

УДК.531.383

© 1993 г. С. Ж. КАРИПБАЕВ, Б. Е. ЛАНДАУ,  
Ю. Г. МАРТЫНЕНКО, В. В. ПОДАЛКО

### ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Задача о влиянии температуры окружающей среды на угловую скорость гироскопа рассмотрена в [1] в предположении о равенстве средней объемной и средней поверхностной температур ротора. В данной работе найдено решение нестационарного уравнения теплопроводности, описывающее температурное поле внутри шарового ротора гироскопа. Определены деформации ротора, возникающие при его неравномерном нагреве. Показано, что периодически изменяющаяся со временем температура окружающей среды, вызывает флуктуации угловой скорости гироскопа.

1. Распределение температуры в роторе гироскопа. Рассмотрим шаровой ротор электростатического гироскопа, вращающийся внутри вакуумированной сферической полости. Предположим, что нестационарное температурное поле внутри ротора является центральносимметричным, т. е. его изотермические поверхности концентричны поверхностям ротора. В этом случае температура  $T^*(r, t)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\tau_0 \partial T^* / \partial r = \nabla^2 T^*, \quad \tau_0 = c\rho R^2 / \kappa, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (2/r) \partial / \partial r \quad (1.1)$$

где  $\kappa$ ,  $c$ ,  $\rho$  — теплопроводность, теплоемкость и плотность материала ротора,  $R$  — радиус шара.  $r$  — безразмерная радиальная переменная, отнесенная к радиусу шара.

Пусть сброс тепла ротора происходит с его поверхности путем лучистого теплообмена по закону Стефана — Больцмана<sup>1</sup>. Тогда краевое условие на поверхности ротора можно записать в виде

$$\frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\sigma R}{\kappa} [T_e^{*4} - T^{*4} \Big|_{r=1}] \quad (1.2)$$

где  $\sigma = s\sigma_0$  — коэффициент лучеиспускания,  $s$  — степень черноты поверхности шара,  $\sigma_0$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $T_e^*$  — равновесная температура полости (температура среды).

Сформулированная задача нелинейна в виду граничного условия (1.2). Для случая малой разности температур  $|T_e^* - T^*| \ll T_e^*$  — задача линеаризуется. Полагая  $T_e^{*4} - T^{*4} = 4(T_e^* - T^*) T_e^{*3}$  получим вместо (1.2) граничное условие третьего рода

$$[\partial T^* / \partial r + \varepsilon T^*]_{r=1} = \varepsilon T_e^*, \quad \varepsilon = 4\sigma \hat{T}^{*3} / \kappa \quad (1.3)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр для реальных роторов,  $\hat{T}^*$  — среднее значение температуры среды.

<sup>1</sup> В реальном приборе степень вакуумирования полости, в которой левитирует ротор, имеет порядок  $10^{-8}$  мм рт. ст., поэтому теплопроводностью остаточного газа можно пренебречь.

Температура окружающей среды в правой части (1.3) является известной функцией времени и задается формулой

$$T_e^* = T_0 + F(t), \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) \quad (1.4)$$

Пусть температура внутри ротора гироскопа в начальный момент времени постоянна

$$T^*|_{t=0} = T_0 \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.1) с граничным (1.3) и начальным (1.5) условиями, ищем в форме  $T^* = T_0 + T$ , где функция  $T$  удовлетворяет уравнению (1.1), а так же начальному и граничному условиям

$$T|_{t=0} = 0, \quad [\partial T / \partial r + \varepsilon T]_{r=1} = \varepsilon F(t) \quad (1.6)$$

