

УДК 539.3

© 1993 г. А. Г. ГОРШКОВ, А. Л. МЕДВЕДСКИЙ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

**ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПАРАМЕТРЫ
 НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ**

В настоящее время растет число публикаций, в которых рассматриваются нестационарные контактные задачи для упругого полупространства. Задача о вертикальном внедрении в упругое и акустическое полупространство абсолютно твердого ударника при постоянной скорости движения последнего исследована в [1]. Интегральные представления для контактного давления на начальном участке внедрения гладкого цилиндра в упругое полупространство в условиях свободного проскальзывания найдены в [2].

В публикуемой работе дается постановка плоских нестационарных контактных задач для гладких выпуклых абсолютно твердых тел и упругого полупространства в условиях свободного проскальзывания и жесткого сцепления контактирующих поверхностей. Для начального этапа взаимодействия построен ряд аналитических решений, а также проанализировано влияние граничных условий задачи на кинематические параметры ударника и распределение контактных напряжений.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается линейно упругое однородное изотропное полупространство, граница которого в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ совпадает с плоскостью $x_1 = 0$. Ось Ox_1 направлена в глубь полупространства, ось Ox_2 — вдоль свободной поверхности.

Введем безразмерные параметры (штрих далее везде опущен)

$$x'_i = \frac{x_i}{L_0}, \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L_0}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{L_0^2}$$

$$\Psi' = \frac{\Psi}{L_0^2}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L_0}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tag{1.1}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu} \quad (i, j = 1, 2)$$

где λ, μ, ρ — коэффициенты Ламе и плотность среды, L_0 — характерный размер ударника, u_i — компоненты вектора перемещений точек полупространства, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, Φ и Ψ — продольный потенциал и ненулевая компонента поперечного потенциала, c_1 и c_2 — скорости волн расширения — сжатия и формоизменения.

В плоской задаче теории упругости уравнения движения относительно потенциалов Φ и Ψ имеют вид [3]:

$$\ddot{\Phi} = \Delta\Phi, \quad \gamma^2 \ddot{\Psi} = \Delta\Psi, \quad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 \tag{1.2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени τ .

Ненулевые компоненты вектора перемещений и тензора деформаций связаны с упругими потенциалами известными зависимостями [3]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial\varphi/\partial x_1 + \partial\psi/\partial x_2, \quad u_2 = \partial\varphi/\partial x_2 - \partial\psi/\partial x_1 \\ \sigma_{11} &= \partial u_1/\partial x_1 + \kappa \partial u_2/\partial x_2, \quad \sigma_{22} = \partial u_2/\partial x_2 + \kappa \partial u_1/\partial x_1 \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В начальный момент времени $\tau=0$ возмущения в среде отсутствуют.

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.4)$$

Ищется решение ограниченное на бесконечности ($r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$):

$$\varphi(r, \tau) = O(1), \quad \psi(r, \tau) = O(1) \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Пусть абсолютно твердое тело (в дальнейшем ударник), ограниченное гладкой выпуклой цилиндрической поверхностью Π , в начальный момент времени $\tau=0$ касается границы полупространства так, что ось $Ox_3 \in \Pi$. Введем связанную с ударником систему главных центральных осей $O_1y_1y_2y_3$. Уравнение направляющей цилиндра в связанной системе координат имеет вид $f(y_1, y_2) = 0$. Тогда уравнения движения ударника в безразмерном виде можно записать в форме [4]:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_c &= R_c + R, \quad I\ddot{\theta} = M_c + M \\ u_c|_{\tau=0} &= u_{c0}, \quad \dot{u}_c|_{\tau=0} = V_{c0}, \quad \theta|_{\tau=0} = \theta_0, \quad \dot{\theta}|_{\tau=0} = \omega_0 \\ m' &= \frac{m}{\rho L_0^3}, \quad I' = \frac{I}{\rho L_0^5}, \quad u_c' = \frac{u_c}{L_0}, \quad \dot{u}_c' = \frac{\dot{u}_c}{c_1} \\ \omega' &= \frac{\omega}{c_1 L_0}, \quad R' = \frac{R}{(\lambda + 2\mu) L_0^2}, \quad M' = \frac{M}{(\lambda + 2\mu) L_0^3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где m, I — масса и главный момент инерции ударника; u_c, θ — вектор смещения центра масс и угол поворота ударника вокруг центра масс; $u_{c0}, \theta_0, \omega_0$ — начальные значения кинематических параметров ударника; R_c, M_c и R, M — соответственно внешние и контактные силы и моменты, действующие на тело (штрих далее везде опущен).

