,}19$, $L = 267/1600 \approx 0{,}17$.

6. Анализ результатов. Примеры. Анализ уравнений (5.6) показывает, что, если ограничиться линейными по Ω членами, существуют следующие нелинейные динамические эффекты при вращении нерастяжимого кольца.

а). Зависимость частоты колебаний от их интенсивности. Из уравнений (5.6) видно, что при увеличении интенсивности колебаний их частота убывает.

б). Зависимость частоты колебаний от произведения ΩS. При $S \neq 0$ вращение в одну сторону увеличивает частоту колебаний, а при вращении в другую сторону частота колебаний убывает.

в). Зависимость масштабного коэффициента от интенсивности колебаний. При увеличении интенсивности колебаний масштабный коэффициент увеличивается по модулю. В частности, при $k = 2$

$$\dot{\vartheta} = -(2/5 + 0{,}0054 I/R_0^2)\Omega$$

В случае стоячей волны амплитуды A эта формула будет иметь следующий вид

$$\dot{\vartheta} = -(2/5 + 0{,}0054 A^2/R_0^2)\Omega$$

Этот частный случай ранее изучался в [6].

г). Основной нелинейный эффект заключается в том, что в общем случае ($S \neq 0$) волновая картина прецессирует относительно резонатора даже при отсутствии вращения основания со скоростью

$$\dot{\vartheta} = D\nu S/R_0^2; \quad \dot{\vartheta} = 0{,}19\nu S/R_0^2 \text{ при } k = 2 \tag{6.1}$$

При больших значениях амплитуды колебаний резонатора и недостаточно высоком качестве функционирования системы устранения эллиптичности величина этого дрейфа может достигать весьма больших значений, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 1. Пусть $R_0 = 30$ мм, $A = 6$ мкм, $f = 3$ кГц, $q/A = 10^{-3}$. Тогда скорость дрейфа равна примерно 0,6 град/час. Ситуация ухудшается тем, что в реальном приборе амплитуда квадратурной волны постоянно меняет величину и даже знак. Поэтому рассматриваемый дрейф также меняет величину и направление и не поддается поэтому калибровке.

Из рассмотренного примера видно, что даже при достаточно эффективной работе системы устранения эллиптичности нелинейный уход из-за остаточной квадратуры слишком велик. Возникает необходимость искать какие-то дополнительные меры для его уменьшения.

Одной из таких мер может быть взаимная компенсация исследованного здесь дрейфа, определяемого формулой (6.1), и дрейфа, обусловленного неравночастотностью резонатора

$$\dot{\vartheta} = -\frac{S\Delta\nu}{k(p^2 - q^2)}\cos 2k(\vartheta - \varphi_1) \tag{6.2}$$

где φ_1 — угол ориентации собственной оси наибольшей частоты, $\Delta\nu$ — половина разности собственных частот резонатора $\Delta\nu = (\nu_1 - \nu_2)/2$. Принимая во внимание то, что $q << p$, упростим формулу (6.2):

$$\dot{\vartheta} = -S\Delta\nu/(kI)\cos 2k(\vartheta - \varphi_1) \tag{6.3}$$

Для того, чтобы уходы, определяемые формулами (6.1), (6.3) взаимно скомпенсировали один другого, требуется, очевидно, выполнение следующего соотношения

$$\Delta\nu/(kI)\cos 2k(\vartheta - \varphi_1) - D(k)\nu/R_0^2 = 0$$

Пусть $\vartheta - \varphi_1 = 0$, тогда $\cos 2k(\vartheta - \varphi_1) = \pm 1$. Это означает, что оси меньшей собственной частоты отвернуты от осей волновой картины на углы $\pm\pi/2k$ (в случае $k = 2$, на углы $\pm\pi/4$). А оси волновой картины совпадают с собственными осями большей собственной частоты.

Для того чтобы обеспечить выполнение этого требования, необходимо к резонатору приложить силы «отрицательной упругости» со стороны окружающей его шестнадцатиэлектродной системы электростатической коррекции. Эта сила как функция окружного угла должна иметь вид четвертой гармоники (в общем случае гармоники с номером $2k$). Центры силовых воздействий должны приходиться на точки узлов основной волны. А амплитуда сил определяется при калибровке, так, чтобы обеспечить расщепление частот величиной

$$\Delta\nu = kD\,(k)\nu A^2/R_0^2 \qquad (6.4)$$

Дадим оценку этого расщепления при тех же значениях параметров, что и в примере 1.

Пример 2. Пусть $k=2$, $D=0{,}19$, $R_0=30$ мм, $A=6$ мкм, $f=3$ кГц. Тогда расчет по формуле (6.4) дает значение $\Delta f \approx 0{,}9 \cdot 10^{-4}$ Гц.

Суммарная сила, создаваемая электростатической системой коррекции, должна иметь три составляющие. Первая обеспечивает тонкую балансировку резонатора. Ее параметры определяются при калибровке. Вторая создает калиброванное расщепление частоты, определяемое формулой (6.4). Эпюра этой силы поворачивается вместе с поворотом волновой картины. Третья составляющая определяется обратной связью так, чтобы устранить эллиптичность волновой картины.

Этот эффект имеет достаточно простое физическое объяснение. Представим волновую картину в виде суммы двух бегущих в противоположные стороны волн. При учете нелинейностей (любой природы, а не только геометрических) скорости распространения этих волн будут, вообще говоря, зависеть от их амплитуд. Если волновая картина является стоячей волной, то амплитуды бегущих в противоположные направления волн равны одна другой. Равны будут и поправки к их скоростям, вызванные нелинейностями. Поэтому суммарная волновая картина будет оставаться неподвижной. Если же колебания резонатора не являются стоячей волной, то амплитуды бегущих в противоположные стороны волн будут не равны между собой. Не равны будут поэтому и нелинейные поправки к их скоростям распространения. Эта разность и приводит к прецессии общей волновой картины.

В заключение отметим, что при учете членов порядка Ω^2 проявятся и другие нелинейные эффекты. Так, например, из уравнения (5.5) для ϑ видно, что масштабный коэффициент в этом случае приобретет поправку порядка $\Omega S/\nu R_0^2$. Другими словами, если волновая картина не является стоячей волной, то она будет иметь различную чувствительность к вращению основания в ту или иную сторону. Однако этот и другие подобные эффекты достаточно малы и их более подробное рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
2. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: 1957. 432 с.
3. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.
4. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
5. *Glynn C. C.* On the Resonant Nonlinear Traveling Waves in a Thin Rotating Ring//Int. J. Non-linear Mech. Vol. 17, No. 5/6, pp. 327—340, 1982.
6. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.II.1993