В свою очередь функцию  $T$  будем искать в виде суммы

$$T = T^{(2)} + T^{(0)} \quad (1.7)$$

Здесь  $T^{(2)}$  — произвольное решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее граничному условию (1.6), а  $T^{(0)}$  — решение уравнения теплопроводности при следующих начальном и краевом условиях

$$T^{(0)}|_{t=0} = -T^{(2)}|_{t=0} \quad (1.8)$$

$$[\partial T^{(0)} / \partial r + \varepsilon T^{(0)}]_{r=1} = 0 \quad (1.9)$$

Частное решение  $T^{(2)}$  уравнения (1.1), удовлетворяющее граничному условию (1.6), найдем как периодическую функцию времени

$$T^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r) \exp(i\omega_n t)$$

Подставляя это выражение в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции  $U_n(r)$ :

$$\frac{d^2 U_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU_n}{dr} + k_n^2 U_n = 0, \quad k_n^2 = -\tau_0 \omega_n^2 \quad (1.10)$$

Решения уравнения (1.10), принимающие конечное значение при  $r = 0$ , имеют вид

$$U_n(r) = C_n v(k_n r), \quad v(z) = \sin(z)/z,$$

где  $C_n$  — произвольная постоянная интегрирования.

Подставляя функцию  $U_n(r)$  в (1.6), находим постоянные интегрирования  $C_n$  в решении  $T^{(2)}$ :

$$T^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v(k_n r) \exp(i\omega_n t), \quad C_n = A_n \frac{\varepsilon k_n}{(\varepsilon - 1) \sin k_n + k_n \cos k_n} \quad (1.11)$$

Решение  $T^{(0)}$ , удовлетворяющее уравнению (1.1) и краевому условию (1.9), полученное методом разделения переменных, можно представить следующим образом

$$T^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m v(\mu_m r) \exp\left(-\mu_m^2 \frac{t}{\tau_0}\right) \quad (1.12)$$

Здесь собственные числа  $\mu_m$  являются корнями трансцендентного уравнения  $(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \mu = \mu$ , которое следует из соотношения (1.9). Корни этого уравнения

можно разбить на две группы. Первая группа состоит из одного корня  $\mu_1$ , который является малым в силу малости параметра  $\varepsilon$ . Для него можно получить простую асимптотическую формулу, если воспользоваться разложением функции  $\operatorname{tg} \mu$  в окрестности точки  $\mu = 0$  в ряд Тейлора. В результате для главного члена асимптотического разложения корня  $\mu_1$  в ряд по малому параметру получим  $\mu_1 = (3\varepsilon)^{1/2}$ . Для остальных корней  $\mu_m$  можно также получить приближенную асимптотическую формулу  $\mu_m = -\pi/2 + m\pi$  ( $m = 2, 3, \dots$ ).

Первым корнем  $\mu_1$  определяется постоянная времени

$$\tau_1 = \tau_0 / \mu_1^2 \quad (1.13)$$

теплообмена ротора электростатического гироскопа с окружающей средой. Остальные корни  $\mu_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) дают слагаемые, входящие в (1.12), которые быстро затухают с течением времени.

Потребуем выполнения начального условия (1.8). Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.8), получаем уравнение

$$-\sum_{n=1}^{\infty} C_n v(k_n r) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m v(\mu_m r) \quad (1.14)$$

в которое входят неизвестные коэффициенты  $E_m$ .

Функции  $v(\mu_m r)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) образуют на отрезке  $[0, 1]$  полную и ортогональную систему функций, условие ортогональности для которых может быть представлено формулой

$$\int_0^1 v(\mu_i r) v(\mu_j r) r^2 dr = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ [1 - v(2\mu_i)] / 2\mu_i^2 & (i = j) \end{cases} \quad (1.15)$$

Воспользовавшись условием (1.15), разложим левую часть уравнения (1.14) в ряд по функциям  $v(\mu_m r)$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых координатных функциях, получим для неизвестных коэффициентов  $E_m$  соотношения

$$E_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots) \\ E_{mn} = -\mu_m [v(k_n - \mu_m) - v(k_n + \mu_m)] / (k_n [1 - v(2\mu_m)]) \quad (1.16)$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.7), найдем окончательное выражение для функции  $T$ , характеризующей распределение температуры в роторе

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[ v(k_n r) \exp(i\omega_n t) + \sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} v(\mu_m r) \exp\left(-\mu_m^2 \frac{t}{\tau_0}\right) \right] \quad (1.17)$$

При выводе выражения (1.17) была учтена формула (1.16).