В линейной постановке граничные условия могут быть снесены на невозмущенную поверхность полупространства S . Также будем предполагать, что область контакта $\Omega(\tau) \subset S$ односвязна. В силу сделанных предположений, область контакта $\Omega(\tau)$ представляет собой отрезок $[b_1(\tau), b_2(\tau)] \subset S$, причем $b_j(\tau)$ ($j=1, 2$) определяется из условия пересечения направляющей ударника с осью Ox_2 :

$$\partial\Omega(\tau) = \{b_j(\tau) : g(0, b_j(\tau), \tau) = 0, \quad j = 1, 2\} \quad (1.7)$$

где $g(x_1, x_2, \tau)$ — уравнение направляющей ударника в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Переход из системы координат $O_1y_1y_2y_3$ в $Ox_1x_2x_3$ осуществляется известным образом с помощью ортогональной матрицы поворота [4]:

$$X = CY + u_c, \quad X^T = (x_1, x_2), \quad Y^T = (y_1, y_2)$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Введем в рассмотрение минимальное значение скорости изменения границы области контакта $d\Omega(\tau)$:

$$\dot{b}_{\min}(\tau) = \min \{\dot{b}_1(\tau), \dot{b}_2(\tau)\} \quad (1.9)$$

Можно показать, что для ударников, ограниченных алгебраическими поверхностями выше второго порядка, на некотором начальном (сверхзвуковом) этапе взаимодействия $b_{\min}(\tau) \geq c_1$ и возмущения не выходят за пределы $\partial\Omega(\tau)$. В этом случае граничные условия носят несмешанный характер, что позволяет в явном виде связать контактные реакции и кинематические параметры ударника. В дальнейшем ограничимся рассмотрением сверхзвукового этапа взаимодействия.

Рассмотрим два предельных случая контакта ударника и полупространства, причем граничные условия будем формулировать в скоростях.

Задача 1. Контакт в условиях свободного проскальзывания

$$\dot{u}_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0}, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \in \Omega(\tau) \quad (1.10)$$

$$\dot{u}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \notin \Omega(\tau)$$

Задача 2. Контакт в условиях жесткого сцепления

$$\dot{u}_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0}, \quad \dot{u}_2(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_2(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0};$$

$$x_2 \in \Omega(\tau) \quad (1.11)$$

$$\dot{u}_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0, \quad \dot{u}_2(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \notin \Omega(\tau)$$

В выражениях (1.10), (1.11) введем следующие обозначения: \dot{u}_i, V_i ($i=1, 2$) — проекции вектора скорости точек полупространства и вектора скорости точек поверхности ударника на оси Ox_i ($i=1, 2$) соответственно.

Из общих теорем кинематики абсолютно твердого тела следует [5]:

$$V_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_{c1} - \omega(x_2 - u_{c2}), \quad V_2(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_{c2} - \omega u_{c1} \quad (1.12)$$

где u_{ci} ($i=1, 2$) — компоненты вектора перемещений центра масс ударника в системе координат $Ox_1x_2x_3$; $V_{ci} = \dot{u}_{ci}$ ($i=1, 2$).

2. Функции влияния. Для контактных задач 1, 2 рассмотрим ненулевые компоненты тензора функций влияния $\Phi_{ikj}^{(m)}(x_2, \tau)$ соответствующие следующим сосредоточенным кинематическим возбуждениям полупространства (верхний индекс означает номер задачи).

