МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.383

© 1993 г. С. А. АГАФОНОВ

ОБ АВТОКОЛЕБАНИИ ГИРОВЕРТИКАЛИ С РАДИАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИЕЙ

В задаче о движении гировертикали изучается возникновение автоколебательного режима при переходе через границу области устойчивости. Доказывается устойчивость этого режима, а также приближенно находятся амплитуда и период автоколебания.

1. Возникновение автоколебательного режима. Уравнения движения гировертикали с радиальной коррекцией (описание прибора приведено, например, в [1]) имеют вид

$$J\ddot{\alpha}\cos^2\beta - J\sin 2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + H\cos\beta\dot{\beta} + b\dot{\alpha} + \mu\beta = 0$$

$$J\ddot{\beta} + J\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - H\cos\beta\dot{\alpha} + b\dot{\beta} - \mu\alpha = 0 \tag{1.1}$$

Здесь α, β — углы поворота соответственно внешнего и внутреннего колец карданова подвеса, J — экваториальный момент инерции гироскопа, H — постоянная циклического интеграла, b — коэффициент сил сопротивления в осях подвеса колец, $-\mu\beta$ и $\mu\alpha$ — величины моментов, которые подаются соответственно на оси внешнего и внутреннего колец карданова подвеса.

Уравнения движения (1.1) допускают решение

$$\alpha = \beta = 0, \ \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0 \tag{1.2}$$

при котором кинетический момент гироскопа ортогонален плоскости внешнего карданова кольца, а само кольцо лежит в плоскости горизонта. Уравнения движения (1.1) приведем к безразмерному виду с помощью подстановки $\tau = HJ^{-1}t$. Разрешая относительно вторых производных, уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$\alpha'' + \beta' + n\alpha' + e\beta - 2\beta\alpha'\beta' + \frac{1}{2}\beta^2\beta' + n\beta^2\alpha' + e\beta^3 + \ldots = 0$$

$$\beta'' - \alpha' + n\beta' - e\alpha + \beta\alpha'^2 + \frac{1}{2}\beta^2\alpha' + \ldots = 0 \tag{1.3}$$

$$n = bH^{-1}, \ e = \mu JH^{-2}$$

Здесь штрих обозначает производную по τ, а многоточие совокупность членов не ниже пятого порядка. Характеристическое уравнение системы (1.3):

$$\lambda^4 + 2n\lambda^3 + (n^2+1)\lambda^2 + 2e\lambda + e^2 = 0 \tag{1.4}$$

имеет при выполнении неравенства $n > e$ ($b > \mu JH^{-1}$) все корни с отрицательными действительными частями и, следовательно, решение (1.2) асимптотически устойчиво [1], а при $n < e$ неустойчиво. Когда $n = e$ характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ и два равных отрицательных корня $\lambda_3 = \lambda_4 = -e$. Таким образом, при переходе через критическое значение величины силы сопротивления ($b = \mu JH^{-1}$) может возникнуть автоколебательный режим гировертикали. Для этого достаточно чтобы два корня уравнения (1.4) пересекали мнимую ось с ненулевой скоростью и решение (1.2) при $n = e$ было либо асимптотически устойчивым или неустойчивым. В первом случае автоколебательный режим возникает при $n < e$ и является асимптотически устойчивым, а во втором при $n > e$ и будет неустойчивым.

