

УДК 539.375

© 1993 г. Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю. В. ЖИТНИКОВ

**ДЕФОРМАЦИЯ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ  
 ПРИ СДВИГОВОМ НАГРУЖЕНИИ**

Рассматривается деформация при сдвиговом нагружении линейно-упругой, изотропной среды, ослабленной изотропным распределением дискообразных трещин и деформация изотропной, линейно-упругой пластины с изотропным распределением разрезов при малой концентрации трещин. Поверхности трещин в процессе нагружения могут контактировать и взаимодействовать по закону сухого трения Кулона. Для описания деформирования трещиноватой среды используется метод [1].

Деформация трещиноватой среды в результате взаимодействия берегов трещин эффективно становится анизотропной [1—3], а в режиме нагрузка—разгрузка необратимой [2, 3]. Эти свойства проанализированы в [1—3] для случая сжимающих нагрузок, действующих вдоль главных осей. Случай сдвигового нагружения не рассматривался. Хотя при сжатии без учета силы трения [2—5], так же как и при растяжении [1], среда остается изотропной с эффективными модулями Юнга  $E$  и Пуассона  $\nu$ , отсюда не следует, что модуль сдвига  $\mu$  можно выразить через эффективные характеристики  $E, \nu$  по известному соотношению  $\mu = 1/2E/(1 + \nu)$ . Таким образом, возникает задача об исследовании наведенных деформационных свойств у трещиноватой среды при сдвиговой нагрузке, в общем случае с учетом сил сухого трения. Это тем более важно, что сдвиговой модуль упругости используется при определении скорости поперечных волн [6, 7].

В публикуемой работе вычисляется эффективная деформация среды с дискообразными трещинами, а также пластины, ослабленной разрезами, при сдвиговом нагружении с учетом предварительного сжатия. Проанализирована также деформация трещиноватой пластины при сдвиге с жестким стеснением. Показано, что при сдвиговом нагружении происходит увеличение объема трещиноватой среды, что является следствием наведенной анизотропии. При сдвиге со стеснением трещиноватой пластины напряженное состояние пластины и упругие характеристики взаимосвязаны и определяются в процессе деформирования. Часть трещин, несмотря на наличие жесткого стеснения, раскрывается, что обуславливает возможность их прорастания за счет отрыва. Существенная нелинейность деформирования при стеснении обусловлена наличием объемной деформации при сдвиге.

Наведенные анизотропные свойства трещиноватой среды экспериментально наблюдались в лабораторных [6] и натуральных условиях [7—9]. Деформационная кривая, соответствующая нагружению трещиноватой среды при сжатии в режиме нагрузка—разгрузка, полученная экспериментально, приведена в [9] и показывает необратимый характер деформирования.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в системе координат  $X_1, X_2, X_3$  задачу о деформировании изотропной, линейно-упругой среды, ослабленной плоскими трещинами в приближении малой их концентрации. На бесконечности заданы напряжения  $\sigma_{ik}(\theta)$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), где  $\theta$  — параметр нагружения. Запишем приращение эффективной деформации трещиноватой среды при вариации нагрузки [1—3]:

$$\delta \epsilon_{ik} = \delta \epsilon_{ik}^0(\theta) + \delta \epsilon_{ik}^c(\theta)$$

$$\delta \epsilon_{ik}^c(\theta) = \frac{N_0}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (n_k \delta V_i + n_i \delta V_k) \sin \varphi d\varphi \psi N(R) dR, \int_0^\infty N(R) dR = 1$$

$$\delta \varepsilon_{ik}^0 = S_{iklm}^0 \delta \sigma_{lm}$$

$$S_{iklm}^0 = -\frac{\nu_0}{E_0} \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{1 + \nu_0}{2E_0} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{kl} \delta_{im}) \quad (1.1)$$

где  $\delta \varepsilon_{ik}^0$  — приращение деформации сплошной среды без трещин,  $\nu_0$ ,  $E_0$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга сплошной среды,  $n_i = (\sin \varphi \cos \Psi, \sin \varphi \sin \Psi, \cos \varphi)$  — нормаль к трещине,  $\Psi$  — угол между плоскостями  $nX_3$  и  $X_1X_3$ ,  $\varphi$  — угол между  $n$  и  $X_3$ ,  $N_0$  — число трещин в единице объема,  $\delta V_i$  — компоненты приращения усредненного по площади скачка смещения.

