

УДК 624.072.2

© 1993 г. В. А. КОРНЕЕВ, С. А. МИХАЙЛОВ,
Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО, А. С. ШАМАЕВ

МЕТОД РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

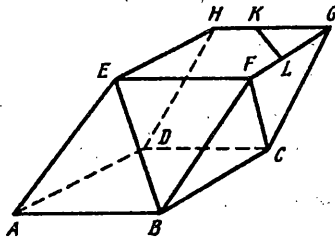
Стержневые конструкции с периодической структурой широко используются в строительных сооружениях, мостах, опорах электропередач и т. д. Предполагается применение таких конструкций для создания перспективных космических объектов, например больших космических антенн, солнечных батарей, орбитальных станций. В связи с этим возникает ряд задач управления движением конструкций с периодической структурой. Требуемая точность выполнения рабочих операций достаточно высока. Поэтому необходимо учитывать упругие деформации рассматриваемых стержневых конструкций. Применение прямых методов (например, метода конечных элементов (МКЭ)) приводит к необходимости расчета механических систем с большим (порядка нескольких тысяч) числом степеней свободы, что делает затруднительным анализ динамики таких конструкций.

В публикуемой работе предлагается метод расчета эффективных жесткостных модулей стержневых конструкций, который позволяет сопоставить стержневой конструкции систему с распределенными параметрами. Поэтому в дальнейшем, применяя МКЭ, можно существенно уменьшить число степеней свободы расчетной модели конструкции. Отметим, что проблемам анализа и расчета больших стержневых конструкций посвящен ряд работ, например, [1—2].

1. **Общее описание метода.** Предполагается, что рассматриваемая стержневая конструкция состоит из большого числа периодически повторяющихся ячеек. Конструкция может быть одномерной (стержень) или двумерной (пластинка, оболочка). Параллельными переносами ячейки (трансляциями) в одном или двух измерениях можно построить всю конструкцию.

Расчет эффективных упругих модулей будет осуществляться на основе метода энергетической эквивалентности, который заключается в следующем. Априори задается некоторая упругая деформация периодической ячейки и вычисляются смещения каждого стержня. По заданным смещениям концов вычисляется потенциальная энергия упругих деформаций стержня. Потенциальная энергия ячейки определяется как сумма потенциальных энергий упругих деформаций стержней, входящих в ячейку. Затем стержневая ячейка заменяется непрерывной упругой средой. Вычисляется упругая энергия ячейки при заданной деформации. Приравняв выражения для потенциальных энергий стержневой и непрерывной ячейки, получаем одно уравнение, связывающее упругие модули среды и жесткостные параметры стержней ячейки. Анизотропное тело определяется 21 упругим модулем. Поэтому для вычисления всех констант упругой среды необходимо составить 21 уравнение (эти уравнения отвечают различным деформациям ячейки). Для конкретных расчетов, как будет видно из дальнейшего, число уравнений можно существенно уменьшить.

Изложим метод на примере ячейки конкретной формы — косоугольного параллелепипеда $ABCDEFGH$, (фиг. 1). Ребра параллелепипеда образуют стержни AB, BC, \dots, CH . В ячейку могут входить и дополнительные стержни, например BE, KL . Концы этих стержней находятся в вершинах параллелепипеда или на его ребрах. Обозначим через n — число стержней, входящих в элементарную



Фиг. 1

ячейку, через E_i — модуль Юнга, l_i — длину, s_i — площадь поперечного сечения i -го стержня ($i = 1, \dots, n$). Стержни предполагаются прямолинейными. Для рассматриваемых конструкций напряжения, соответствующие деформациям изгиба и кручения, обычно существенно меньше напряжений растяжения-сжатия [3]. Поэтому при вычислении потенциальной энергии ими обычно пренебрегают. В дальнейшем, при определении потенциальной энергии ячейки, будут учитываться только деформации растяжения-сжатия.

Перейдем к вычислению упругой потенциальной энергии стержневой ячейки. В геометрическом центре ячейки O поместим начало декартовой прямолинейной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Ось X_1 направим параллельно ребру ячейки AB . Ось X_3 направлена перпендикулярно плоскости $ABCD$. Зададим вектор упругих перемещений точек ячейки в виде вектор-функции декартовых координат

$$\bar{u} = h(\bar{x}) \quad (1.1)$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad h = (h_1, h_2, h_3), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

Обозначим через \bar{a}_i, \bar{b}_i — координаты концов стержней, через $\bar{\tau}_i$ — орт, направленный по оси i -го стержня. Вычислим компоненты вектора упругих перемещений концов стержней $\bar{v}_i = h(\bar{a}_i), \bar{w}_i = h(\bar{b}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Тогда удлинение i -го стержня Δl_i запишется в следующем виде

$$\Delta l_i = (h(\bar{a}_i) - h(\bar{b}_i)) \cdot \bar{\tau}_i \quad (1.2)$$

Подсчитаем вклад одного стержня в потенциальную энергию ячейки

$$\Pi_i = E_i s_i \Delta l_i^2 / (2l_i) \quad (1.3)$$

Потенциальная энергия упругих деформаций ячейки равна сумме энергий отдельных стержней, взятых с весом, обратно пропорциональным числу ячеек k_i , которым принадлежит данный стержень.

Имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{E_i s_i \Delta l_i^2}{l_i k_i} \quad (1.4)$$

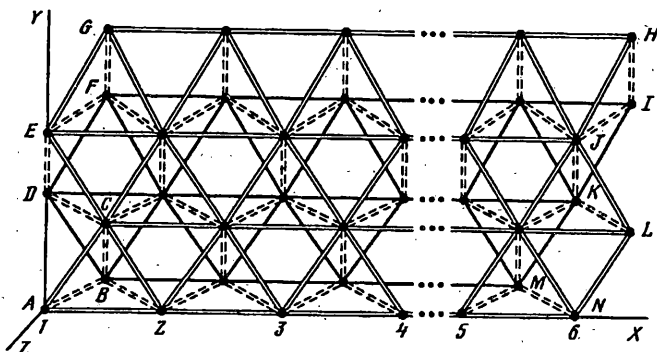
Таким образом, определена потенциальная энергия упругих деформаций стержневой ячейки.

Вычислим теперь упругую потенциальную энергию сплошной ячейки. Будем считать, что объем стержневой ячейки занимает анизотропное твердое тело (непрерывная среда). Зададим вектор упругих перемещений точек ячейки снова в виде (1.1). Вычислим компоненты тензора упругих деформаций

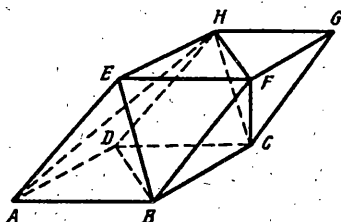
$$e_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2} (\partial h_i(x) / \partial x_j + \partial h_j(x) / \partial x_i) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

Упругая энергия непрерывной среды запишется в виде [3]:

$$\Pi = 1/2 \iiint E_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь E_{ijkl} — тензор модулей анизотропной среды. Интегрирование ведется по объему ячейки.

Приравнявая соотношение (1.4) и (1.6), получим уравнение для определения компонент тензора модулей упругости E_{ijkl} . Симметричный тензор четвертого порядка E_{ijkl} содержит 21 независимую компоненту. Поэтому для определения всех компонент тензора упругих деформаций необходимо получить 21 уравнение, т. е. выполнить 21 «мысленный эксперимент». В ряде практически важных случаев с достаточной степенью точности непрерывную среду можно считать изотропной. В этом случае необходимо поставить два «эксперимента» (задать две деформации) для определения двух эффективных модулей упругости.

2. Расчет эффективных упругих модулей большой космической антенны. Антенна представляет собой пространственную двухслойную решетчатую конструкцию, фрагмент которой изображен на фиг. 2. Двойными сплошными линиями изображены стержни, лежащие в плоскости X_1X_2 и составляющие нижний слой конструкции. Одинарными сплошными линиями изображены стержни, лежащие в плоскости, параллельной плоскости X_1X_2 и составляющие верхний слой конструкции. Штриховыми двойными линиями изображены стержни, соединяющие верхний слой с нижним. Предполагается, что все стержни рассматриваемой конструкции являются одинаковыми. Таким образом, верхний и нижний слой состоят из треугольников, при этом каждый узел верхнего слоя проецируется в центр треугольника нижнего слоя, а ближайшие узлы верхнего и нижнего слоя соединены между собой стержнями. Рассматриваемая структура является периодической, поэтому на фиг. 2 изображены лишь крайние ее ячейки, дающие представление о самой структуре, а также о ее краях.

Рассмотрим элементарную стержневую ячейку антенны (фиг. 3). Параллельными переносами ячейки в двух измерениях можно построить всю антенну. Предполагается, что ребрами ячейки являются прямолинейные упругие стержни, испытывающие деформации растяжения-сжатия. Жесткостные и геометрические характеристики всех стержней одинаковы. Длину ребра ячейки обозначим через a .

Антенна представляет собой двумерную структуру: ее толщина на порядок меньше двух измерений. Поэтому целесообразно сопоставить антенне в качестве расчетной модели пластину или оболочку (в дальнейшем ограничимся пластиной).