Рассмотрим поведение корней характеристического уравнения в окрестности $n = e$. Пусть $\lambda_{1,2} = -\gamma(n) \pm i\delta(n)$, $\lambda_3 = -\gamma_1(n)$, $\lambda_4 = -\gamma_2(n)$(предполагается, что при $n > e$ корни λ_3 и λ_4 действительны). Из системы алгебраических уравнений

$$2\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 2n$$

$$\gamma^2 + \delta^2 + 2\gamma\gamma_1 + 2\gamma\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 = n^2 + 1$$

$$(\gamma^2 + \delta^2)(\gamma_1 + \gamma_2) + 2\gamma\gamma_1\gamma_2 = 2e$$

$$(\gamma^2 + \delta^2)\gamma_1\gamma_2 = e^2$$

можно найти $d\gamma/dn$ при $n = e$. Вычисления приводят к значению $d\gamma/dn\,|_{n=e} = 1/(1 + e^2)$. Следовательно, два корня пересекают мнимую ось с положительной скоростью. Аналогично можно рассмотреть случай, когда $\lambda_{3,4}$ при $n > e$ комплексно сопряжены.

Исследуем теперь устойчивость решения (1.2) при $n = e$. Вместо переменных α', β' введем комплексно сопряженные переменные ξ, η $(\eta = \bar{\xi})$ по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= (e - e^2 i)\alpha + (1 - ie)\alpha' + (e^2 + ie)\beta + (e + i)\beta' \\ \eta &= (e + e^2 i)\alpha + (1 + ie)\alpha' + (e^2 - ie)\beta + (e - i)\beta' \end{aligned} \tag{1.5}$$

Тогда система уравнений (1.3) при $n = e$ примет вид

$$\begin{aligned} \xi' &= i\xi + \frac{3e - 3i}{4(e^2 + 1)}\beta\xi^2 + 2ie\alpha\beta\xi + \frac{3e - e^3 - i(3e^2 - 1)}{4(e^2 + 1)^2}\beta\eta^2 + \\ &+ \frac{7e^2 + ie(1 - 6e^2)}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}(e - ie^2)\beta^3 - \frac{3}{2}e\beta^2\xi - \frac{5e - 3e^3 + i(1 - 7e^2)}{2(e^2 + 1)}\beta^2\eta - \\ &- e^2(e + i)\beta\alpha^2 - \frac{e + i}{2(e^2 + 1)}\beta\xi\eta + \ldots \\ \alpha' &= \frac{1 + ie}{2(e^2 + 1)}\xi + \frac{1 - ie}{2(e^2 + 1)}\eta - e\alpha \\ \beta' &= \frac{e - i}{2(e^2 + 1)}\xi + \frac{e + i}{2(e^2 + 1)}\eta - e\beta \end{aligned} \tag{1.6}$$

Уравнение для сопряженной переменной η здесь и далее не приводится. Критические переменные ξ, η линейно входят в уравнения для некритических переменных α, β. Поэтому вместо переменных α, β в первые два уравнения системы (1.6) подставляются выражения

$$\begin{aligned} v_1 &= m_1\xi + \bar{m}_1\eta, \quad v_2 = m_2\xi + \bar{m}_2\eta \\ m_1 &= \frac{2e + i(e^2 - 1)}{2(e^2 + 1)^2}, \quad m_2 = \frac{e^2 - 1 - 2ie}{2(e^2 + 1)^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функции v_1, v_2 удовлетворяют системе уравнений в частных производных [2]. После подстановки (1.7), уравнение для переменной ξ примет вид

$$\xi' = i\xi + F(\xi, \eta) \tag{1.8}$$

где $F(\xi, \eta)$ — совокупность членов не ниже третьего порядка относительно ξ, η.

С помощью полиномиального преобразования $\xi = u + Q_3(u, v)$, $\eta = v + R_3(u, v)$, где Q_3, R_3 — однородные формы третьего порядка, уравнение (1.8) можно преобразовать к виду

$$u' = iu + Bu^2v + \ldots, \quad v = \bar{u}$$

Коэффициент B равен соответствующему значению коэффициента при $\xi^2\eta$ в уравнении (1.8). Вычисления приводят к значению $\operatorname{Re} B = -\frac{1}{2}e/(e^2+1)^3$. Таким образом, $\operatorname{Re} B$ при любом $e > 0$ отрицательна и, следовательно, решение (1.2) при $n = e$ асимптотически устойчиво. Автоколебательный режим возникает при $n < e$ и является асимптотически устойчивым [3].

