

УДК 539.375

© 1993 г. В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Б. И. СМЕТАНИН

К ЗАДАЧЕ ГРИФФИТСА

В [1] рассмотрена задача о растяжении упругой плоскости с прямолинейной трещиной при достаточно детальном учете молекулярных сил сцепления, действующих на ее берегах. Задача приведена к решению нелинейного интегродифференциального уравнения. Авторы разработали алгоритм построения решения этого уравнения методами регулярных и сращиваемых асимптотических разложений, однако численные результаты в [1] не приведены. В публикуемой работе по схеме, изложенной в [1], получены асимптотические решения указанного уравнения, а также для всего диапазона изменения параметров задачи построено еще его численное решение. На основании условия плавного смыкания берегов трещины найдена величина предельной нагрузки. Получена оценка границы применимости формулы Гриффитса [2].

1. Пусть плоскость, ослабленная прямолинейной трещиной длиной $2a$, растягивается на бесконечности равномерными усилиями $\sigma_y = p$. Зависимость молекулярных сил сцепления σ_y от относительного удлинения ϵ_y в направлении оси y будем брать в виде [1]:

$$\sigma_y = 2\theta\epsilon_y g(\epsilon_y/d), \quad \theta = G(1-\nu)^{-1} \quad (1.1)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, d — величина деформации ϵ_y , соответствующая максимальному значению сил сцепления σ_p ; $g(x)$ — функция монотонно убывающая не медленнее, чем $x^{-\alpha}$ ($\alpha > 2$), и удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 1, \quad g(1) + g'(1) = 0, \quad d = \sigma_p [2\theta g(1)]^{-1} = \delta/b \quad (1.2)$$

В (1.2) b — нормальное межзатомное расстояние. Силы сцепления, возникающие между берегами трещины, будем считать внешними усилиями и вносить их в граничные условия задачи. Тогда граничные условия можно представить в виде ($y=0$):

$$\tau_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty), \quad \nu = 0 \quad (|x| > a) \quad (1.3)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_p}{g(1)} \left(1 + \frac{\Gamma}{\delta}\right) g\left(1 + \frac{\Gamma}{\delta}\right), \quad \Gamma(x) = 2\nu(x, +0) \quad (|x| \leq a)$$

где $\Gamma(x)$ — величина раскрытия трещины. На бесконечности $\sigma_y = p = \text{const}$.

Если пренебречь нелинейностью задачи в концевой области и считать, что в плоскости с разрезом справедливы уравнения линейной теории упругости, то решение уравнений Ламе с граничными условиями (1.3) приводит к следующему нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению (ИДУ) [1]:

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(\Gamma) - p \quad (|x| \leq 1, \Gamma(\pm 1) = 0) \quad (1.4)$$

$$f(\Gamma) = (1 + \Gamma) g(1 + \Gamma)/g(1)$$

Здесь введены безразмерные переменные и обозначения $\Gamma_* = \Gamma/\delta$, $p_* =$

$= p/\sigma_p$, $x_* = x/a$, $\lambda = b/(4ag(1))$. В (1.4) и далее звездочки опущены. Для определения условия, при котором начнется развитие трещины, используем гипотезу плавного смыкания берегов трещины [3]:

$$\Gamma'(\pm 1) = 0 \quad (1.5)$$

Отметим, что в случае тривиального решения ИДУ (1.4) $\Gamma = 0$ значение разрушающей нагрузки $p = 1$, что соответствует теоретической прочности материала.