2. Определение деформаций ротора, вызванных неравномерностью его нагрева. При нахождении деформации ротора наибольший интерес представляет вариант медленного изменения температуры во времени. В этом случае можно пренебречь инерционными членами в уравнениях Ляме и трактовать задачу как квазистатическую. Учитывая сферическую симметрию задачи, имеем одно дифференциальное уравнение для определения радиального перемещения  $u_r$ , вызванного наличием температурного поля

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r = \gamma R \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.1)$$

с граничным условием

$$\sigma_r |_{r=1} = 0, \quad \gamma = \alpha_r (2G + 3\lambda) / (\lambda + 2G) \quad (2.2)$$

где  $\sigma_r$  — радиальное напряжение,  $G, \lambda$  — параметры Ляме материала шара,  $\alpha_r$  — коэффициент линейного температурного расширения материала ротора.

Как известно ([2, с. 527]), решение уравнения (2.1) с граничным условием (2.2) имеет вид

$$u_r(r, t) = \frac{\gamma R}{r^2} \left[ \int_0^r T(r, t) r^2 dr + \frac{4G}{3\lambda + 2G} r^3 \int_0^1 T(r, t) r^2 dr \right] \quad (2.3)$$

Подставляя (1.17) в (2.3) и полагая  $r = 1$ , получим перемещения точек поверхности ротора

$$u(t) = u_r(r, t) |_{r=1} = 3\alpha_r R \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \frac{1}{k_n^2} [v(k_n) - \cos k_n] \exp(i\omega_n t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{nm}}{\mu_m^2} [v(\mu_m) - \cos \mu_m] \exp\left(-\mu_m^2 \frac{t}{\tau_0}\right) \right\} \quad (2.4)$$

Из формул (2.3), (2.4) вытекает интересный результат, что перемещения точек поверхности ротора не зависят от упругих характеристик ( $\lambda, G$ ) материала.

Оценим числовой порядок величины  $\tau_0$ , входящей в выражение  $k_n$ , определяемое формулой (1.10). Рассмотрим шаровой бериллиевый ротор радиуса  $R = 5 \cdot 10^{-3}$  м. Температуру окружающей среды возьмем  $296^\circ \text{K}$  ( $23^\circ \text{C}$ ) и примем для бериллия теплопроводность  $\kappa = 1,45 \cdot 10^2$  Вт/(мК), теплоемкость  $c = 1,9 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), плотность  $\rho = 1,84 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, постоянная Стефана — Больцмана  $\sigma_0 = 5,7 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>). Имеем

$$\tau_0 = 0,625 \text{ с} \quad (2.5)$$

Для реальных конструкций период изменения температуры среды  $2\pi/\omega_n$  измеряется минутами или часами. Поэтому коэффициент  $k_n$ , как следует из (1.10) и (2.5), является малым параметром

$$|k_n| \ll 1 \quad (2.6)$$

Условие (2.6) позволяет получить простые асимптотические формулы для коэффициентов, входящих в (1.17):

$$C_n = A_n 3\epsilon / (3\epsilon - k_n^2) \quad (2.7)$$

Основной вклад в функцию  $u(t)$  вносит слагаемое с  $m = 1$ , так как остальные слагаемые ( $m = 2, 3, \dots$ ) быстро убывают с течением времени и через небольшой промежуток времени оказываются малыми. Поэтому приведем асимптотически упрощенную формулу для (2.3) в случае, когда  $m = 1$ . Принимая во внимание (1.16) и используя малость параметров  $k_n$  и  $\mu_1$ , найдем асимптотическое разложение для коэффициентов  $E_{1n}$  и функций  $v(k_n r)$ ,  $v(\mu_1 r)$ , входящих в (1.17):

$$E_{1n} = -1, \quad v(k_n r) = v(\mu_1 r) = 1 \quad (2.8)$$

Учитывая (1.10), (1.13), (1.17) и подставляя (2.7), (2.8) в (2.3), получим окончательную формулу для перемещений точек ротора

$$u_r(r, t) = \tau u(t) \quad (2.9)$$

$$u(t) = \alpha_r R \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1 - i\omega_n \tau_1}{1 + \omega_n^2 \tau_1^2} \left[ \exp(i\omega_n t) - \exp\left(-\mu_m^2 \frac{t}{\tau_1}\right) \right]$$