2. Построение автоколебательного режима. Пусть $e = n + \varepsilon$, где ε достаточно малое положительное число. Тогда система уравнений (1.3) с помощью замены переменных (1.5) приводится к виду

$$\xi' = i\xi + \varepsilon\frac{1+ie}{e^2+1}\xi + \frac{3e-3i}{4(e^2+1)}\beta\xi^2 + 2ie\alpha\beta\xi + \frac{3e - e^3 - i(3e^2-1)}{4(e^2+1)^2}\beta\eta^2 +$$

$$+\frac{7e^2 - 2e\varepsilon + ie(1 - 6e^2 + e\varepsilon)}{2}\alpha\beta^2 - \frac{e - ie^2}{2}\beta^3 - \frac{3e-\varepsilon}{2}\beta^2\xi -$$

$$-\frac{5e - 3e^3 + \varepsilon(e^2-1) + i(1 - 7e^2 + 2e\varepsilon)}{2(e^2+1)}\beta^2\eta - e^2(e+i)\beta\alpha^2 - \frac{e+i}{2(e^2+1)}\beta\xi\eta + \ldots$$

$$\alpha' = \frac{1+ie}{2(e^2+1)}\xi + \frac{1-ie}{2(e^2+1)}\eta - e\alpha \tag{2.1}$$

$$\beta' = \frac{e-i}{2(e^2+1)}\xi + \frac{e+i}{2(e^2+1)}\eta - e\beta$$

Подставляя в уравнения (2.1) для переменных ξ, η вместо α, β выражения (1.7), получим

$$\xi' = i\xi + \varepsilon\frac{1+ie}{e^2+1}\xi + A\xi^3 + B\xi^2\eta + C\xi\eta^2 + D\eta^3 + \ldots \tag{2.2}$$

где коэффициенты A, B, C, D зависят от e и ε. В дальнейшем понадобятся их значения только при $\varepsilon = 0$, которые равны

$$A = a_1 + ia_2 = \frac{e(-3e^4 + 30e^2 - 15)}{8(e^2+1)^5} + i\frac{15e^4 - 30e^2 + 3}{8(e^2+1)^5}$$

$$B = b_1 + ib_2 = -\frac{e}{2(e^2+1)^3} + i\frac{1}{2(e^2+1)^3}$$

$$\tag{2.3}$$

$$C = c_1 + ic_2 = \frac{e^3 - 3e}{8(e^2+1)^4} + i\frac{3e^2-1}{8(e^2+1)^4}$$

$$D = d_1 + id_2 = \frac{e^7 - 21e^5 + 35e^3 - 7e}{4(e^2+1)^6} + i\frac{7e^6 - 35e^4 + 21e^2 - 1}{4(e^2+1)^6}$$

В (2.2) сделаем замену переменных по формулам $\xi = r \exp(i\varphi)$, $\eta = \bar{\xi}$. Получим

$$r' = \frac{\varepsilon}{e^2+1} r + b_1 r^3 + [(a_1 + c_1)\cos 2\varphi + (c_2 - a_2)\sin 2\varphi + d_1 \cos 4\varphi + d_2 \sin 4\varphi]\, r^3 + \ldots \tag{2.4}$$

$$\varphi' = 1 + \frac{\varepsilon e}{e^2+1} + b_2 r^2 + [(a_2 + c_2)\cos 2\varphi + (a_1 - c_1)\sin 2\varphi + d_2 \cos 4\varphi - d_1 \sin 4\varphi]\, r^2 + \ldots$$