Применение при малых λ асимптотического метода регулярных разложений к ИДУ (1.4) приводит к решению следующих сингулярных ИДУ [1] (δ_{mn} — символ Кронекера):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n'(\xi)}{\xi - x} d\xi + 2B_0 \Gamma_0(x) \Gamma_n(x) = A_n + \psi_n(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (1.6)$$

$$\psi_n(x) = B_n \Gamma_0^{n+2}(x) + [3B_1 \Gamma_0^2(x) \Gamma_1(x) - B_0 \Gamma_1^2(x)] \delta_{n2} \quad (1.7)$$

$$\Gamma_n(\pm 1) = \Gamma_n'(\pm 1) = 0 \quad (n = 0, 1, 2) \quad (1.8)$$

При этом

$$\Gamma(x) = \lambda [\Gamma_0(x) + \lambda \Gamma_1(x) + \lambda^2 \Gamma_2(x) + O(\lambda^3)] \quad (1.9)$$

$$p = 1 - \lambda^2 [A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + O(\lambda^3)] \quad (1.10)$$

Представление решения в форме (1.9) соответствует трещинам относительно малого раскрытия. Коэффициенты B_0, B_1, B_2 , входящие в формулы (1.6), (1.7), выражаются через производные функции $g(x)$ при $x = 1$ формулами (3.3) [1]. Коэффициенты A_n ($n = 0, 1, 2$) находятся из последнего условия (1.8), которое приводит к следующему представлению этих коэффициентов

$$A_n = \frac{2B_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0(x) \Gamma_n(x)}{R(x)} dx - d_n \quad (1.11)$$

$$R(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad d_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_n(x) dx}{R(x)}$$

Функцию $\Gamma_0(x)$ представим в виде

$$\Gamma_0(x) = D\varphi(x)/B_0 \quad (1.12)$$

Внося представление (1.12) в (1.6) и обращая затем сингулярный интегральный оператор, получим

$$\varphi'(x) = \frac{1}{R(x)} \left[x + \frac{D}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^2(\xi) R(\xi)}{\xi - x} d\xi \right] \quad (|x| \leq 1) \quad (1.13)$$

Из (1.11) — (1.13) найдем

$$D = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi^2(x) dx}{R(x)} \right\}^{-1} \quad (1.14)$$

Отметим, что решение уравнения (1.13), (1.14) $\varphi(x)$ не зависит от функции $g(x)$. Функция $g(x)$ влияет на значение коэффициента $A_0 = D/B_0$. Для решения уравнения (1.13), (1.14) применим метод ортогональных многочленов [4]. Функ-

цию $\varphi(x)$ с учетом ее нечетности будем искать в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода $T_n(x)$ с нечетными индексами

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{R(x)} \sum_{i=0}^{\infty} X_i T_{2i+1}(x) \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует

$$\varphi(x) = R(x) \sum_{i=0}^{\infty} X_i \frac{U_{2i}(x)}{2i+1} \quad (1.16)$$

где $U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода. Применение к (1.13), (1.14) процедуры метода ортогональных многочленов приводит к следующей системе уравнений для определения коэффициентов X_i разложений (1.15), (1.16):

$$X_i = -\delta_{i0} + \frac{2D}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi^2(\xi) U_{2i}(\xi) R(\xi) d\xi \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (1.17)$$

$$D = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{X_m}{2m+1} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (1.18)$$

Можно показать, что коэффициенты X_i , определяемые из соотношений (1.17), (1.18), удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_i = 0 \quad (1.19)$$

С этой целью следует просуммировать по i в пределах от 0 до ∞ члены, стоящие в левой и правой частях (1.17). При этом необходимо учесть (1.14), (1.16) и формулу [5]:

$$2R(x) \sum_{i=0}^{\infty} U_{2i}(x) = \frac{1}{R(x)}$$

Решение системы (1.17), (1.18) может быть получено методом последовательных приближений по схеме

$$X_{m+1,i} = -\delta_{i0} + \frac{2D_m}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_m^2(\xi) U_{2i}(\xi) R(\xi) d\xi \quad (1.20)$$

$$\varphi_m(x) = R(x) \sum_{n=0}^{M_m} X_{mn} \frac{U_{2n}(x)}{2n+1} \quad (1.21)$$

$$D_m = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M_m} \left(\frac{X_{mi}}{2i+1} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (m = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots, M_{m+1}) \quad (1.22)$$

$$M_0 = 0, \quad M_{m+1} = 2M_m + 1 \quad (m = 0, 1, \dots), \quad X_{00} = 1$$

При этом соотношение (1.19) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{M_m} X_{mi} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Это условие может быть использовано для контроля правильности определения коэффициентов X_{mi} . Вычисляя в (1.20) интеграл (после перехода к новой пере-

