МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.383

© 1993 г. В. Е. ЮРИН

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

Рассмотрено функционирование волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) как единой электромеханической системы. Сформулирована задача управления колебаниями в ВТГ, имеющего своей целью поддержание колебаний в виде стоячей волны. Показано, что требуемый режим работы прибора обладает необходимыми свойствами устойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости при постоянно действующих возмущениях по отношению к требуемой части фазовых переменных.

1. Колебания свободного идеального резонатора. Колебания резонатора по второй форме в самом общем случае представляются в виде суперпозиции двух стоячих волн, ортогональных друг другу по пространственному расположению и по временной фазе:

$$w(\tau, \varphi) = p \sin (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) - q \cos (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta) \qquad (1)$$

где w — радиальное перемещение точки резонатора, φ — азимутальный угол. При нормальной работе прибора колебания должны представлять чистую стоячую волну, т. е. амплитуда одного из слагаемых должна быть равна номинальной величине r_0, а амплитуда другого — нулю. Соответственно, первое слагаемое в (1) далее именуется основной волной, а второе — помехой, или квадратурной волной.

Амплитуды этих волн p и q, угол поворота волны ϑ и ее фаза γ представляют собой медленно меняющиеся функции времени и в совокупности полностью описывают состояние и положение волны в резонаторе, причем эти величины не связаны друг с другом. Следовательно, для того, чтобы иметь полную информацию о волне, число независимых медленных переменных, используемых в системе управления, на любом этапе обработки информации должно быть равно четырем.

Для целей данной статьи удобно выбрать следующий набор переменных: $\{r, \varepsilon, \vartheta, \gamma\}$, где последние две переменные — те же самые, что и в представлении (1), а r и ε связаны с амплитудами основной и квадратурной волн по формулам

$$p = r \cos \varepsilon, \quad q = r \sin \varepsilon$$

Преимущество этих переменных состоит в том, что r представляет собой полную интенсивность колебаний, а $\operatorname{tg} \varepsilon$ — относительную величину квадратурной волны. Таким образом, отличие колебания общего вида (1) от чистой стоячей волны характеризуется величиной, не зависящей от амплитуды.

Уравнение колебаний свободного идеального резонатора было получено в [1, 2]. С точностью до членов первого порядка малости оно имеет вид

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + (w^{\mathrm{VI}} + 2w^{\mathrm{IV}} + w'') = 0$$

где штрихом обозначено дифференцирование по углу φ, точкой — по безразмерному времени τ; ω — безразмерная угловая скорость основания. Для того, чтобы получить уравнения движения второй формы в медленных переменных, можно сделать в этом уравнении замену

$$
\begin{aligned}
w(\tau, \varphi) &= r[\cos \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) - \sin \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta)] \\
\dot{w}(\tau, \varphi) &= \lambda r[\cos \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) + \sin \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta)]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

при дополнительном условии

$$
\begin{aligned}
&\dot{r}[\cos \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) - \sin \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta)] - \\
&- r\dot{\varepsilon}[\sin \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) + \cos \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta)] - \\
&- 2r\dot{\vartheta}[\cos \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta) + \sin \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta)] + \\
&+ r\dot{\gamma}[\cos \varepsilon \cos (\lambda\tau + \gamma) \cos 2(\varphi - \vartheta) + \sin \varepsilon \sin (\lambda\tau + \gamma) \sin 2(\varphi - \vartheta)] = 0
\end{aligned}
$$

приравнять нулю коэффициенты при $\cos 2(\varphi - \vartheta)$ и $\sin 2(\varphi - \vartheta)$ и осреднить по явно входящему времени. Уравнения для $\dot{r}$, $\dot{\varepsilon}$ получаются сразу, а для $\dot{\vartheta}$, $\dot{\gamma}$ сначала находятся их линейные комбинации $2\dot{\vartheta} \cos \varepsilon + \dot{\gamma} \sin \varepsilon$, $2\dot{\vartheta} \sin \varepsilon + \dot{\gamma} \cos \varepsilon$, которые затем разрешаются относительно требуемых производных.

Полученные уравнения в медленных переменных весьма просты:

$$\dot{r} = 0, \dot{\varepsilon} = 0, \dot{\vartheta} = -2\omega/5, \dot{\gamma} = 0$$

Они имеют очевидное решение

$$r = \text{const}, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad \vartheta = -2\omega\tau/5, \gamma = \text{const}$$

соответствующее свободно прецессирующей волне. Однако легко видеть, что это решение нейтрально-устойчиво. Любые сколь угодно малые возмущения за достаточно большое время уводят решение сколь угодно далеко от начального положения. Эти возмущения могут быть обусловлены как неидеальностями резонатора, так и иными факторами.

При нормальной работе волнового твердотельного гироскопа, однако, колебания резонатора должны носить вполне определенный характер, а именно представлять собой чистую стоячую волну заданной амплитуды $r = r_0$, $\varepsilon = 0$. Для того, чтобы обеспечить требуемый режим работы, используется система управления, воздействующая на резонатор посредством пондеромоторных сил, создаваемых системой управляющих электродов.