Для дисковых трещин  $\delta V_i = I_{ilm} \delta \sigma_{lm}$ , где  $\delta \sigma_{lm}$  приращение напряжений и тензор  $I_{ilm}$  зависит от траектории нагружения на данной трещине. Подставляя это выражение в (1.1), получим формулу для эффективной деформации трещиноватой среды

$$\delta \varepsilon_{ik} = \delta \varepsilon_{ik}^0(\theta) + \delta \varepsilon_{ik}^c(\theta)$$

$$\delta \varepsilon_{ik}^c = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (n_k J_{ilm} + n_l J_{ikm}) \sin \varphi d\varphi d\psi \delta \sigma_{lm} \quad (1.2)$$

$$\Omega = N_0 \bar{R}^3, \quad \bar{R}^3 = \int_0^\infty N(R) R^3 dR, \quad I_{ilm} = R^3 J_{ilm}$$

Тензор  $J_{ilm}$  вычислен ниже для отдельной трещины.

Отметим важное следствие из (1.1): объемная деформация  $\varepsilon_v$  не зависит от траектории нагружения и определяется только нормальной компонентой скачка смещения на трещине  $V_i n_i$ . Действительно, после свертки в (1.2) получим

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^0 + \frac{N_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n_i V_i \sin \varphi d\varphi d\psi N(R) dR \quad (1.3)$$

Это утверждение верно, конечно, в случае плоских трещин не взаимодействующих между собой, когда происходит разделение полной задачи о скачке смещений на трещине на нормальную и сдвиговую и первая не зависит от второй [10].

Рассмотрим теперь деформацию изотропной линейно-упругой пластины, ослабленной системой прямолинейных трещин длины  $2l$ , берега которых могут взаимодействовать по закону сухого трения Кулона. Пусть  $\sigma_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) эффективные тензоры напряжений и деформаций трещиноватой пластины [1], соотношение между которыми определяется через приращение скачка смещений на трещине [3] аналогично (1.1). Тензор  $J_{ilm}$  связывает приращение скачка смещений, усредненного по длине трещины, и приращение напряжений:  $\delta V_i = J_{ilm} \delta \sigma_{lm}$ . Аналогично (1.2) получим

$$\delta \varepsilon_{ik} = \delta \varepsilon_{ik}^0 + \delta \varepsilon_{ik}^c, \quad \delta \varepsilon_{ik}^c = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^\pi (n_k J_{ilm} + n_l J_{ikm}) d\varphi \delta \sigma_{lm}$$

$$\delta \varepsilon_{ik}^0 = S_{iklm}^0 \delta \sigma_{lm}, \quad S_{iklm}^0 = -\frac{\nu_0}{E_0} \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{1 + \nu_0}{2E_0} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) \quad (1.4)$$

$$\Omega = N_0 \bar{l}^2, \quad \bar{l}^2 = \int_0^\infty N(l) l^2 dl, \quad \int_0^\infty N(l) dl = 1$$

где  $N_0$  — число трещин на единицу поверхности,  $J_{ilm}$  — зависит от ориентации трещин и определяется предысторией нагружения. Утверждение об объемной деформации, приведенное выше, здесь также имеет место.

Отсутствие еще одного пространственного направления позволяет вычислять выражение для эффективного тензора деформации трещиноватой среды пластины аналитически для различных траекторий нагружения.

Рассмотрим далее вопрос о вычислении изменения скачка смещения на трещине при произвольной нагрузке и тем самым установим вид тензора  $J_{im}$  для различных путей нагружения.

2. Вычисление изменения скачка смещения на трещине. Основой для описания деформации трещиноватой среды (см. (1.1)) является описание изменения скачка смещения на каждой трещине. В случае малой их концентрации такой анализ производится для отдельной трещины заданной ориентации при заданных на бесконечности нагрузках, а затем выполняется усреднение по распределению трещин. Изменение скачка смещения зависит от того, налегают поверхности трещины или они раскрыты, а если налегают, то возникает ли на них процесс скольжения или нет. Для того, чтобы определить имеет ли место налегание поверхностей трещины, вычислим на ее месте в сплошном материале нормальные к ее плоскости напряжения  $\sigma_n = \sigma_{ik}n_k$ . Если  $\sigma_n \geq 0$ , то произойдет раскрытие трещины, а при  $\sigma_n < 0$  — поверхности трещины налегают при заданных значениях  $\sigma_{ik}(\theta)$ .