менной $\theta = \arccos x$ и использования формулы $R(x)U_n(x) = \sin(n+1)\theta$, приведем это уравнение к виду

$$X_{m+1,i} = -\delta_{i0} + \frac{D_m}{4} \sum_{k=0}^{M_m} \sum_{j=0}^{M_m} \frac{X_{mk} X_{mj}}{(2k+1)(2j+1)} (\delta_{k-j+i,0} + \delta_{j-k+i,0} + \delta_{k+j-i,0} - \delta_{k-j+i+1,0} - \delta_{j-k+i+1,0} - \delta_{k+j-i+1,0}) \quad (m=0, 1, \dots; i=0, 1, \dots, M_{m+1}) \quad (1.23)$$

Таким образом, приближенное решение ИДУ (1.6) при $n=0$ с учетом (1.12), (1.21) определяется рядом

$$\Gamma_0(x) = A_0 R(x) \sum_{i=0}^{M_m} X_{mi} \frac{U_{2i}(x)}{2i+1} \quad (1.24)$$

где m — число приближений по схеме (1.22), (1.23).

Решение линейных сингулярных ИДУ (1.6) при $n=1, 2$ методом ортогональных многочленов сводится к бесконечной линейной алгебраической системе. С целью получения этой системы функции $\Gamma_n'(x)$ ($n=1, 2$) представим в виде

$$\Gamma_n'(x) = -\frac{1}{R(x)} \sum_{i=0}^{\infty} Y_{ni} T_{2i+1}(x) \quad (1.25)$$

В этом случае

$$\Gamma_n(x) = R(x) \sum_{i=0}^{\infty} Y_{ni} \frac{U_{2i}(x)}{2i+1} \quad (1.26)$$

Применяя к (1.6) с учетом (1.25), (1.26) процедуру метода ортогональных многочленов, получим

$$Y_{nj} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ji} Y_{ni} - A_n \delta_{j0} - b_{nj} \quad (j=0, 1, \dots; n=1, 2) \quad (1.27)$$

$$C_{ji} = \frac{4B_0}{\pi(2i+1)} \int_{-1}^1 \Gamma_0(x) (1-x^2) U_{2i}(x) U_{2j}(x) dx \quad (1.28)$$

$$b_{nj} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 R(x) \psi_n(x) U_{2j}(x) dx \quad (1.29)$$

Можно показать, что если A_n ($n=1, 2$) брать в форме (1.11), то коэффициенты Y_{ni} , определяемые соотношениями (1.27)—(1.29), будут удовлетворять условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} Y_{ni} = 0 \quad (n=1, 2)$$

Выражая коэффициенты A_n ($n=1, 2$) через коэффициенты Y_{ni} с помощью (1.11) и учитывая разложения (1.24) и (1.26), найдем

$$A_n = D_m \sum_{i=0}^{M_m} X_{mi} Y_{ni} - d_n \quad (n=1, 2)$$

Внося полученное выражение коэффициентов A_n в систему (1.27), приведем ее к виду

$$Y_{nj} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ji} Y_{ni} - \delta_{j0} \left(D_m \sum_{i=0}^{M_m} X_{mi} Y_{ni} - d_n \right) - b_{nj} \quad (j=0, 1, \dots; n=1, 2) \quad (1.30)$$