2. Вывод уравнений колебаний неидеального резонатора с электростатическим управлением. Рассматривается простейшая модель резонатора — кольцо. Будем считать, что его радиус R, площадь поперечного сечения S и момент инерции сечения J постоянны, а плотность зависит от окружного угла ϑ и в общем случае представляется рядом Фурье

$$\rho (\varphi) = \rho_0 \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i (\varphi - \varphi_i)\right], \ \chi_i \ll 1$$

Диссипация в материале описывается моделью Кельвина — Фойхта, причем коэффициент затухания также может быть функцией окружного угла

$$\sigma (\varphi) = E\varepsilon + \left[\xi_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i (\varphi - \psi_i)\right] \dot{\varepsilon}, \ \xi_i \ll 1$$

где σ — напряжения в материале, ε — деформации, E — модуль Юнга, ξ — константа, характеризующая среднюю вязкость.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и остальные дефекты резонатора: неоднородности радиуса, толщины, модуля Юнга, однако в дальнейшем все они сводятся к двум параметрам, характеризующим неоднородность консервативных и диссипативных свойств резонатора. Поэтому для простоты изложения эти дефекты в данной работе не рассматриваются, и при выводе уравнений мы ограничиваемся только двумя дефектами, указанными выше.

Погонная плотность лагранжиана для такого резонатора равна (с учетом только квадратичных членов):

$$L = \frac{\rho_0 SR}{2}\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i(\varphi - \varphi_i)\right] [(\dot v - \Omega w + \Omega R)^2 + (\dot w + \Omega w)^2] -$$

$$- \frac{EJ}{2R^3}(w + w'')^2 - \frac{ES}{2R}(v' - w)^2$$

где $v = v(t, \varphi)$ — тангенциальное перемещение точки резонатора, Ω — угловая скорость основания. Плотность диссипативной функции Релея по своей структуре аналогична плотности потенциальной энергии

$$D = \left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i(\varphi - \psi_i)\right]\left[\frac{J}{2R^3}(\dot w + \dot w'')^2 + \frac{S}{2R}(\dot v' - \dot w)^2\right]$$

Уравнения Лагранжа с учетом диссипации и внешних сил должны иметь следующую структуру:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot v} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial D}{\partial \dot v'} + \frac{\partial D}{\partial \dot v} = PR$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot w} - \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{\partial L}{\partial w} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial D}{\partial \dot w''} + \frac{\partial D}{\partial \dot w} = QR$$

где P, Q — силы, создаваемые управляющими электродами, а точка означает дифференцирование по времени. В соответствии с формулами для L и D уравнения принимают вид:

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i(\varphi - \varphi_i)\right](\ddot v - 2\Omega\dot w) - \delta^2(v'' - w') -$$

$$- \frac{\delta^2}{E}\frac{d}{d\varphi}\left[\left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i(\varphi - \psi_i)\right](\dot v' - \dot w)\right] = \frac{P}{\rho_0 S}$$

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i(\varphi - \varphi_i)\right](\ddot w + 2\Omega\dot v) - \delta^2(v' - w) + \varkappa^2(w^{\mathrm{IV}} + 2w'' + w) + \qquad (3)$$

$$+ \frac{1}{E}\left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i(\varphi - \psi_i)\right][-\delta^2(\dot v' - \dot w) + \varkappa^2(\dot w'' + \dot w)] +$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{E}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left[\left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i(\varphi - \psi_i)\right](\dot w'' + \dot w)\right] = \frac{Q}{\rho_0 S}$$

Константы δ и $\varkappa$ имеют размерность частоты

$$\delta^2 = E/(\rho_0 R^2),\ \varkappa^2 = EJ/(\rho_0 S R^4)$$

Безразмерные время τ и угловая скорость ω вводятся по формулам

$$\tau = \varkappa t,\ \omega = \Omega/\varkappa,\ \ \frac{d}{dt} = \varkappa\frac{d}{d\tau}$$

В этих единицах невозмущенная собственная частота колебаний по второй псевдоизгибной форме равна $\lambda = 6/\sqrt{5}$. Безразмерные угловая скорость ω, вязкость $\xi_0\varkappa/E$, внешние силы $P/(\rho_0 S\varkappa^2)$ и $Q/(\rho_0 S\varkappa^2)$, дефекты χ_i и $2\xi_i\varkappa/E$ считаются малыми величинами одного порядка. В дальнейшем будут рассматриваться только эффекты первого порядка, поэтому все члены, содержащие произведения этих величин, будут опускаться. Кроме того, угловая скорость и внешние силы считаются медленными функциями времени, т. е. $\dot{\omega} \simeq \omega^2$, поэтому все члены, пропорциональные их производным по времени, также опускаются.