Функция  $u(t)$  дает асимптотическое представление для перемещений (2.4)

точек поверхности ротора. Таким образом, из (2.9) следует, что при наличии малых параметров  $k_n$  и  $\mu_1$  перемещения  $u, (r, t)$  с точностью до величин второго порядка малости оказывается линейной функцией радиуса  $r$ .

Принимая во внимание (1.4), непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что выражение для перемещений точек поверхности ротора  $u(t)$  может быть записано в виде

$$u(t) = \int_0^t N(t - \xi) F(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

$$N(t) = \alpha_r R \exp [(-t/\tau_r)]/\tau_r$$

где функция веса является оригиналом изображения по Лапласу передаточной функции вида

$$\alpha_r R / (1 + \tau_r p) \quad (2.11)$$

Таким образом, оказалось, что перемещения точек поверхности ротора могут быть вычислены как результат прохождения температуры окружающей среды (1.4) через линейное апериодическое (инерционное) звено первого порядка с постоянной времени  $\tau_r$  и передаточной функцией (2.11).

Оценим числовой порядок постоянной времени  $\tau_r$  (1.13) для ротора, физические и геометрические характеристики которого были приведены выше. Если взять степень черноты поверхности ротора  $s = 0,1$ , то постоянная времени  $\tau_r$  оказывается равной 2,58 часа. При  $s = 0,5$  постоянная времени составит 0,45 часа.

**3. Уравнения вращения ротора с переменным моментом инерции.** При вращении ротора электростатического гироскопа в вакууме основным фактором, определяющим стабильность его угловой скорости, является радиальный дебаланс ротора. Взаимодействие поступательных и вращательных движений несбалансированного ротора в электростатическом подвесе может приводить как к торможению, так и к разгону ротора, т. е. электростатический подвес выполняет роль своеобразного двигателя, регулирующего угловую скорость вращения гироскопа [3].

Дифференциальное уравнение вращательного движения ротора электростатического гироскопа имеет вид ([3, с. 145]):

$$dH/dt = -\rho_0^2 \text{Im } W(i\Omega) \quad (3.1)$$

Здесь  $H$  — кинетический момент ротора,  $\rho_0$  — радиальный дебаланс ротора,  $W(i\Omega)$  — передаточная функция следящей системы подвеса, которая является дробно-радиационной функцией угловой скорости вращения ротора  $\Omega$ .

Линеаризуя уравнение (3.1) вблизи стационарной угловой скорости  $\Omega_0$ , получим

$$dH/dt = -k_0 (\Omega - \Omega_0) \quad (3.2)$$

где  $k_0$  — постоянный коэффициент, пропорциональный производной по  $\Omega$  от мнимой части передаточной функции и квадрату радиального дебаланса ротора, зависимостью которого от температуры в данной работе будем пренебрегать.

Угловая скорость вращения ротора пропорциональна его кинетическому моменту

$$\Omega = H/J(t) \quad (3.3)$$

где  $J(t)$  — момент инерции ротора, который при изменении температуры будет явной функцией времени. Согласно (2.9) при малых  $k_n$  и  $\mu_1$  ротор является

<sup>2</sup> Стационарной угловой скоростью электростатического гироскопа называется положительное значение  $\Omega$ , при котором правая часть уравнения (3.1) обращается в нуль.