В соответствии с методикой, изложенной в п. 1, зададим деформацию пластины в виде

$$u_3 = w = 1/2 \alpha x_1^2 \quad (2.1)$$

где α — параметр, определяющий деформацию. Данная деформация характерна для изгибной моды колебаний пластины.

Подсчитаем сначала упругую потенциальную энергию ячейки пластины для заданной деформации [4]:

$$\Pi = \frac{E_* h^3}{24(1 - \nu_*^2)} \iint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2(1 - \nu_*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

Здесь E_* — эффективный модуль Юнга, ν_* — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины, S — ее поверхность.

Подставляя заданную деформацию (2.1) в выражения для потенциальной энергии (2.2) и вычисляя двойной интеграл по ячейке пластины, получим

$$\Pi = \frac{E_* \alpha^2 a^5 \sqrt{2}}{(1 - \nu_*^2) 72} \quad (2.3)$$

Таким образом, определена упругая потенциальная энергия ячейки для заданной деформации в предположении, что ячейка представляет собой фрагмент изотропной пластины.

Определим теперь упругую потенциальную энергию стержневой ячейки. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ зададим деформацию стержневой ячейки

$$u_1 = -\alpha x_1 x_3, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1/2 \alpha x_1^2 \quad (2.4)$$

Заданная деформация соответствует изгибной форме упругих колебаний антенны. Она выбрана таким образом, чтобы точки стержневой ячейки смещались так же, как и точки соответствующей непрерывной трехмерной среды при деформации (2.1).

Вычисляя упругую потенциальную энергию стержневой ячейки по формулам (1.2)–(1.4), получим

$$\Pi = 1/6 E s \alpha^2 a^3 \quad (2.5)$$

Здесь E — модуль Юнга, s — площадь поперечного сечения, a — длина стержней, входящих в ячейку, α — параметр, определяющий деформацию.

Приравнявая выражение для упругой потенциальной энергии непрерывной и стержневой ячейки (2.3) и (2.5), определим эффективную жесткость пластины

$$E_*/(1 - \nu_*^2) = E s b \sqrt{2}/a^2 \quad (2.6)$$

В выражение (2.6) входят два упругих модуля E_* и ν_* , которые определяют жесткостные свойства изотропной пластины. Поэтому определить их независимо, используя одно соотношение (2.6), нельзя. Однако выражение (2.6) содержит комбинацию $D = E/(1 - \nu^2)$, где D — цилиндрическая жесткость пластины. В дальнейшем для расчетов собственных частот и форм упругих колебаний изотропной пластины необходимо знать только эту упругую постоянную среды D . Поэтому для определения цилиндрической жесткости изотропной пластины достаточно проведения одного «эксперимента» (задания одной деформации), а именно рассмотренного выше изгиба.

Большая космическая антенна является анизотропной конструкцией. Поэтому для уточнения ее жесткостных свойств целесообразно определить еще один

независимый эффективный упругий коэффициент — модуль сдвига. Для этого зададим деформацию ячейки в следующем виде

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = x_1 \beta / a \quad (2.7)$$

Здесь β — параметр, определяющий деформацию. Данная деформация характерна для крутильной моды колебаний антенны. Подсчитаем тензор упругих деформаций для заданных перемещений (2.7):

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0$$

$$e_{12} = e_{23} = 0, \quad e_{13} = e_{31} = \beta / (2a)$$

Тензор деформаций постоянен по всему объему ячейки. Поэтому потенциальную энергию упругих деформаций можно вычислить следующим образом

$$\Pi = 1/2 (2G_* e_{ij} e_{ij}) v \quad (2.8)$$

где v — объем ячейки, G_* — эффективный коэффициент Ламе (модуль сдвига). Подставляя выражения для компонент тензора упругих деформаций в (2.8), получим

$$\Pi = \sqrt{2} / 4 \beta^2 a G_* \quad (2.9)$$

Выражением (2.9) определена энергия упругих деформаций непрерывной ячейки для крутильной моды колебаний.

Упругую потенциальную энергию стержневой ячейки для вектора смещений (2.7) подсчитаем по формулам (1.1) — (1.4):

$$\Pi = 1/6 Es \beta^2 / a \quad (2.10)$$

Приравнявая выражения (2.9) и (2.10), определим эффективный модуль сдвига G_* ячейки

$$G_* = \sqrt{2} / 3 Es / a^2 \quad (2.11)$$

Таким образом, в результате проведенного анализа, определена цилиндрическая жесткость (2.6) изотропной пластины. Для ее определения достаточно проведения одного эксперимента (задание деформации (2.1) и дальнейшее вычисление упругой потенциальной энергии для стержневой и распределенной ячейки). Для уточнения жесткостных характеристик антенны определен эффективный модуль сдвига (2.11). Он может быть использован для расчетов частот и форм собственных колебаний антенны для более сложных моделей ячейки (например, ортотропной пластины).