В случае контакта поверхностей трещины выясним, возможно ли возникновение процесса скольжения ее поверхностей. Пусть  $\tau(\theta)$  — модуль сдвиговой силы в плоскости трещины. Тогда, если в процессе нагружения выполняется неравенство  $\tau > \rho|\sigma_n|$ , то на трещине имеет место процесс скольжения ее поверхностей. После того, как выделены ориентации трещин, у которых поверхности раскрыты или налегают, находятся в состоянии скольжения или сцепления, надо вычислить изменение скачка смещения в процессе нагружения. Если поверхности трещины не налегают (трещина раскрыта), то вычисление скачка смещения не представляет трудностей; последний определяется геометрией трещины и нагрузками на нее. В случае же контакта поверхностей трещины и возможного их скольжения вычисление изменения скачка смещения при нагружении представляет более сложную задачу, поскольку это изменение зависит не только от геометрии трещины, но и от траектории нагружения. Анализ изменения скачка смещения для отдельной трещины в общем случае выполнен в [10], а в случае эллиптической трещины — в [11].

Для дискообразных трещин в заданной системе координат  $X_1X_2X_3$  имеем [11]:

$$\delta v_i = R^3 J_{im} \delta \sigma_{im} \quad (2.1)$$

$$J_{im} = B_1 n_i n_m n_l + B_2 ( (\delta_{il} n_m - n_l n_m n_i) - \rho n_l n_m \tau_i )$$

где  $\tau_i$  — единичный вектор, определяющий направление скольжения. Соответственно, приращение скачка смещения на трещине  $\delta v_i = R^3 J_{im} \delta \sigma_{im}$ .

Если трещина раскрыта, то в выражении (2.1) следует положить  $\rho = 0$ , если же закрыта —  $B_1 = 0$ . Параметры  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\tau_i$  зависят от ориентации трещины и вычисляются в процессе нагружения:  $B_1 = B_1(\psi, \varphi, \theta)$ ,  $B_2 = B_2(\psi, \varphi, \theta)$ ,  $\tau_i = \tau_i(\psi, \varphi, \theta)$ .

Таким образом, выражение для тензора  $J_{im}$ , найдено, что позволяет, пользуясь (1.2), вычислять деформацию трещиноватой среды для заданного процесса нагружения  $\sigma_{ik}(\theta)$ .

В случае пластины, ослабленной разрезами длиной  $2l$  аналогично получим

$$\delta v_i = - l^2 \delta \sigma_{im} [ B_1 n_l n_m n_i + B_2 ( \tau_l n_m + \rho_0 n_l n_m ) \tau_i ]$$

где  $B_1 = B_2 = 1/4 \pi (\chi + 1) / \mu_0$  — согласно решению задачи о скачке смещения для разреза [12],  $\chi = (3 - \nu_0) / (1 + \nu_0)$ ,  $\tau_i = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\rho_0 = \pm \rho$ , знак ( $\pm$ ) зависит от направления смещения, которое происходит в сторону противоположную

направлению сдвиговой силы. Если трещина закрыта, то  $B_1 \equiv 0$ . Если отсутствует сдвиг на трещине, то  $B_2 \equiv 0$ , а если трещина раскрыта, то  $\rho_0 \equiv 0$ . В результате

$$\delta v_i = -\rho^2 J_{im} \delta \sigma_{im}, \quad J_{im} = B_1 n_i n_m + B_2 (\tau n_m + \rho_0 n_i n_m) \tau$$

$$B_1 = B_1(\varphi, \theta), \quad B_2 = B_2(\varphi, \theta) \quad (2.2)$$

Таким образом, используя выражение для тензора  $J_{im}$  и вычисляя коэффициенты  $B_1, B_2$  для заданной траектории нагружения и каждой трещины, получим, подставляя в (1.4), деформацию трещиноватой пластины. Заметим, что в частном случае плоской задачи теории упругости угол скольжения на трещине принимает только два значения 0 и  $\pi$ , что значительно облегчает вычисления.

3. Примеры расчета деформации трещиноватой среды при различных траекториях нагружения; пространственный случай. При вычислении деформации трещиноватой среды согласно (1.2) необходимо знать тензор  $J_{im}$  для каждой трещины, который выражается через коэффициенты  $B_1, B_2$ , вычисляемые по алгоритму [10, 11]. Ниже приведены результаты расчетов по этому алгоритму для конкретных случаев нагружения.