Для того, чтобы получить уравнения нерастяжимого кольца, надо исключить из уравнений (3) члены, содержащие растягивающее усилие $\delta^2(v' - \omega)$, после чего положить $v' = w$. Это можно сделать, если продифференцировать второе уравнение по v и вычесть из него первое:

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i(\varphi - \varphi_i)\right] (\ddot{v} - 2\omega\dot{w}) +$$

$$+ \frac{d}{d\varphi} \left[\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \cos i\,(\varphi - \varphi_i)\right] (\ddot{w} + 2\omega\dot{v})\right] + (w^{\mathrm{V}} + 2w^{\mathrm{III}} + w') +$$

$$+ \frac{\varkappa}{E} \left[\frac{d}{d\varphi} + \frac{d^3}{d\varphi^3}\right] \left[\left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos i\,(\varphi - \psi_i)\right] (\dot{w}'' + \dot{w})\right] = \frac{Q' - P}{\rho_0 S \varkappa^2}$$

Удобно ввести также обозначения

$$\mu = \frac{36}{10}\frac{\xi_0\varkappa}{E} = \frac{\lambda^2}{2}\frac{\xi_0\varkappa}{E}, \quad g_i = \frac{36}{10}\frac{\xi_i\varkappa}{E} = \frac{\lambda^2}{2}\frac{\xi_i\varkappa}{E}, \quad h_i = \frac{9\sqrt{5}}{50}\chi_i = \frac{3}{20}\lambda\chi_i$$

Как будет видно из дальнейшего, μ представляет собой среднее значение безразмерного коэффициента затухания свободных колебаний по второй форме, а $\mu \pm g_4$ — его максимальное и минимальное значения. Величина h_4 есть поправка к собственной частоте, вызванная консервативным дефектом; безразмерные собственные частоты дефектного кольца равны $\lambda \pm h_4$.

После деления на $[1 - \sum \chi_i \cos i(\varphi - \varphi_i)]$, дифференцирования по φ и подстановки $v' = w$ уравнение принимает вид:

$$\ddot{w}'' + \ddot{w} + \frac{20}{3}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{ih_i}{\lambda}\frac{d}{d\varphi}\,[\ddot{w}\sin i\,(\varphi - \varphi_i)] + 4\omega\dot{w}' + \frac{10}{36}\,\mu\,(\dot{w}^{\mathrm{VI}} + 2\dot{w}^{\mathrm{IV}} + \dot{w}'') +$$

$$+ \frac{d}{d\varphi}\left[(w^{\mathrm{V}} + 2w^{\mathrm{III}} + w')\left[1 + \frac{20}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ih_i}{\lambda}\cos i\,(\varphi - \varphi_i)\right]\right] + \qquad (4)$$

$$+ \frac{20}{36}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{d^4}{d\varphi^4}\right]\left[\left[\xi_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\cos i\,(\varphi - \psi_i)\right](\dot{w}'' + \dot{w})\right] = \frac{Q'' - P'}{\rho_0 S\varkappa^2}$$

3. Электростатическое управление колебаниями резонатора. Для управления колебаниями резонатора ВТГ используются 16 дискретных и один кольцевой электрод. При подаче на них напряжения, зависящего от окружного угла φ, на резонатор действуют радиальная и тангенциальная распределенные силы [2]:

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 H}{2}\left(\frac{V(\varphi)}{d(\varphi)}\right)^2, \quad P = -\frac{\varepsilon_0 H}{2}\left(\frac{V(\varphi)}{d(\varphi)}\right)^2 \frac{w' + v}{R}$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая постоянная, H — высота электродов, $d(\varphi)$ — зазор между электродами и резонатором.

Дискретные электроды используются для управления волновой картиной. Они объединены в 4 группы и расположены в точках $\varphi = \pi(N - 1)/8 + (\pi(n - 1)/2$, где N — номер группы, n — номер электрода в группе, N, $n = 1, \ldots, 4$. Пренебрегая краевыми эффектами, функцию $V(\varphi)^2$ можно считать кусочно-постоянной с периодом $\pi/2$. Первые члены ее ряда Фурье равны

$$V(\varphi)^2 = \frac{2b}{\pi}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) +$$

$$+ \frac{2\sin 2b}{\pi}[(V_1^2 - V_3^2)\cos 4\varphi + (V_2^2 - V_4^2)\sin 4\varphi] + \ldots$$

где $b \le \pi/8$ — угловой размер электрода, $V_1, \ldots, V_4$ — напряжения на каждой из групп электродов. Электроды 1 и 3 групп, 2 и 4 групп оказывают противоположное воздействие на четвертую гармонику электрических сил, поэтому в каждый момент достаточно задействовать только 2 из 4 групп. Выбирая нужные группы электродов, можно обеспечить требуемые знаки коэффициентов при $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$, а задавая соответствующее напряжение V_1 или V_3, V_2 или V_4 — их абсолютную величину.

Кольцевой электрод используется для параметрического возбуждения колебаний. Напряжение на нем есть функция времени $V_0 = V_0(t)$.