Можно показать, что система (1.30) квазивполнерегулярна. Для установления этого факта достаточно получить следующие оценки коэффициентов C_{μ} :

$$|C_{\mu}| \leq \frac{a_1}{|i-j|(i+j+1)} \quad (i \neq j, \quad i, j \geq 0, \quad a_1 = \text{const} > 0)$$

$$|C_{\mu}| \leq \frac{(j+1)a_2}{(2j+1)^2} \quad (i = j, \quad a_2 = \text{const} > 0)$$
(1.31)

Для нахождения оценок (1.31) коэффициенты C_{μ} следует преобразовать к форме

$$C_{\mu} = \frac{4B_0}{\pi(2i+1)} \int_0^{\pi/2} \Gamma_0(\cos \theta) \sin \theta [\cos(2i-2j)\theta - \cos(2i+2j+2)\theta] d\theta$$

а затем применить формулу интегрирования по частям.

Рассмотрим случай

$$g(x) = e^{-x} \quad (1.32)$$

В результате непосредственных вычислений для этого случая получено $B_0 = 1/2$, $B_1 = 1/3$, $B_2 = 1/8$, $A_0 = 3,743$, $A_1 = 16,59$, $A_2 = 92,29$. Система (1.30) решалась методом редукции.

2. Применение к ИДУ (1.4) метода сращиваемых асимптотических разложений приводит задачу к решению следующего сингулярного ИДУ [1]:

$$q'(r) = -\frac{\sqrt{r}}{J} \int_0^{\infty} \frac{f(q) d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-r)} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.1)$$

$$J = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \frac{f(q) d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (2.2)$$

Функция $q(r)$ удовлетворяет условиям

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 0, \quad q(r) \sim \sqrt{2r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.3)$$

Предельная нагрузка p определяется формулой

$$p = (J/\pi)^{1/2} \quad (2.4)$$

Этот случай соответствует трещинам большой относительной длины и относительно большого раскрытия. Преобразуем ИДУ (2.1) к более удобной для получения решения форме. С этой целью продифференцируем по r левую и правую части уравнения (2.1). В результате приходим к следующему интегральному уравнению:

$$q(r) = \sqrt{2r} - \frac{1}{J} \int_0^{\infty} f(q) \ln \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{|\sqrt{\xi} - \sqrt{r}|} d\xi \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5), (2.2) может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$q_{n+1}(r) = \sqrt{2r} - \frac{1}{J_n} \int_0^{\infty} f(q_n) \ln \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{|\sqrt{\xi} - \sqrt{r}|} d\xi \quad (2.6)$$

$$J_n = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \frac{f(q_n)}{\sqrt{\xi}} d\xi \quad (n = 0, 1, \dots), \quad q_0(r) = \sqrt{2r}. \quad (2.7)$$

Для значения функции $g(x)$ в форме (1.32) по схеме (2.6), (2.7) получено $J = 8,00$. Формула (2.4) в этом случае принимает вид

$$p = (8,00\lambda/\pi)^{1/2} \quad (2.8)$$

При численном интегрировании в формуле (2.6) устранение логарифмической особенности проводилось с использованием значения интеграла 4,339 [5].

Отметим, что в данной задаче Гриффитсом найдено следующее выражение для определения предельной нагрузки p (в рассматриваемых здесь безразмерных величинах) [2]:

$$p = 2 \left(\frac{\lambda}{\pi g'(1)} \int_1^{\infty} x g(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

Эта формула найдена из условия

$$\frac{\partial}{\partial a} (U - W) = 0 \quad (2.10)$$

где U — поверхностная энергия трещины, W — энергия упругих деформаций. В случае (1.32) формула (2.9) принимает вид

$$p = (8\lambda/\pi)^{1/2} \quad (2.11)$$

3. Приближенное решение исходного ИДУ (1.4) может быть получено методом последовательных приближений с использованием ортогональных многочленов. При этом в качестве нулевого приближения следует брать для фиксированного значения λ одно из найденных выше асимптотических решений. Затем, меняя λ с относительно небольшим шагом, в качестве нулевого приближения следует брать решение уравнения (1.4), найденное для предыдущего значения λ .