Задача 1. Функция влияния

$$\Phi_{111}^{(1)}(x_2, \tau) = \sigma_{110}(x_2, \tau) = \sigma_{11}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} \quad (2.1)$$

при кинематическом возбуждении

$$\dot{u}_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = \delta(x_2) \delta(\tau), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0 \quad (2.2)$$

Задача 2. Функции влияния

$$\Phi_{11j}^{(2)}(x_2, \tau) = \sigma_{1j0}(x_2, \tau) = \sigma_{1j}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} \quad (j=1, 2) \quad (2.3)$$

при кинематических возбуждениях

$$\dot{u}_n(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = \delta_n \delta(x_2) \delta(\tau) \quad (i=1, 2, n=1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, δ_{ni} — символы Кронекера, контактные напряжения обозначены индексом (0).

Из принципа суперпозиции для контактных напряжений $\sigma_{i0}^{(m)}(x_2, \tau)$ следуют формулы (по i производится суммирование)

$$\begin{aligned} \sigma_{i0}^{(m)}(x_2, \tau) &= \dot{u}_{i0}(x_2, \tau) * \Phi_{ij}^{(m)}(x_2, \tau), \quad \dot{u}_{i0}(x_2, \tau) = \dot{u}_i(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} H(D) \\ H(D) &= 1, \quad (\tau, x_2) \in D; \quad H(D) = 0, \quad (\tau, x_2) \notin D \\ D &= \{(t, \xi) \in R^2 : t \in [0, \tau], \xi \in [b_1(t), b_2(t)]\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функции влияния (2.1) и (2.3) удовлетворяют задачам (1.2)—(1.5) с граничными условиями (2.2) и (2.4). Их решение строится с помощью интегральных преобразований Лапласа по τ и Фурье по x с последующим применением процедуры совместного обращения изображений [5]:

$$-\pi \gamma^4 x^4 \Psi_{iii}^{(1)}(x, \tau) = \begin{cases} [(2\tau^2 - \gamma^2 x^2)^2 - 4\tau^2(\tau^2 - x^2)^{-1/2}(\tau^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2}](\tau^2 - x^2)^{-1/2}, & |\tau/x| \geq \gamma \\ (2\tau^2 - \gamma^2 x^2)^2(\tau^2 - x^2)^{-1/2}, & 1 \leq |\tau/x| < \gamma \end{cases}$$

$$\pi x^2 \Psi_{iii}^{(2)}(x, \tau) = \begin{cases} Z(x, \tau)(\tau^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2}(\tau^2 + (\tau^2 - x^2)^{1/2}(\tau^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2}), & |\tau/x| \geq \gamma \\ Z(x, \tau)(\tau^2 - x^2)^{1/2}(\tau^2 - \gamma^2 x^2), & 1 \leq |\tau/x| < \gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\pi x^2 \Psi_{i12}^{(2)}(x, \tau) = -\pi x^2 \Psi_{211}^{(2)}(x, \tau) = \begin{cases} 2\tau \delta'(x) \gamma^{-2}(1 + \gamma^2)^{-1}, & |\tau/x| \geq \gamma \\ Z(x, \tau) \tau (\tau^2 - x^2)^{1/2} (\gamma^2 x^2 - \tau^2)^{1/2} \operatorname{sgn} x, & 1 \leq |\tau/x| < \gamma \end{cases}$$

$$\pi x^2 \Psi_{221}^{(2)}(x, \tau) = \begin{cases} Z(x, \tau) (\tau^2 - x^2)^{1/2} (\tau^2 + (\tau^2 - x^2)^{1/2} (\tau^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2}), & |\tau/x| \geq \gamma \\ Z(x, \tau) \tau^2 (\tau^2 - x^2)^{1/2}, & 1 \leq |\tau/x| < \gamma \end{cases}$$

$$Z(x, \tau) = [\tau^2(1 + \gamma^2) - x^2 \tau^2]^{-1}, \quad \Phi_{ij}^{(m)}(x_2, \tau) = \Psi_{ij}^{(m)}(x_2, \tau) \quad (i, j = 1, 2)$$

Производная по τ в (2.6) понимается в обобщенном смысле. С учетом (2.6) выражение (2.5) примет вид

$$\sigma_{i0}^{(m)}(x_2, \tau) = \dot{u}_{i0}(x_2, \tau) * \Psi_{ij}^{(m)}(x_2, \tau) \quad (2.7)$$