Зазор между резонатором и электродами складывается из номинального зазора d_0 и радиального смещения w: $d(\varphi) = d_0 + w(t, \varphi)$. С учетом того обстоятельства, что $w << d_0$, выражение для радиальных сил принимает вид:

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 H_p V_0^2}{d_0^3}\left(\frac{d_0}{2} - w\right) - \frac{\varepsilon_0 H}{d_0^3}\left(\frac{2b}{\pi}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{2\sin 2b}{\pi}[(V_1^2 - V_3^2)\cos 4\varphi + (V_2^2 - V_4^2)\sin 4\varphi]\right)\left(\frac{d_0}{2} - w\right)$$

где H_p — высота параметрического электрода, H — высота управляющих электродов. Тангенциальные силы по порядку величины составляют $P \simeq Q(d_0/R)$, и, поскольку $d_0 << R$, то можно считать, что $P = 0$.

Для дальнейшего изложения удобно ввести обозначения

$$L = \frac{1}{5\lambda}\frac{\varepsilon_0 H_p R^4}{EJd_0^3}V_0^2(t), \quad l_0 = \frac{1}{5\lambda}\frac{\varepsilon_0 H R^4}{EJd_0^3}\frac{2b}{\pi}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2)$$

$$l_1 = \frac{1}{5\lambda}\frac{\varepsilon_0 H R^4}{EJd_0^3}\frac{2\sin 2b}{\pi}(V_1^2 - V_3^2), \quad l_2 = \frac{1}{5\lambda}\frac{\varepsilon_0 H R^4}{EJd_0^3}\frac{2\sin 2b}{\pi}(V_2^2 - V_4^2)$$

Поскольку в каждый момент работают только две из четырех групп электродов (первая или третья, вторая или четвертая), то

$$l_0 = C(|l_1| + |l_2|), \quad C = b/\sin 2b = \text{const}, \quad 1/2 \le C \le (\pi\sqrt{2})/8 \tag{5}$$

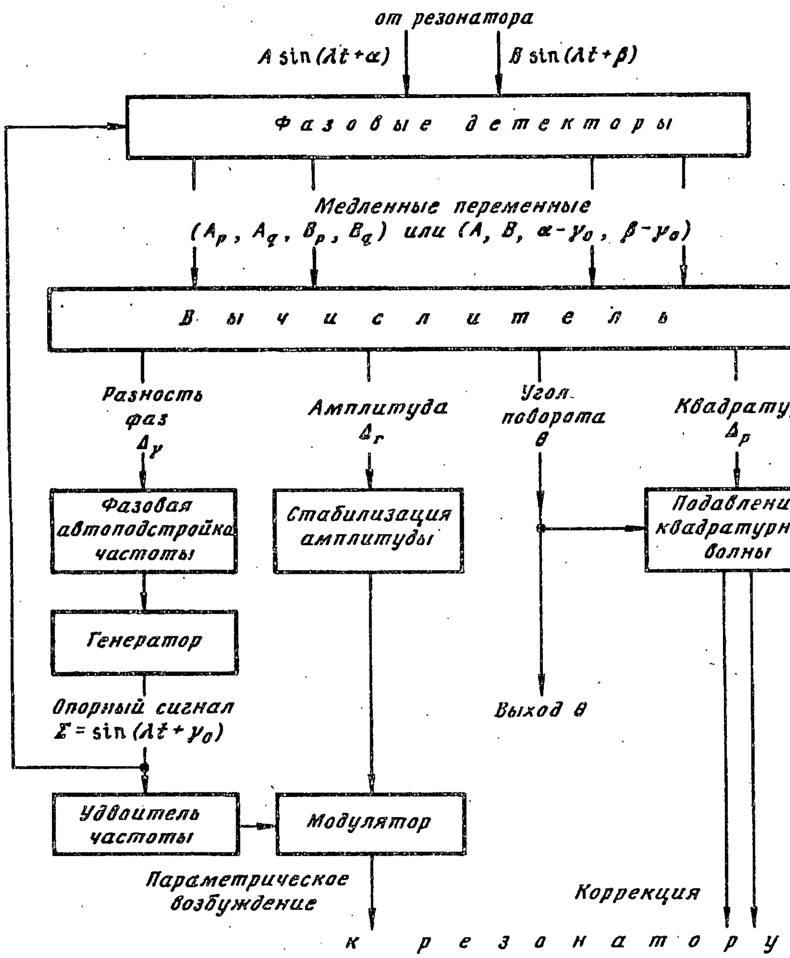
При этих обозначениях правая часть уравнения (4) принимает вид

$$\frac{Q'' - P'}{\rho_0 S \varkappa^2} = -5\lambda\frac{d^2}{d\varphi^2}[(d_0/2 - w)(L + l_0 + l_1\cos 4\varphi + l_2\sin 4\varphi)] \tag{6}$$

4. Обработка сигналов в системе управления колебаниями. Управление колебаниями резонатора имеет своей целью придать устойчивость штатному режиму, при котором колебания представляют собой чистую стоячую волну заданной амплитуды

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \varepsilon = 0$$

Изменение углового положения волны ϑ представляет собой выходную информацию прибора. Фаза стоячей волны γ сама по себе несущественна, если резонатор представляет собой автономную систему. В этом случае фазе может быть присвоено произвольное значение за счет выбора начального момента времени. Однако если система управления генерирует собственный опорный



сигнал $\Sigma = \sin(\lambda\tau + \gamma_0)$ для возбуждения колебаний, то автономным является не резонатор, а только прибор в целом. В этом случае из двух фаз γ, γ_0 несущественна одна (или, например, их полусумма), а их разность $\Gamma = \gamma - \gamma_0$ представляет собой четвертую фазовую переменную, которая должна контролироваться системой управления. При штатном режиме работы генератор опорного сигнала должен быть настроен в фазу с основной волной $\Gamma = 0$.