Разделив первое уравнение системы (2.4) на второе, будем иметь

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{1 + e^2 + \varepsilon e} r + \Big\{b_1\mu_0^{-1} - \frac{\varepsilon b_2}{\mu_0^2(e^2+1)} + \Big[(a_1 + c_1)\mu_0^{-1} - \frac{\varepsilon(a_2+c_2)}{\mu_0^2(e^2+1)}\Big]\cos 2\varphi +$$

$$+ \Big[(c_2 - a_2)\mu_0^{-1} - \frac{\varepsilon(a_1 - c_1)}{\mu_0^2(e^2+1)}\Big]\sin 2\varphi + \Big[d_1\mu_0^{-1} - \frac{\varepsilon d_2}{\mu_0^2(e^2+1)}\Big]\cos 4\varphi + \tag{2.5}$$

$$+ \Big[d_2\mu_0^{-1} + \frac{\varepsilon d_1}{\mu_0^2(e^2+1)}\Big]\sin 4\varphi\Big\}\, r^3 + \ldots, \quad \mu_0 = 1 + \frac{\varepsilon e}{e^2+1}$$

Периодическое решение уравнения (2.5), отвечающее автоколебательному режиму, будем искать в виде

$$r = \varepsilon^{1/2}(l + \varepsilon m \cos 2\varphi + \varepsilon n \sin 2\varphi + \varepsilon p \cos 4\varphi + \varepsilon q \sin 4\varphi) + \ldots \tag{2.6}$$

Здесь l, m, n, p, q постоянные, подлежащие определению, а многоточие обозначает члены порядка ε^2. Подставляя (2.6) в (2.5) и приравнивая коэффициенты при тригонометрических функциях, получим

$$l^2 = -\frac{\mu_0}{b_1(e^2+1)}, \quad m = \frac{\mu_0^{1/2}(a_2 - c_2)}{2[-b_1(e^2+1)]^{3/2}}$$

$$n = \frac{\mu_0^{1/2}(a_1 + c_1)}{2[-b_1(e^2+1)]^{3/2}}, \quad p = -\frac{d_2\mu_0^{1/2}}{4[-b_1(e^2+1)]^{3/2}}, \quad q = \frac{d_1\mu_0^{1/2}}{4[-b_1(e^2+1)]^{3/2}} \tag{2.7}$$

С учетом (2.7), (2.3) выражение (2.6) для амплитуды автоколебательного режима с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ включительно примет вид

$$r = \left(\frac{2\varepsilon}{e}\right)^{1/2}\Big\{1 + e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon e + \frac{\varepsilon}{4e(e^2+1)^3}\Big[e(-e^6 + 13e^4 + 5e^2 - 9)\sin 2\varphi +$$

$$+ (6e^6 - 10e^4 - 14e^2 + 2)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}e(e^6 - 21e^4 + 35e^2 - 7)\sin 4\varphi + \tag{2.8}$$

$$+ \frac{1}{2}(-7e^6 + 35e^4 - 21e^2 + 1)\cos 4\varphi\Big]\Big\} + \ldots$$

Период автоколебания можно найти из второго уравнения системы (2.4). С точностью до ε он равен

$$T = 2\pi J H^{-1}(1 - \varepsilon e^{-1}) \tag{2.9}$$

Найденный автоколебательный режим, возникающий при $n < e$, принадлежит центральному многообразию, вложенному в четырехмерное фазовое пространство и содержащее решение (1.2). Размерность многообразия равна двум, т. е. числу чисто мнимых корней характеристического уравнения [3, 4].

Пример. Пусть параметры имеют следующие числовые значения: $\varepsilon = 10^{-8}$, $bH^{-1} = 0{,}25$, $\mu H^{-1} = 10^{-2}$ с$^{-1}$, $JH^{-1} = 10^{-3}$ с. Эти значения соответствуют реальным приборам [1]. Тогда вычисления с точностью до $\varepsilon^{1/2}$ по формуле (2.8) и (2.9) дают $r = 0{,}044\ldots$, $T \simeq 6{,}276 \cdot 10^{-3}$ с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
3. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
4. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино, 1985. 215 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1990.