Рассмотрим случай сдвигового нагружения  $\sigma_{ik} = \tau (i \neq k)$ , для примера возьмем  $i = 1, k = 2$  среды, ослабленной изотропным распределением дискообразных трещин радиуса  $R$  с учетом сил трения. По алгоритму [10, 11], переходя к краевым условиям на трещине, определим скачок смещения в зависимости от  $\tau$ . Заметим, что в этом случае сдвиговая нагрузка  $F_i$  на трещине пропорциональна  $\tau$ :  $F_i = -\sigma_{im} (n_m \delta_{ii} - n_i n_m n_i)$  и следовательно, угол скольжения на трещине не меняется в процессе нагружения. В итоге, после вычислений, определим коэффициенты  $B_1, B_2$ :

$$\text{раскрытие: } B_1 = 16 (1 - \nu_0^2) / E_0, \quad B_2 = B_2^* = 32 (1 - \nu_0^2) / [3E_0 (2 - \nu_0)],$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \pi \leq \psi \leq 3/2\pi \text{ и } 0 \leq \psi \leq 1/2\pi;$$

$$\text{налегание: } B_1 = 0, \quad B_2 = B_2^*, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 3/2\pi \leq \psi \leq 2\pi \text{ и } 1/2\pi \leq \psi \leq \pi;$$

$$\text{скольжение: } B_1 = 0, \quad B_2 = B_2^*, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta; \quad 1/2\pi \leq \psi \leq \pi \text{ и } 3/2\pi \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = B_2^*, \quad \beta \leq \varphi \leq \pi - \beta$$

и угол  $\psi$  лежит в следующих пределах:  $1/2\pi \leq \psi \leq 1/2(\pi + \psi_1)$ ,  $\pi - 1/2\psi_1 \leq \psi \leq \pi$ ,  $3/2\pi \leq \psi \leq 3/2\pi + 1/2\psi_1$ ,  $2\pi - 1/2\psi_1 \leq \psi \leq 2\pi$ ;

сцепление:  $B_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad \beta \leq \varphi \leq \pi - \beta; \quad 1/2(\pi + \psi_1) \leq \psi \leq \pi - 1/2\psi_1$  и  $3/2\pi + 1/2\psi_1 \leq \psi \leq 2\pi - 1/2\psi_1, \quad \text{tg } \beta = \rho^{-1}, \quad \sin 2\psi_1 = [(1 + \rho^2) \sin \varphi]^{-1}$

Заметим, что количество трещин, поверхности которых находятся в состоянии сцепления при  $\beta \leq \varphi \leq \pi - \beta$ , мало и в дальнейшем им можно пренебречь.

Подставляя эти выражения в (2.1), а затем используя (1.2), вычислим деформацию среды

$$\varepsilon_v = \frac{32 \Omega (1 - \nu_0^2) \tau}{5\pi E_0}, \quad \Omega = N_0 R^3$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{64 \Omega (1 - \nu_0^2) \tau}{15\pi E_0}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{32 \Omega (1 - \nu_0^2) \tau}{15\pi E_0}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \frac{16 \Omega \tau D (1 - \nu_0^2)}{15 E_0} \quad (3.1)$$

$$D = 1 + \frac{4 + 5(1 - \cos \beta) - (1 - \cos \beta)^5 - 20\rho\Phi(\beta)/\pi}{4(2 - \nu_0)}$$

$$\Phi(\beta) = \int_{\sqrt{2}\pi}^{\pi} \int_0^{\beta} \sin^4 \varphi \sin 2\psi (1 - \sin^2 \varphi \sin 2\psi)^{1/2} d\varphi d\psi$$

Деформации  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$  не зависят от сил трения, поскольку сдвиг на трещинах не влияет на объемную деформацию, так как всегда имеются трещины, для которых скачки сдвиговых смещений направлены в противоположные стороны и их вклад в объемные деформации взаимно компенсируется.

Таким образом, рассчитана деформация среды с дисковыми трещинами при сдвиговом нагружении с учетом сил трения. Связь между  $\epsilon_v$  и  $\epsilon_{12}$  зависит от коэффициента трения, и с учетом (3.1) имеет вид

$$\epsilon_v = \Lambda \epsilon_{12}, \quad \Lambda = 32\Omega(1 - \nu_0) \left[ 1 - \frac{16}{15}(1 - \nu_0)\Omega D \right]$$

Наличие сил сухого трения на трещинах определяет возможную остаточную деформацию как объемную, так и сдвиговую при прекращении нагружения, а также необратимость при разгрузке. Это особенно необходимо учитывать при деформации со стеснением или при деформации с учетом всестороннего сжатия, что имеет место при деформации горных пород в натурных условиях. Ниже рассмотрены примеры подобного рода нагружения в случае плоской деформации.