Это управление реализуется тремя системами обратной связи, поддерживающими требуемые значения каждой из указанных величин. Общая блок-схема идеализированной системы обработки информации и управления колебаниями представлена на схеме. Она включает в себя три этапа обработки информации: 1. Детектирование входных сигналов; 2. Определение характеристик волны; 3. Формирование управляющих сигналов.

Для съема информации о колебаниях резонатора используется, как известно, 8 датчиков перемещения, расположенных по направлениям $\varphi = 0, \pi/4, ..., 7\pi/4$, которые измеряют радиальное смещение w. Датчики объединены в группы по четыре. На выходе образуются сигналы

$$x(\tau) = (w_0 + w_{\pi/2} + w_\pi + w_{3\pi/2})/4$$

$$y(\tau) = (w_{\pi/4} + w_{3\pi/4} + w_{5\pi/4} + w_{7\pi/4})/4$$

Это соответствует представлению волны в виде:

$$w(\tau, \varphi) = x(\tau) \cos 2\varphi + y(\tau) \sin 2\varphi$$

В общем случае x и y есть сигналы, близкие к синусоидальным, с произвольными амплитудами и фазами

$$x(\tau) = A \sin (\lambda\tau + \alpha), y(\tau) = B \sin (\lambda\tau + \beta)$$

Амплитуды и фазы входных сигналов $\{A, B, \alpha, \beta\}$ есть независимые медленно меняющиеся величины. В совокупности они содержат полную информацию о состоянии волны, которая должна быть извлечена при обработке этих сигналов. При этом фазы сигналов α и β, как и фаза волны γ, определены по отношению к некоторому условному начальному моменту времени, поэтому для автономного резонатора существенна только их разность. Для прибора, включающего в себя опорный генератор, необходимо рассматривать две разности фаз: $\alpha - \gamma_0$ и $\beta - \gamma_0$. Можно показать, что значения переменных $\{r, \varepsilon, \vartheta, \gamma\}$ однозначно определяются по переменным $\{A, B, \alpha, \beta\}$. Соответствующие формулы преобразования получаются, если в выражениях для w через одни и другие переменные приравнять коэффициенты при $\sin 2\varphi \sin \lambda\tau$ и т. п. и разрешить полученные равенства относительно требуемых переменных.

Необходимая информация извлекается из входных сигналов путем фазового детектирования по отношению к опорному сигналу. При этом они разлагаются на две составляющие, одна из которых синфазна опорному сигналу, а другая сдвинута на 90°:

$$x(\tau) = A_p \sin (\lambda\tau + \gamma_0) + A_q \cos (\lambda\tau + \gamma_0)$$

$$y(\tau) = B_p \sin (\lambda\tau + \gamma_0) + B_q \cos (\lambda\tau + \gamma_0)$$

Четыре амплитуды $\{A_p, A_q, B_p, B_q\}$ этих составляющих содержат всю требуемую информацию. Возможен и другой вариант детектирования, при котором определяются амплитуды входных сигналов и их фазы по отношению к фазе опорного сигнала $\{A, B, \alpha - \gamma_0, \beta - \gamma_0\}$.

На следующем этапе эти медленные сигналы поступают в вычислитель, который определяет параметры волны: интенсивность колебаний, величину квадратурной составляющей, угловую ориентацию волновой картины, разность фаз между волной и опорным сигналом. В качестве этих параметров могут использоваться переменные $\{r, \varepsilon, \vartheta, \gamma\}$. Возможно использовать и другие переменные, обеспечивающие адекватное представление волновой картины. Например, вместо интенсивности r удобно воспользоваться ее логарифмом: $\rho = \ln (r/r_0)$, где r_0 — номинальная интенсивность колебаний.

Из четырех переменных обязательно должен быть определен только угол поворота волны ϑ, представляющий выходную информацию прибора. Остальные три параметра необходимы только для управления волной и могут быть заменены некоторыми сигналами рассогласования Δ_ρ, Δ_ε и Δ_Γ. Эти сигналы должны в общем случае удовлетворять следующим условиям: при штатном режиме работы прибора, т. е. при $\rho = \varepsilon = \Gamma = 0$ и произвольных значениях ϑ, должны иметь место соотношения

$$\Delta_\rho = \Delta_\varepsilon = \Delta_\gamma = 0$$

$$\partial\Delta_\rho/\partial\rho > 0, \partial\Delta_\rho/\partial\varepsilon = \partial\Delta_\rho/\partial\Gamma = 0$$

$$\partial\Delta_\varepsilon/\partial\varepsilon > 0, \partial\Delta_\varepsilon/\partial\rho = \partial\Delta_\varepsilon/\partial\Gamma = 0$$

$$\partial\Delta_\Gamma/\partial\Gamma > 0, \partial\Delta_\Gamma/\partial\rho = \partial\Delta_\Gamma/\partial\varepsilon = 0$$