3. Контактные напряжения в плоской задаче. Используя свойства обобщенного дифференцирования, а также однородность степени (-1) функций влияния (2.6) [6], каждое слагаемое в выражении (2.7) можно представить в виде $(\alpha = 1, 2)$:

$$\dot{u}_{\alpha 0}(x_2, \tau) * \Psi_{\alpha ij}^{(m)}(x_2, \tau) = -\delta_{\alpha j} V_{\alpha 0}(x_2, \tau) -$$

$$- \int_0^{\tau} dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} \frac{\partial^2 V_{\alpha 0}}{\partial t \partial \xi} \frac{x_2 - \xi}{\tau - t} \Psi_{\alpha ij}^{(m)}(x_2 - \xi, \tau - t) d\xi + \quad (3.1)$$

$$+ \sum_{n=1}^2 (-1)^n \int_0^{\tau} V_{\alpha 0}(b_n(t), t) \frac{x_2 - b_n(t)}{\tau - t} \Psi_{\alpha ij}^{(m)}(x_2 - b_n(t), \tau - t) dt \times$$

$$\times V_{n0}(x_2, \tau) = V_n(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} H(D)$$

Получим интегральное представление контактных напряжений в задаче о вертикальном внедрении симметричного однородного ударника. В этом случае

$$b_1(\tau) = -b(\tau), \quad b_2(\tau) = b(\tau), \quad \theta = 0 \quad (3.2)$$

$$V_1(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = V_{c1}(\tau), \quad V_2(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0$$

Учитывая носитель подынтегральных функций в (3.1), будем иметь ($x_2 \geq 0$):

$$\sigma_{110}^{(m)}(x_2, \tau) = -V_{cl}(\tau) H(D) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 I_{ki}^{(m)}(x_2, \tau) \quad (m = 1, 2)$$

$$I_{k1}^{(m)}(x_2, \tau) = H(\tau) H(\tau - \gamma_k x_2) \int_0^{\tau_{k1}} F_{k1}^{(m)}(\tau - t, z_1(t)) dt$$

$$I_{k2}^{(m)}(x_2, \tau) = H(b(\tau) - x_2) \left[H(\tau - \gamma_k x_2) \int_0^{\tau_{k2}^{(2)}} F_{k2}^{(m)}(\tau - t, z_2(t)) dt + \right. \\ \left. + H(\gamma_k x_2 - \tau) \int_{\tau_{k2}^{(1)}}^{\tau_{k2}^{(2)}} F_{k2}^{(m)}(\tau - t, z_2(t)) dt \right] \quad (3.3)$$

$$F_{ki}^{(m)}(\tau - t, z_i(t)) = \frac{V_{cl}(t)}{\tau - t} z_i(t) F_k^{(m)}(\tau - t, z_i(t)), \quad z_i(t) = b(t) + (-1)^{i-1} x_2$$

$$\pi \gamma^4 x^4 F_1^{(1)}(t, x) = -(2t^2 - \gamma^2 x^2)^2 (t^2 - x^2)^{-1/2}, \quad \pi \gamma^4 x^4 F_2^{(1)}(t, x) = 4t^2 (t^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2}$$

$$\pi x^2 F_1^{(2)}(t, x) = (t^2 - \gamma^2 x^2) (t^2 - x^2)^{1/2} Z(x, t), \quad \pi x^2 F_2^{(2)}(t, x) = t^2 (t^2 - \gamma^2 x^2)^{1/2} Z(x, t)$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma$$

где τ_{k1} и $\tau_{k2}^{(j)}$ — корни следующих уравнений:

$$\tau - \tau_{k1} - \gamma_k (b(\tau_{k1}) + x_2) = 0 \quad (3.4)$$

$$\tau - \tau_{k2}^{(j)} - (-1)^j \gamma_k (b(\tau_{k2}^{(j)}) - x_2) = 0 \quad (k = 1, 2, j = 1, 2)$$