однородным шаром переменного радиуса, поэтому функцию  $J(t)$  найдем по формуле момента инерции однородного шара массы  $m$  и радиуса  $R + u(t)$ :

$$J(t) = 2/5 m [R + u(t)]^2 \approx 2/5 m [R^2 + 2Ru(t)] \quad (3.4)$$

Принимая во внимание (3.4), перепишем уравнение (3.2) в форме

$$\tau_2 dH/dt = -f(t)H + H_0, \quad f(t) = 1 - 2u(t)/R, \quad \tau_2 = 2/5 m R^2 / k_0 \quad (3.5)$$

где  $\tau_2$  — постоянная времени эквивалентного двигателя, заменяющего подвес,  $H_0$  — стационарное значение кинетического момента гироскопа. Решение уравнения (3.5) имеет вид

$$H(t) = H(0) \exp \left[ - \int_0^t f(\tau) d\tau / \tau_2 \right] + H_0 \int_0^t \exp \left[ - \int_0^\xi f(\xi) d\xi / \tau_2 \right] d\xi \quad (3.6)$$

Одно из возможных упрощений формулы (3.6) связано с допущением о том, что в начальный момент времени значение кинетического момента ротора совпадает с его стационарным значением  $H(0) = H_0$ . Кроме того, пользуясь малостью деформаций ротора при изменении температуры, разложим подынтегральное выражение в (3.6) в ряды по малому параметру  $2u(t)/R$  и удержим в этих рядах только линейные члены. Тогда для кинетического момента гироскопа получится приближенная формула

$$H(t) = H_0 + 2H_0 \int_0^t \exp [(\xi - t)/\tau_2] u(\xi)/R/\tau_2 d\xi \quad (3.7)$$

Разделив выражение для вектора кинетического момента на переменный момент инерции ротора (3.4), получим окончательное выражение для угловой скорости ротора электростатического гироскопа

$$\Omega(t) = \Omega_0 \left[ 1 + \int_0^t N_1(t - \xi) F(\xi) d\xi \right] \quad (3.8)$$

$$N_1(t) = \frac{2\alpha_r}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \frac{\tau_2}{\tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right] \quad (3.9)$$

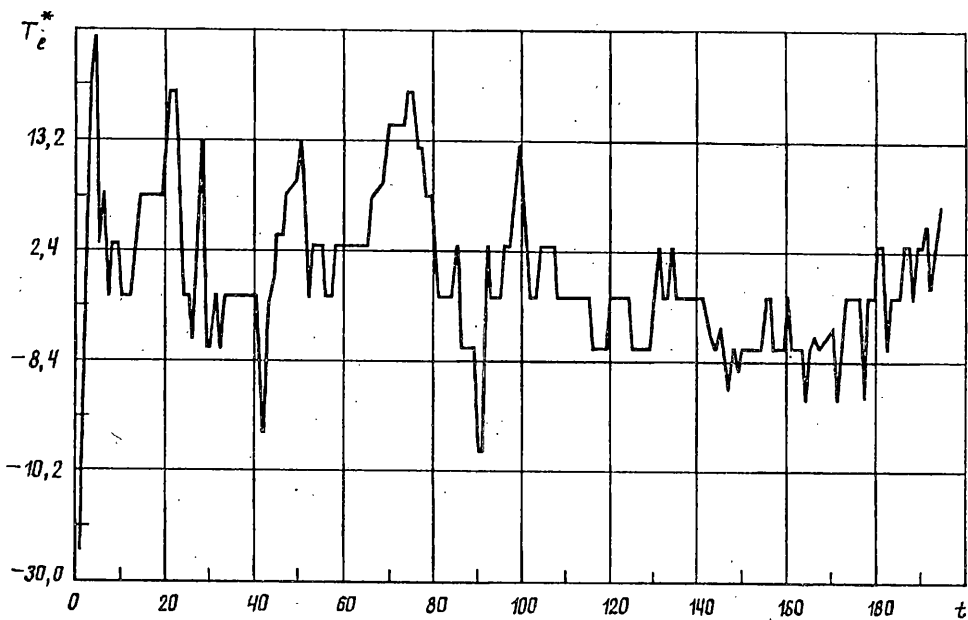
Заметим, что найденное выражение для функции веса  $N_1(t)$  не содержит особенности при  $\tau_2 = \tau_1$ . При указанном значении постоянной времени «электростатического двигателя» выражение  $[(\tau_2/\tau_1) \exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)]/(\tau_1 - \tau_2)$  следует заменить на ограниченное при всех моментах времени  $t$  выражение  $-(t - \tau_1) \exp(-t/\tau_1)/\tau_1^2$ .