Для определения амплитуды волны и меры отклонения ее от чисто стоячей можно, например, использовать следующие величины $\Delta_\rho = r^2 - r_0^2$, $\Delta_\varepsilon = r^2 \sin 2\varepsilon$, которые вычисляются через исходные медленные переменные

$$\Delta_\rho = A_p^2 + A_q^2 + B_p^2 + B_q^2 - r_0^2 = A^2 + B^2 - r_0^2$$

$$\Delta_\varepsilon = 2(A_qB_p - A_pB_q) = 2AB \sin(\alpha - \beta)$$

Вблизи штатного режима $\rho, \varepsilon << 1$, и поэтому

$$\Delta_\rho \simeq 2r_0^2\rho, \ \Delta_\varepsilon \simeq 2r_0^2\varepsilon$$

В качестве сигнала рассогласования по фазе между основной волной и опорным сигналом, можно использовать Γ, но удобнее использовать

$$\Delta_\Gamma = r^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\Gamma = 2(A_pA_q + B_pB_q) = A^2 \sin 2(\alpha - \gamma_0) + B^2 \sin 2(\beta - \gamma_0)$$

или

$$\Delta_\Gamma = \operatorname{tg} 2\Gamma = \frac{2(A_pA_q + B_pB_q)}{A_p^2 - A_q^2 + B_p^2 - B_q^2} = \frac{A^2 \sin 2(\alpha - \gamma_0) + B^2 \sin 2(\beta - \gamma_0)}{A^2 \cos 2(\alpha - \gamma_0) + B^2 \cos 2(\beta - \gamma_0)}$$

Вблизи штатного режима работы прибора $\Gamma << 1$, поэтому указанные величины равны соответственно

$$\Delta_\Gamma = r^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\Gamma \simeq 2r_0^2\Gamma, \ \Delta_\Gamma = \operatorname{tg} 2\Gamma \simeq 2\Gamma$$

Кроме указанных переменных, сохраняются также значения $\cos 4\vartheta$ и $\sin 4\vartheta$, которые получаются в ходе вычислений в качестве промежуточного продукта. Эти величины необходимы для распределения напряжений между корректирующими электродами.

Третий этап — формирование управляющих сигналов — выполняется системами стабилизации амплитуды, фазовой автоподстройки частоты и подавления квадратурной волны.

На вход системы стабилизации амплитуды подается сигнал рассогласования по амплитуде Δ_ρ. На выходе системы формируется амплитуда сигнала параметрического возбуждения

$$L_0 = L_{00}(1 - Q(\Delta_\rho)) \tag{7}$$

где L_{00} — номинальная амплитуда возбуждения, а функция Q должна удовлетворять условиям

$$Q(0) = 0, \ dQ(x)/dx \,|_{x=0} > 0$$

Далее этот сигнал модулируется опорным сигналом с частотой 2λ, образуя сигналы параметрического возбуждения по одной из формул:

$$\begin{aligned} L &= L_0[1 + \sin 2(\lambda\tau + \gamma_0)] \\ L &= (\pi/4)L_0[1 + \operatorname{sign} \sin 2(\lambda\tau + \gamma_0)] \end{aligned} \tag{8}$$

(для простоты считается, что на выходе системы формируется не напряжение V_0, а непосредственно сила, прикладываемая к резонатору). Номинальная амплитуда сигнала возбуждения L_{00} подбирается такой, чтобы возбуждение компенсировало потери энергии.

Побочным эффектом при работе системы параметрического возбуждения является постоянная составляющая, которая содержится в (8). Для синусоидального сигнала она равна L_0, для прямоугольного — $\pi L_0/4$.

На вход системы фазовой автоподстройки частоты подается сигнал рассогласования по фазе Δ_Γ. Система регулирует частоту опорного генератора по закону

$$\dot{\gamma}_0 = S(\Delta_\Gamma) \tag{9}$$

где функция S удовлетворяет требованиям

$$S(0) = 0, \; dS(x)/dx\,|_{x=0} > 0$$

Сигнал с выхода генератора $\Sigma = \sin(\lambda\tau + \gamma_0)$ используется для фазовой демодуляции входных сигналов и, после удвоения частоты, для формирования сигнала параметрического возбуждения.

В системе подавления квадратурной волны формируются напряжения на корректирующих электродах таким образом, чтобы коэффициенты l_1 и l_2 составляли:

$$l_1 = R(\Delta_\varepsilon)\sin 4\vartheta, \; l_2 = -R(\Delta_\varepsilon)\cos 4\vartheta$$
$$R(0) = 0, \; dR(x)/dx\,|_{x=0} > 0 \tag{10}$$

Первые члены ряда Фурье нормированного квадрата напряжения, создаваемого этой системой, имеют вид

$$l_0 + l_1\cos 4\varphi + l_2 \sin 4\varphi = C\,|R(\Delta_\varepsilon)|\,(|\sin 4\vartheta| + |\cos 4\vartheta|) - R(\Delta_\varepsilon)\sin 4(\varphi - \vartheta)$$

Экстремальные значения достигаются при $\varphi - \vartheta = \pi/8 + \pi n/4$, т. е. под углом $\pi/8$ к узлам и пучностям основной и квадратурной волн. Во всех узлах и пучностях четвертая гармоника обращается в ноль.