Аналогично для касательных напряжений $\sigma_{120}^{(2)}(x_2, \tau)$ при $x_2 > 0$ найдем

$$\sigma_{120}^{(2)}(x_2, \tau) = -\frac{2}{\gamma^2 (1 + \gamma^2)} \frac{V_{cl}(\tau_0)}{b(\tau_0)} + \sum_{i=1}^2 J_i(x_2, \tau)$$

$$J_1(x_2, \tau) = -H(\tau) \left[H(\tau - \gamma x_2) \int_{\tau_{21}}^{\tau_{11}} T(\tau - t, z_1(t)) dt + \right.$$

$$\left. + (H(x_2 \gamma - \tau) - H(x_2 - \tau)) \int_0^{\tau_{11}} T(\tau - t, z_1(t)) dt \right] \quad (3.5)$$

$$J_2(x_2, \tau) = H(\tau) \left[\int_{\tau_{22}^{(2)}}^{\tau_{12}^{(2)}} T(\tau - t, z_2(t)) dt + H(x_2 - \tau) \int_{\tau_{12}^{(1)}}^{\tau_{22}^{(1)}} T(\tau - t, z_2(t)) dt + \right.$$

$$\left. + (H(x_2 \gamma - \tau) - H(x_2 - \tau)) \int_0^{\tau_{22}^{(1)}} T(\tau - t, z_2(t)) dt \right]$$

$$T(\tau - t, z_k(t)) = \frac{V_{cl}(t)}{\tau - t} z_k(t) P(\tau - t, z_k(t)) \quad (k = 1, 2)$$

$$\pi x^2 P(t, x) = t (t^2 - x^2)^{1/2} (\gamma^2 x^2 - t^2)^{1/2} Z(x, t) \operatorname{sgn} x$$

где τ_0 — корень уравнения $b(\tau_0) - x_2 = 0$.

Подынтегральные функции в (3.3) имеют неинтегрируемые особенности в

точке τ_j . Соответствующие интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

4. Контактные усилия и моменты. Покажем, что задача определения параметров движения ударника на начальном этапе внедрения может быть решена отдельно от задачи нахождения контактных напряжений.

На сверхзвуковом участке взаимодействия граничные условия носят несмешанный характер, поэтому носитель контактных напряжений $\text{supp} \{\sigma_{ij}^{(m)}\}$ совпадает с носителем вектора скорости точек поверхности полупространства $\text{supp} \{\dot{u}_{i0}\}$, причем, в силу (1.7), верно следующее равенство:

$$\text{supp} \{\sigma_{ij}^{(m)}\} = \text{supp} \{\dot{u}_{i0}\} = [b_1(\tau), b_2(\tau)] \quad (4.1)$$

Следовательно, вектор поверхностных усилий $p_n^{(m)}$ на плоскости $x_1 = 0$ и результирующая контактная сила $R^{(m)}$ с учетом (4.1) примут вид

$$p_n^{(m)} = \sigma_{i10}^{(m)} e_j, \quad R^{(m)} = \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} p_n^{(m)} dx_2 \quad (4.2)$$

$$R_1^{(m)} = \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma_{110}^{(m)}(x_2, \tau) dx_2, \quad R_2^{(m)} = \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma_{120}^{(m)}(x_2, \tau) dx_2$$

где e_j ($j=1, 2$) — единичные орты осей Ox_1 и Ox_2 , m — номер задачи.

Так как в связанной системе координат радиус-вектор точки приложения поверхностного усилия $p_n^{(m)}$ равен $r_{01} = r_0 - u_c$ ($r_0 = x_i e_i$), то момент контактных сил $M^{(m)}$ можно определить так ($M_0^{(m)}$ — момент контактных сил относительно точки O):

$$M^{(m)} = M_0^{(m)} + u_{c2} R_1^{(m)} - u_{c1} R_2^{(m)}, \quad M_0^{(m)} = - \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma_{110}^{(m)}(x_2, \tau) x_2 dx_2 \quad (4.3)$$