С целью получения такого решения, обратив в уравнении (1.4) с учетом условия (1.5) сингулярный оператор, преобразуем это уравнение к виду

$$\Gamma'(x) = - \frac{R(x)}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma(\xi)) d\xi}{R(\xi)(\xi-x)} \quad (|x| \leq 1) \quad (3.1)$$

Условие (1.5) позволяет представить предельную нагрузку p в следующей форме

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma(x))}{R(x)} dx \quad (3.2)$$

Учитывая, что при $x \in [0, \infty)$ $\max |f(x)| = f(0) = 1$, можно показать, что величина p , определяемая формулой (3.2), не превосходит единицы. С этой целью достаточно оценить интеграл (3.2):

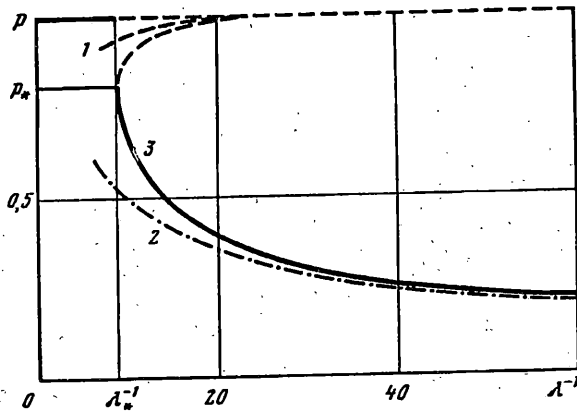
$$p \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|f(\Gamma)|}{R(x)} dx \leq \frac{1}{\pi} \max_{\Gamma} |f(\Gamma)| \int_{-1}^1 \frac{dx}{R(x)} = 1$$

Процесс последовательных приближений будем строить по схеме

$$\Gamma_{n+1}'(x) = - \frac{R(x)}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma_n(\xi)) d\xi}{R(\xi)(\xi-x)} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.3)$$

Как и выше, функции $\Gamma_n(x)$ представим в виде разложения по многочленам Чебышева

$$\Gamma_n(x) = R(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z_{ni}}{2i+1} U_{2i}(x) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.4)$$



где n — номер приближения. Из (3.3), (3.4) получим следующие уравнения для определения коэффициентов Z_n ($n = 0, 1, \dots$)

$$Z_{n+1,0} = -\frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{T_2(x) f(\Gamma_n)}{R(x)} dx \quad (3.5)$$

$$Z_{n+1,i} = -\frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{[T_{2i+2}(x) - T_{2i}(x)] f(\Gamma_n)}{R(x)} dx \quad (i \geq 1)$$

При непосредственных вычислениях по формулам (3.4), (3.5) функция $f(\Gamma_n)$ бралась в виде

$$f(\Gamma_n) = (1 + \Gamma_n) \exp(-\Gamma_n)$$

что соответствовало случаю (1.32). При этом в (3.4) удерживалось конечное число членов ряда.

На фигуре приведены результаты вычисления значений предельной нагрузки p , полученные по формулам (1.10), (2.8) и (3.2) (кривые 1, 2, 3 соответственно) при $g(x) = e^{-x}$. Нижняя ветвь кривой 3, при $\lambda_*^{-1} < \lambda^{-1}$ ($\lambda_* = 0,1125$, $p_* = 0,811$) соответствует реализуемым в действительности случаям. При $\lambda^{-1} < \lambda_*^{-1}$ (или $a < 6,04b$) предельная нагрузка равна 1, что соответствует разрушению по достижении теоретического предела прочности. При $\lambda^{-1} \geq 50$ расхождение значений p , полученных по формуле Гриффитса (2.11) и по формуле (3.2), не превышает 3%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16879).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотические методы в задаче Гриффитса // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 665—671.
2. Griffith A. A. The theory of rupture // Proc. First Int. Congr. Appl. Mech. Delft. 1924. P. 55—63.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3—41.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.