5. Электромеханические колебания в ВТГ. Уравнения в медленных переменных, описывающие эволюцию волны в приборе, можно получить, если в уравнении (4), (6) сделать замену переменных (2) и осреднить полученные уравнения по явно входящему времени. После выполнения замены формы колебаний с различными номерами разделяются, и в уравнения для второй (эллиптической) формы в уравнения входят только коэффициенты четвертых гармоник дефектов: h_4, g_4, φ_4, ψ_4. При осреднении учитывается, что l_0, l_1, l_2 — медленные функции времени, а $L \sim \sin 2(\lambda\tau + \gamma_0)$. К полученным уравнениям нужно добавить описание системы управления колебаниями, а именно уравнение (9) для фазы опорного генератора γ_0 и выражения (5), (7), (8), (10) для определения сил. После этого получается замкнутая система уравнений пятого порядка, описывающая поведение прибора. Однако фазы γ, γ_0 входят в правые части всех уравнений только в виде разности $\gamma - \gamma_0$. Это отражает тот факт, что реальный физический смысл имеет только разность фаз, а не сами фазы. Это свойство позволяет, вычитая из уравнения для γ уравнение (9) для γ_0, получить для описания прибора замкнутую систему из четырех уравнений:

$$\dot\rho = -\mu + L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\cos 2\varepsilon \cos 2\Gamma - g_4 \cos 2\varepsilon \cos 4(\vartheta - \psi_4)$$

$$\dot\varepsilon = -L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\sin 2\varepsilon\cos 2\Gamma - R(\Delta_\varepsilon) +$$
$$+ g_4 \sin 2\varepsilon \cos 4(\vartheta - \psi_4) + h_4 \sin 4(\vartheta - \varphi_4)$$

$$2\dot\vartheta = -\frac{4}{5}\omega + L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 2\Gamma +$$
$$+ \frac{g_4}{\cos 2\varepsilon}\sin 4(\vartheta - \psi_4) - h_4 \operatorname{tg} 2\varepsilon \cos 4(\vartheta - \varphi_4) \tag{11}$$

$$\dot\Gamma = -L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\frac{\sin 2\Gamma}{\cos 2\varepsilon} - S(\Delta_\Gamma) - 2\sigma L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)] - F(\vartheta)\,|R(\Delta_\varepsilon)| -$$
$$- g_4 \operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 4(\vartheta - \psi_4) + \frac{h_4}{\cos 2\varepsilon}\cos 4(\vartheta - \varphi_4)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения: $F(\vartheta) = 2C(|\sin 4\vartheta| + |\cos 4\vartheta|)$, $C = \text{const}$, $1/2 \le C \le (\pi\sqrt{2})/8$, μ — однородный коэффициент затухания свободных колебаний, ω — угловая скорость основания, h_4, φ_4 — величина и ориентация консервативного дефекта, g_4, ψ_4 — величина и ориентация диссипативного дефекта, $\sigma = 1$ для синусоидального возбуждения, $\pi/4$ для прямоугольных импульсов.

Пятое дифференциальное уравнение, которым должно быть уравнение для одной из фаз γ или γ_0, отделяется и в дальнейшем не представляет интереса.

Невозмущенная система уравнений, в которую переходят уравнения (11) в случае резонатора без дефектов ($h_4 = g_4 = 0$) и точной настройки номинальной амплитуды возбуждающего сигнала на равновесное значение $L_{00} = \mu$ имеет решение, соответствующее штатному режиму работы прибора

$$\rho = \varepsilon = \Gamma = 0, \ \vartheta^* = \vartheta|_{\tau=0} - \frac{2}{5}\int_0^{\tau} \omega(\tau^*)\, d\tau^* \tag{12}$$

Это решение по форме полностью совпадает со стоячей волной в свободном идеальном резонаторе, однако оно имеет совершенно иную физическую сущность: это колебания прибора как единой электромеханической системы. В этом приборе управление колебаниями имеет своей целью, как уже говорилось, поддерживать номинальные значения переменных ρ, ε и Γ, т. е. обеспечить устойчивость решения (12) по отношению к этим переменным.