3. Расчет фрагмента конструкции антенны. Для иллюстрации эффективности полученных формул для жесткостей был рассмотрен фрагмент космической антенны, представляющий собой пространственную двухслойную решетчатую стержневую конструкцию (см. фиг. 2).

Опишем параметры конструкции. Предполагается, что расстояние между слоями составляет 1 м. Тогда длина стержней, составляющих конструкцию, имеет величину $a = (1,5)^{1/2}$ м. Нижний слой конструкции состоит из трех рядов треугольников, в каждом ряду по 10 треугольников. Верхний слой конструкции состоит из двух рядов треугольников, содержащих 9 и 10 треугольников соответственно. Конструкция содержит 41 узел и 137 стержней. Стержни являются трубчатыми, диаметр их равен 17 мм, а толщина стенок трубки составляет 1 мм. Материал стержней — углепластик, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность которого соответственно равны $E = 1,25 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu = 0,3$; $\rho = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³.

Эквивалентная ортотропная пластина имеет длину 6,7 м, ширину — 3,2 м и толщину — 1 м. Масса всех стержней, деленная на объем введенной пластины, дает эффективную плотность $\rho_* = 0,55$ кг/м³. Эффективные модуль Юнга и

модуль сдвига пластины определяются из соотношений (см. (2.6), (2.11))
 $D = E_*/(1 - \nu_*^2) = 6\sqrt{2} \cdot 0,66 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $G_* = \sqrt{2/3} \cdot 0,66 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$.

Поскольку для ортотропной пластины величины E и G задаются независимо, данные соотношения не позволяют однозначно определить E и G . Положим $\nu_* = 0,3$; тогда для E и G получим следующие значения: $E = 5,0963 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$; $G_* = 0,3113 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$.

Для рассмотренной стержневой конструкции и введенной эффективной пластины были проведены расчеты собственных частот для следующих двух случаев крепления пластины. В первом случае стержневая конструкция полагалась жестко закрепленной в узлах $A-G$, а пластина жестко закреплялась с одного узкого края по ширине. Во втором случае были проведены расчеты свободных колебаний стержневой конструкции и пластины.

Расчет частот собственных колебаний для обеих моделей (стержневой конструкции и ортотропной пластины) проводился методом конечных элементов при помощи пакета прикладных программ COSMOS. Различие состояло лишь в используемом типе механической модели для МКЭ. Поэтому сравнение результатов расчетов дает представление о точности, с которой эквивалентная сплошная пластина с вычисленными эффективными жесткостями аппроксимирует исходную стержневую конструкцию.

Для стержневой конструкции и пластины в первом случае крепления были получены следующие значения трех нижних частот (в герцах): $\omega_1^0 = 0,3196 \cdot 10^2$; $\omega_2^0 = 0,6185 \cdot 10^2$; $\omega_3^0 = 0,7458 \cdot 10^2$; $\omega_1^0 = 0,2943 \cdot 10^2$; $\omega_2^0 = 0,6566 \cdot 10^2$; $\omega_3^0 = 0,9472 \cdot 10^2$.

Здесь и далее частоты ω_i^0 отвечают стержневой конструкции, а через ω_i^0 обозначены частоты колебаний пластины. Первая частота соответствует изгибному колебанию в направлении, перпендикулярном плоскости X_1X_2 ; вторая частота соответствует изгибному колебанию в направлении, перпендикулярном плоскости X_1X_3 ; третья частота соответствует крутильным колебаниям относительно центральной оси конструкции, параллельной оси X_1 .

Для стержневой конструкции и пластины во втором случае были получены следующие значения трех нижних частот: $\omega_1^0 = 0,1272 \cdot 10^3$; $\omega_2^0 = 0,1406 \cdot 10^3$; $\omega_3^0 = 0,2351 \cdot 10^3$; $\omega_1^0 = 0,1212 \cdot 10^3$; $\omega_2^0 = 0,1486 \cdot 10^3$; $\omega_3^0 = 0,2280 \cdot 10^3$.

При этом первая частота соответствует изгибному колебанию в направлении, перпендикулярном плоскости X_1X_2 ; вторая частота соответствует кручению относительно центральной оси X_1 ; третья частота соответствует изгибному колебанию (в направлении, перпендикулярном плоскости X_1X_3).

Приведенные результаты расчетов показывают, что погрешность предложенного метода составляет не более 8% при вычислении двух низших частот колебаний конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atluri S. N., Amos A. K. Large Space Structures: Dynamics and Control. Berlin: Springer Verlag, 1987. 354 p.
2. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
4. Васильду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VIII.1992