Формулы (3.8), (3.9) дают решение поставленной задачи о зависимости угловой скорости гироскопа от температуры окружающей среды.

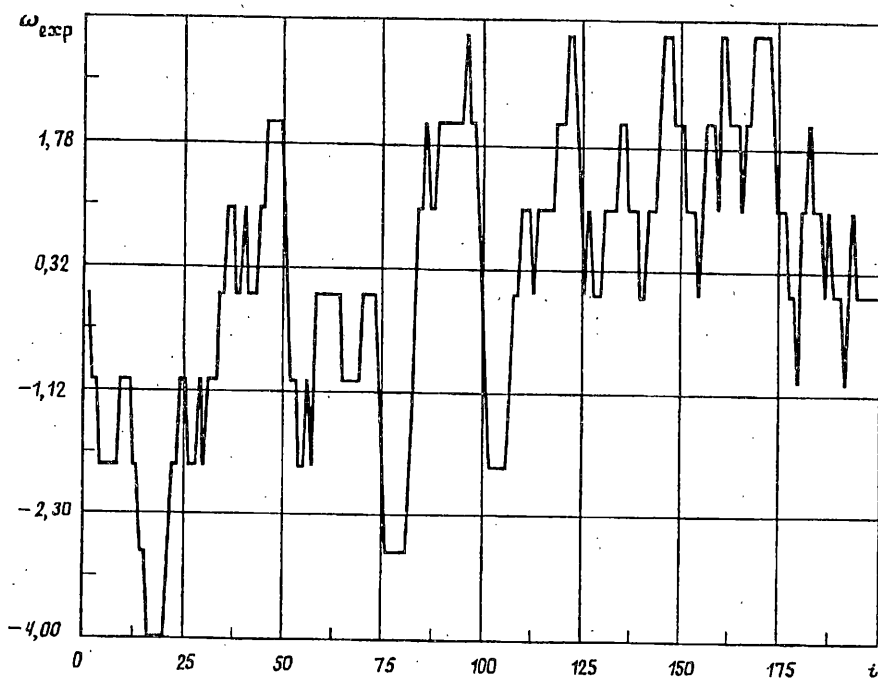
4. Числовые оценки. При работе реального электростатического гироскопа были проведены замеры угловой скорости вращения ротора и температуры кожуха ротора, которую можно принять в качестве температуры окружающей среды. Измерение проводилось в течение 194 часов с интервалом  $\Delta t = 1$  час. Отклонение температуры окружающей среды от среднего значения в  $23^\circ \text{C}$  не превышало  $2,5^\circ$ , а отклонение угловой скорости вращения ротора находилось в пределах  $0,3$  об/с. от номинального значения  $3000$  об/с. Зависимости температуры и угловой скорости ротора от времени приведены на фиг. 1 и на фиг. 2. Теоретические расчеты угловой скорости как функции температуры окружающей среды проводились по рекуррентным формулам

$$\omega(n) = 2\Omega_0 \alpha_r \tau_2 / (\tau_1 - \tau_2) [\omega_1(n) - \omega_2(n)] \quad (4.1)$$

$$\omega_i(n) = F(n) + [\omega_i(n-1) - F(n)] \exp(-\Delta t/\tau_i), \quad \omega_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