**4. Примеры расчета деформации трещиноватой среды; плоский случай.** Рассмотрим теперь деформацию изотропной пластины, ослабленной изотропным распределением трещин длины  $2l$  с плотностью  $N_0$  с учетом сил сухого трения. В этом случае можно получить аналитические выражения для деформации трещиноватой среды и рассмотреть процесс нагружения при заданной деформации.

Рассмотрим деформацию трещиноватой среды при нагружении

$$\sigma_{ik} = -p(\theta)\delta_{ik} + \tau(\theta)(\delta_{i1}\delta_{k2} + \delta_{i2}\delta_{k1})$$

по следующей траектории нагружения: сначала сжатие до величины  $\sigma_{ik} = -p(\theta)\delta_{ik}$ , а затем сдвиг  $\sigma_{ik} = \tau(\theta)(\delta_{i1}\delta_{k2} + \delta_{i2}\delta_{k1})$ ;  $p(0) = 0$ ,  $\tau(0) = 0$ .

Из симметрии  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ , тогда, поскольку  $\epsilon_v = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ , имеем  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_v/2$  и, следовательно,  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  также не зависят от пути нагружения, как и объемная деформация  $\epsilon_v$ . Предыстория нагружения, связанная с наличием сил трения, будет влиять только на  $\epsilon_{12} = \epsilon_{12}(\theta)$ .

Используя условие возникновения скольжения на трещине по алгоритму п. 2, вычислим коэффициенты  $B_1$ ,  $B_2$ :

$$0 \leq \tau \leq \rho p (1 + \rho^2)^{-1/2}$$

$$\text{сцепление: } B_1 = B_2 = 0, \quad \rho_0 = \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$

$$\rho p (1 + \rho^2)^{-1/2} \leq \tau \leq \rho p$$

$$\text{скольжение: } B_1 = 0, \quad B_2 = B, \quad \rho_0 = \rho, \quad 3/4\pi \leq \varphi \leq \pi + 1/2(\beta - \varphi_2); \quad B_1 = 0, \\ B_2 = B, \quad \rho_0 = -\rho, \quad 1/2(\pi + \varphi_2 - \beta) \leq \varphi \leq 3\pi/4;$$

$$\text{сцепление: } B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \rho_0 = \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \varphi_2 - \beta), \\ \pi + 1/2(\beta - \varphi_2) \leq \varphi \leq \pi; \quad \rho p \leq \tau \leq \rho;$$

$$\text{скольжение: } B_1 = 0, \quad B_2 = B, \quad \rho_0 = \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 1/2(\beta - \varphi_2); \quad 3/4\pi \leq \varphi \leq \pi; \quad B_1 = 0, \\ B_2 = B, \quad \rho_0 = -\rho, \quad 1/2(\pi + \varphi_2 - \beta) \leq \varphi \leq 3/4\pi;$$

$$\text{сцепление: } B_1 = B_2 = 0, \quad \rho_0 = \rho, \quad 1/2(\beta - \varphi_2) \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \varphi_2 - \beta); \quad p \leq \tau \leq \infty; \\ \text{скольжение: } B_1 = 0, \quad B_2 = B, \quad \rho_0 = \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 1/2(\beta - \varphi_2), \quad \pi - 1/2\varphi_c \leq \varphi \leq \pi; \\ B_1 = 0, \quad B_2 = B, \quad \rho_0 = -\rho, \quad 1/2(\pi + \varphi_2 - \beta) \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \varphi_c);$$

раскрытие:  $B_1 = B_2 = B$ ,  $\rho_0 = 0$ ,  $1/2(\pi + \varphi_c) \leq \varphi \leq \pi - 1/2\varphi_c$ ;  
 $B = 1/4\pi(\kappa + 1)/\mu_0$ ,  $\sin \varphi_2 = \rho p / [(1 + \rho^2)^{1/2} \tau]$ ,  $\sin \varphi_c = p/\tau$ .