Вопрос устойчивости по части переменных исследовался В. В. Румянцевым и А. С. Озиранером [3—5]. Ими были доказаны теоремы, обобщающие известные результаты Ляпунова и Малкина об асимптотической устойчивости и устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Невозмущенные уравнения, соответствующие идеально изотропному резонатору, имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot\rho &= -\mu + L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\cos 2\varepsilon \cos 2\Gamma \\
\dot\varepsilon &= -L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\sin 2\varepsilon \cos 2\Gamma - R(\Delta_\varepsilon) \\
2\dot\vartheta &= -\frac{4}{5}\,\omega + L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 2\Gamma \\
\dot\Gamma &= -L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)]\frac{\sin 2\Gamma}{\cos 2\varepsilon} - S(\Delta_\Gamma) - 2\sigma L_{00}\,[1 - Q(\Delta_\rho)] - F(\vartheta)\,|R(\Delta_\varepsilon)|
\end{aligned} \tag{13}$$

причем функция $F(\vartheta) = F(\vartheta(t))$ ограничена

$$1 \le 2C \le F(\vartheta) \le 2C\sqrt{2} \le \pi/2 \tag{14}$$

Для исследования устойчивости этой системы используется функция Ляпунова в виде

$$V(\rho, \varepsilon, \Gamma) = {}^1/_2\,[4Q'(2\mu + R')\rho^2 + R'^2\varepsilon^2 + (2\mu + R')(2\mu + S')\Gamma^2]$$

где использованы обозначения

$$Q' = \frac{dQ}{d\Delta_\rho}\frac{\partial\Delta_\rho}{\partial\rho}, \quad R' = \frac{dR}{d\Delta_\varepsilon}\frac{\partial\Delta_\varepsilon}{d\varepsilon}, \quad S' = \frac{dS}{d\Delta_\Gamma}\frac{\partial\Delta_\Gamma}{\partial\Gamma}$$

Очевидно, что эта функция положительно определена во всем пространстве переменных $\{\rho, \varepsilon, \Gamma\}$ и что она допускает бесконечно малый высший предел по этим переменным. Производная этой функции в силу невозмущенных уравнений (13) равна

$$\dot{V} = -4Q'^2(2\mu + R')\rho^2 - R'^2(2\mu + R')\varepsilon^2 - (2\mu + R')(2\mu + S')^2\Gamma^2 +$$

$$+ 2\sigma Q'(2\mu + R')(2\mu + S')\rho\Gamma - (2\mu + R')(2\mu + S')F(\vartheta)R' \mid \varepsilon \mid \Gamma + O_3$$

где через O_3 обозначены члены, пропорциональные третьей и более высоким степеням переменных.

Квадратичная часть dV/dt представляет собой квадратичную форму относительно переменных ρ, ε и Γ. Для отрицательной определенности этой формы необходимы и достаточны условия

$$Q'^3R'(2\mu + R') > 0; R'^2(2\mu + R') > 0;$$

$$Q'^2R'^2(2\mu + R')^3(2\mu + S')^2(4 - \sigma^2 - 4F(\vartheta)^2) > 0.$$

Первые два условия очевидным образом выполняются, поскольку все входящие в них коэффициенты положительны. Третье условие выполняется в силу оценки (14). Следовательно, в некоторой Δ — окрестности идеального решения

$$\rho^2 + \varepsilon^2 + \Gamma^2 < \Delta \leq (\pi/4)^2, \mid \vartheta - \vartheta^* \mid < \infty$$

производная выбранной функции Ляпунова есть функция отрицательно-определенная относительно переменных $\{\rho, \varepsilon, \Gamma\}$.

Наконец, частные производные функции Ляпунова ограничены в указанной области. Таким образом, она удовлетворяет всем условиям теорем Румянцева и Озиранера об устойчивости по части переменных. Следовательно, решение (12) уравнений (13) устойчиво по переменным ρ, ε и Γ, асимптотически устойчиво по этим переменным и устойчиво при постоянно действующих возмущениях, каковыми являются, в частности, члены, связанные с консервативным и диссипативным дефектами. Более того, множество $\{\rho = \varepsilon = \Gamma = 0\}$, инвариантное в силу системы (13), равномерно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем. Это более сильное утверждение, чем устойчивость решения (12) при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Близкая к рассмотренной задача об управлении колебаниями автономной системы рассматривалась в [6], где был установлен общий вид обобщенных сил, обеспечивающих поддержание колебаний в виде стоячей волны заданной амплитуды.

При наличии дефектов резонатора отклонения указанных переменных от идеального решения будут порядка величины дефектов h_4, g_4. Тогда уравнение для ϑ принимает вид

$$\dot{\vartheta} = -2\omega/5 + g_4 \sin 4(\vartheta - \psi_4) + O(h_4^2, h_4g_4, g_4^2)$$

Отсюда видно, что уход прибора вызывается прежде всего диссипативным дефектом. Консервативный дефект может приводить к уходам лишь второго порядка малости. В первом приближении уход, вызванный консервативным дефектом, подавляется благодаря работе систем обратной связи. Поворот волны, вызванный поворотом основания, пропорционален последнему, причем с тем же масштабным коэффициентом, что и в свободном идеальном резонаторе.

Таким образом, описанная система управления колебаниями действительно позволяет решить поставленную задачу — обеспечить устойчивый режим работы прибора, близкий к колебаниям свободного резонатора без консервативного и диссипативного дефектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17—23.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных//Вестн. МГУ. Сер. мат., механ., физ., астрон., хим.. 1957. № 4. С. 9—16.
4. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 419—427.
5. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. *Журавлев В. Ф.* Об управлении формой колебаний в резонансных системах//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 827-836.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1992