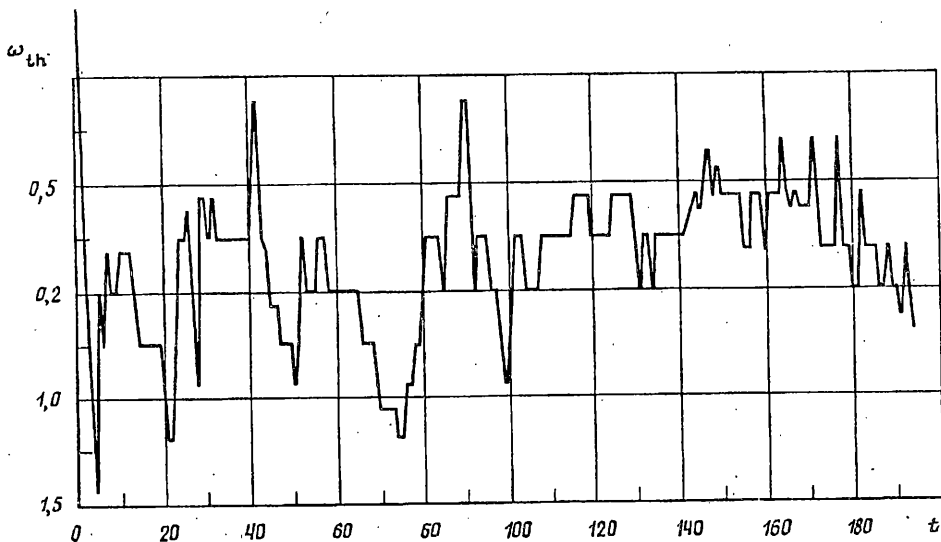


Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $\omega(n) = \Omega(t) - \Omega_0$  при  $t = n\Delta t$ , т. е.  $\omega(n)$  — суть значение флуктуации угловой скорости на  $n$ -ом шаге измерения ( $n = 1, 2, \dots, 194$ ),  $F(n)$  — флуктуация температуры окружающей среды. При выводе формул (4.1) функция  $F(\xi)$  в (3.8) на интервале времени  $\Delta t$  принималась постоянной. На фиг. 3 приведена зависимость изменения угловой скорости вращения ротора, полученная по формулам (4.1) при  $\tau_1 = 0,45$  и  $\tau_2 = 5,4$  часа.



Фиг. 3

Из сравнения кривых, приведенных на фиг. 2 и фиг. 3 видно, что амплитудные значения изменения угловой скорости вращения ротора, полученные теоретическим путем, меньше, чем экспериментальные, — примерно в два раза. Из этого можно сделать вывод, что кроме рассмотренного выше механизма, обусловленного температурными деформациями ротора, на стабильность угловой скорости влияют и другие факторы. Так например, при изменении температуры среды может происходить изменение номинальных значений элементов (емкостей, резисторов и так далее) следящей системы подвеса, что приводит к изменению стационарной угловой скорости  $\Omega_0$  вращения ротора в (3.2).

Результаты расчетов, выполненных с помощью рекуррентной формулы (4.1), показывают, что при уменьшении постоянной времени  $\tau_2$  эквивалентного «двигателя» флуктуации угловой скорости уменьшаются. Для постоянной времени  $\tau_1$ , определяющей скорость теплообмена ротора с окружающей средой, оказалось, что ее уменьшение приводит к увеличению флуктуаций угловой скорости, т. е. уменьшение степени черноты поверхности увеличивает стабильность угловой скорости гироскопа. Максимальное значение флуктуации угловой скорости можно найти предельным переходом при  $\tau_2 \rightarrow \infty$  и  $\tau_1 \rightarrow 0$ , что совпадает с оценками, получаемыми из теоремы о сохранении момента количества движения ротора гироскопа, температура которого равна температуре окружающей среды.

Авторы благодарят А. И. Кобрину за полезные обсуждения результатов работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nekrasov Y. A., Romanenko S. G., Ryabova L. P., Semakov A. B. Measurement of non-contact suspended rotor temperature//The second sov.— chin. symp. of inert. techn. S. Petersburg. Oct. 9—15, 1991. P. 96—99.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.