Используя выражение тензора  $J_{um}$  через  $B_1, B_2$  (2.2), вычислим сдвиговую деформацию  $\varepsilon_{12}$ :

$$0 \leq \tau \leq \rho p / (1 + \rho^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0, \quad \rho p / (1 + \rho^2)^{1/2} \leq \tau \leq \rho p$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 1/4B\Omega [\tau(1/2\pi + \beta - \varphi_2) + 1/2\tau \sin 2(\beta - \varphi_2) - \\ - \rho(2p(1 + \sin 2(\beta - \varphi_2)) - \tau(1 + \cos 2(\varphi_2 - \beta))/2)]/\pi$$

$$\rho p \leq \tau \leq p$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 1/4\Omega B [\tau(1/2\pi + \beta - \varphi_2) + 1/2\tau \sin 2(\beta - \varphi_2) - \\ - \rho(2p(1 + \sin(\beta - \varphi_2)) - \tau(1 + \cos 2(\varphi_2 - \beta))/2)]/\pi, \quad \tau \geq p$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 1/4\Omega B [\tau(\pi + \beta - \varphi_c - \varphi_2) + \tau(\sin 2(\beta - \varphi_2)/2 + 1/2 \sin 2\varphi_c) - \\ - 2p \cos \varphi_c - \rho(2p \sin 2(\beta - \varphi_2) + \sin \varphi_c) + \tau(\cos 2\varphi_c - \cos 2(\beta - \varphi_2))/2]/\pi$$

Объемная деформация  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  имеет вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_v/2 = \varepsilon_{11}^0 - 1/4B\Omega p(\pi - 2\varphi_c)/\pi + 1/2B\Omega \cos \varphi_c/\pi$$

$$\sin \varphi_c = p/\tau, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 3/2B\Omega \tau, \quad p \geq \tau \quad (4.1)$$

В частном случае отсутствия силы трения ( $\rho = 0$ ) имеем

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 1/4B\Omega [\tau(3/2\pi - \varphi_c + 1/2 \sin 2\varphi_c) - 2p \cos \varphi_c]/\pi, \quad p \leq \tau$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + 3/8B\Omega \tau, \quad p \geq \tau$$

Таким образом, рассмотрена деформация среды при нагружении в режиме предварительного сжатия и сдвиговой нагрузки. Характер деформирования зависит от уровня всестороннего сжатия  $p$  и изображен на фигуре. Все кривые деформирования находятся между двумя:  $\cos \beta p > \tau$  (когда на трещинах не возникает скачка смещений) и  $p = 0$ .

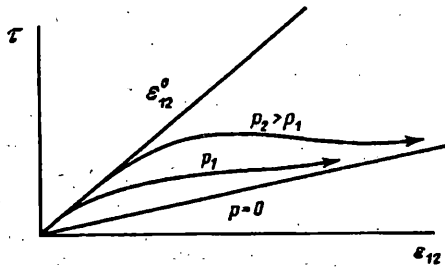
Рассмотрим другой пример — деформацию трещиноватой среды при сдвиге со стеснением. В качестве условия стеснения примем, что объемная деформация отсутствует  $\varepsilon_v = 0$ , а  $\varepsilon_{12} = \varepsilon(\theta)$ , т. е. сдвиговая деформация осуществляется в «жестком ящике». В этом случае от стенок «ящика» будет возникать реакция в виде  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = -p \leq 0$  или  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0$ , если  $\varepsilon_v$  станет  $\varepsilon_v < 0$ . При заданной деформации  $\varepsilon_{12}$  необходимо определить напряженное состояние  $\sigma_{ik}$  в зависимости от  $\varepsilon$ . Представим  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau(\delta_{11}\delta_{k2} + \delta_{22}\delta_{k1})$ , где  $p$  и  $\tau$  неизвестные напряжения сдвига и сжатия.

Как уже было сказано выше, объемная деформация не зависит от условий трения и, следовательно, определится по формуле (4.1). Используя условие стеснения  $\varepsilon_v = 0$ , получим уравнение относительно давления  $p$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_c = 1/A(\varphi_c), \quad A(\varphi_c) = 1/2\pi - \varphi_c + 1/2(1 - \nu_0)/\Omega \quad (4.2)$$

Поскольку  $\sin \varphi_c = p/\tau$ , то, обозначая через  $\varphi_c^*$  корень уравнения (4.2), получим линейную связь между  $p$  и  $\tau$ :  $p = \tau \sin \varphi_c^*$  и  $dp/d\tau = \text{const}$ . Для определения  $p$ ,  $\tau$  необходимо вычислить сдвиговую деформацию среды через  $p$ ,  $\tau$ . Используя алгоритм п. 2, найдем коэффициенты  $B_1, B_2$  и, подставляя их в выражение (2.2) для  $J_{um}$ , вычислим деформацию  $\varepsilon_{12}$  сдвига по (1.4):

В области налегания поверхностей трещины:  $B_1 = 0$ , при  $\varphi \in [\pi - 1/2\varphi_c^*, \pi]$ ,



$[0, 1/2(\pi + \varphi_c^*)]$ ;  $B_2 = B$ ,  $\rho_0 = \rho$ ,  $\varphi \in [0, 1/2(\beta - \chi)]$ ,  $[\pi - 1/2\varphi_c^*, \pi]$ ;  $B_2 = B$ ,  $\rho_0 = -\rho$ ,  $\varphi \in [1/2\pi - 1/2(\beta - \chi), 1/2(\pi + \varphi_c^*)]$ .

В области раскрытия:  $B_1 = B_2 = B$ ,  $\rho_0 = 0$

$$\varphi \in [1/2(\pi + \varphi_c^*), \pi - 1/2\varphi_c^*], \sin \chi = \rho(1 + \rho^2)^{-1/2} \sin \varphi_c^*$$

$$\varepsilon_{12}(\theta) = \varepsilon_{12}^0(\theta) + \varepsilon_{12}^c(\theta), \quad \varepsilon_{12}^0 = 1/2\tau/\mu_0, \quad \varepsilon_{12}^c = 1/4\Omega\tau BW/\pi$$

$$W = \pi - \varphi_c^* + \beta - \chi + 1/2 \sin 2(\beta - \chi) - 1/2 \sin 2\varphi_c^* - \\ - 2\rho \sin \varphi_c^* (\sin \varphi_c^* + \sin(\beta - \chi)) + \rho (\cos 2(\beta - \chi) - \cos 2\varphi_c^*)$$

Выразим отсюда  $\mu(\theta)$  через  $\varepsilon_{12} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1/2\tau/\mu(\theta)$ :

$$\mu(\theta) = \mu_0(1 - 1/2B\Omega\mu_0 W/\pi)$$

Используя соотношение  $\mu(\theta)$ , получим, подставляя в соотношение  $p = \tau \sin \varphi_c^*$ , выражение для давления  $p = 2\mu\varepsilon \sin \varphi_c^*$ . Таким образом, определено напряженное состояние трещиноватой среды при сдвиге. Хотя объемная деформация отсутствует, трещины ориентированные так, что  $1/2(\pi + \varphi_c^*) \leq \varphi \leq \pi - 1/2\varphi_c^*$  раскрыты и возможно их развитие, как трещин отрыва. При этом количество раскрытых трещин не изменяется в процессе нагружения.

Рассмотрим теперь процесс разгрузки  $d\varepsilon/d\theta < 0$  после нагружения до значения  $\varepsilon_1 = \varepsilon(\theta_1)$ , что соответствует  $\tau_1 = 2\mu\varepsilon_1$ . Поскольку объемная деформация не зависит от сдвиговой, то ориентация трещин, у которых произошло раскрытие, будет определяться уравнением (4.2), связь между давлением  $p$  и сдвиговой нагрузкой  $\tau$  сохранится  $p = \tau \sin \varphi_c^*$ , где  $\varphi_c^*$  решение уравнения (4.2). При уменьшении сдвига  $d\varepsilon/d\theta < 0$ ,  $\tau$  тоже будет уменьшаться  $\delta\tau = 2\mu\delta\varepsilon$ . Условие возникновения возвратных смещений на трещинах в областях контакта определится (2.1). Поскольку  $p = \tau \sin \varphi_c^*$ , по алгоритму п. 2 найдем коэффициенты  $B_1, B_2$ :

$$\tau^* \leq \tau \leq \tau_1$$

скольжение:  $B_1 = 0, B_2 = B, \rho_0 = \rho, \pi - 1/2\varphi_c^* \leq \varphi \leq \pi - 1/2(\chi_2 - \chi_1); B_1 = 0, B_2 = B, \rho_0 = -\rho, 1/2(\pi + \chi_2 - \chi_1) \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \varphi_c^*)$ ;

сцепление:  $B_1 = B_2 = 0, \rho_0 = \rho, \pi - 1/2\varphi_c^* \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \chi_2 - \chi_1)$ ;

раскрытие:  $B_1 = B_2 = B, 1/2(\pi + \varphi_c^*) \leq \varphi \leq \pi - 1/2\varphi_c^*, \rho_0 = 0, 0 \leq \tau \leq \tau^*$ ;

скольжение:  $B_1 = 0, B_2 = B, \rho_0 = \rho, 0 \leq \varphi \leq 1/2(\chi_1 - \chi_2), \pi - 1/2\varphi_c^* \leq \varphi \leq \pi$ ;

$B_1 = 0, B_2 = B, \rho_0 = -\rho, 1/2(\pi + \chi_2 - \chi_1) \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \varphi_c^*)$ ;

сцепление:  $B_1 = B_2 = 0, \rho_0 = \rho, 0 \leq \varphi \leq 1/2(\pi + \chi_2 - \chi_1)$ ;

раскрытие:  $B_1 = B_2 = B$ ,  $\rho_0 = 0$ ,  $1/2 (\pi + \varphi_c^*) \leq \varphi \leq \pi - \varphi_c^*$ ;  $\tau^* = \tau_1(1 - \rho \sin \varphi_c^*) \times (1 + \rho \sin \varphi_c^*)^{-1}$ ,  $\sin \chi_2 = \sin \varphi_c^* \cos \chi_1$ ,  $\sin \chi_1 = (\tau_1 - \tau) [(\tau_1 - \tau)^2 + \rho^2(\tau + \tau_1)^2]^{-1/2}$ .

Подставим полученные выражения для  $B_1, B_2$  в тензор  $J_{um}$  (2.2), а затем по (1.4) вычислим деформацию  $\varepsilon_{12}$ :

$$\varepsilon_{12}(\theta) = \varepsilon_{12}(\theta_1) + \Delta \varepsilon_{12}(\theta), \quad \Delta \varepsilon_{12} = \Delta \varepsilon_{12}^0 + \Delta \varepsilon_{12}^c, \quad \Delta \varepsilon_{12}^0 = 1/2 \Delta \tau / \mu, \quad \Delta \tau = \tau - \tau_1$$

$$\Delta \varepsilon_{12}^c = \frac{\Omega B}{4\pi} \left[ (\tau - \tau_1) \left( \pi - \varphi_c^* + \chi_1 - \chi_2 - \frac{\sin 2\varphi_c^*}{2} - \frac{\sin 2(\chi_2 - \chi_1)}{2} \right) - \right. \\ \left. - \rho (\tau + \tau_1) (2 \sin \varphi_c^* (\sin \varphi_c^* - \sin(\chi_2 - \chi_1)) - (\cos 2(\chi_2 - \chi_1) - \cos 2\varphi_c^*)) \right] / 2, \\ \tau^* \leq \tau \leq \tau_1$$

$$\Delta \varepsilon_{12}^c(\theta) = 1/4 \Omega B [ (\tau - \tau_1) (\pi - \varphi_c^* - 1/2 \sin 2\varphi_c^*) - (\tau + \tau_1) \rho (2 \sin \varphi_c^* (\sin \varphi_c^* + \sin(\chi_1 - \chi_2)) - 1/2 (\cos 2(\chi_1 - \chi_2) - \cos 2\varphi_c^*)) ] / \pi, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^*$$

Из этого выражения можно видеть, что при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\Delta \varepsilon_{12}^c \rightarrow \Delta \varepsilon_{12}^c(\theta_1)$ ,  $\Delta \varepsilon_{12}(\theta) \rightarrow 0$ , при полной разгрузке деформация трещиноватой среды исчезает.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149—158.
2. Житников Ю. В., Тулинов Б. М. Расчет деформационных свойств твердого тела с закрытой трещиноватостью в сложнапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 117—124.
3. Житников Ю. В., Тулинов Б. М. Деформационные характеристики среды, ослабленной трещинами со взаимодействующими берегами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 44—45.
4. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. No. 2. P. 399—411.
5. Walsh J. B. The effect of cracks on the compressibility of rocks. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. No. 2. P. 381—399.
6. Nur A. Seismic velocities in low porosity rocks. // Source mechanism and earthquake prediction. Paris. 1980. P. 71—98.
7. Рикитакэ Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1979. 388 с.
8. Чесноков Е. М. Сейсмическая анизотропия верхней мантии Земли. М.: Наука, 1977. 144 с.
9. Гудман Р. Механика скальных пород. М.: Стройиздат, 1987. 232 с.
10. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141—148.
11. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Напряженное состояние упругой среды, ослабленной эллиптической трещиной со взаимодействующими поверхностями при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 126—132.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VIII.1991