Для задачи 1 ($m=1$) необходимо положить $R_2^{(1)} = 0$. Из свойств преобразования Фурье аналогично [7], найдем связь между контактными усилиями и изображениями контактных напряжений (значком (F) обозначены трансформанты Фурье, p — параметр преобразований):

$$R_j^{(m)} = \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma_{ij0}^{(m)}(x_2, \tau) dx_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{ij0}^{(m)}(x_2, \tau) e^{-ipx_2} dx_2 = \sigma_{ij0}^{(m)F}(\tau, 0) \quad (4.4)$$

$$M_0^{(m)} = - \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} x_2 \sigma_{110}^{(m)}(x_2, \tau) dx_2 = i \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \sigma_{110}^{(m)F}(\tau, 0) \quad (j=1, 2)$$

В пространстве изображений по Фурье и Лапласу формулы (2.7) примут вид (значком (L) обозначены трансформанты по Лапласу):

$$\sigma_{ij0}^{(m)FL}(s, p) = (\dot{u}_{i0})^{FL} s \Psi_{ij}^{(m)FL}(s, p) \quad (j=1, 2) \quad (4.5)$$

Причем, можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{p \rightarrow 0} s \Psi_{111}^{(m)FL}(s, p) = -1, \quad \lim_{p \rightarrow 0} s \Psi_{212}^{(m)FL}(s, p) = -\gamma^{-1}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} s \Psi_{211}^{(m)FL}(s, p) = \lim_{p \rightarrow 0} s \Psi_{112}^{(m)FL}(s, p) = 0 \quad (4.6)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \Psi_{111}^{(m)FL}(s, p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \Psi_{211}^{(m)FL}(s, p) = 0$$

Следовательно, выражение (4.5) можно переписать в виде

$$\sigma_{110}^{(m)FL}(s, p) |_{p=0} = -(\dot{u}_{10})^{FL} |_{p=0}, \quad \sigma_{120}^{(2)FL}(s, p) |_{p=0} = -\gamma^{-1} (\dot{u}_{20})^{FL} |_{p=0} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{110}^{(m)F}(\tau, p) |_{p=0} = -(\dot{u}_{10})^F |_{p=0}, \quad \sigma_{120}^{(2)F}(\tau, p) |_{p=0} = -\gamma^{-1} (\dot{u}_{20})^F |_{p=0}$$

В итоге для контактных усилий (4.4) с учетом (4.7), граничных условий (1.10)–(1.11) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} R_1^{(m)} &= \sigma_{110}^{(m)}(\tau, 0) = -\lim_{p \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{10}(x_2, \tau) e^{ipx_2} dx_2 = -\int_{b_1}^{b_2} \dot{u}_{10}(x_2, \tau) dx_2 = \\ &= \int_{b_2}^{b_1} (\omega(x_2 - u_{c2}) - V_{c1}) dx_2 = \omega S_{x_3} - (\omega u_{c2} + V_{c1}) S \\ R_2^{(2)} &= \sigma_{120}^{(2)}(\tau, 0) = -\gamma^{-1} \lim_{p \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}_{20}(x_2, \tau) e^{ipx_2} dx_2 = \\ &= -\gamma^{-1} \int_{b_1}^{b_2} \dot{u}_{20}(x_2, \tau) dx_2 = \gamma^{-1} \int_{b_1}^{b_2} (\omega u_{c1} - V_{c2}) dx_2 = \gamma^{-1} S (\omega u_{c1} - V_{c2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$M_0^{(m)} = i \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \sigma_{110}^{(m)}(\tau, p) = -i \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} (\dot{u}_{10})^F =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} x_2 \dot{u}_{10}(x_2, \tau) dx_2 = -\omega J_{x_3} + (V_{c1} + \omega u_{c2}) S_{x_3}$$

$$S = \int_{b_1}^{b_2} dx_2 = b_2 - b_1, \quad S_{x_3} = \int_{b_1}^{b_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2} (b_2^2 - b_1^2)$$

$$J_{x_3} = \int_{b_1}^{b_2} x_2^2 dx_2 = \frac{1}{3} (b_2^3 - b_1^3)$$

Заметим, что S , S_{x_3} и J_{x_3} представляют собой площадь, статический момент и момент инерций относительно оси Ox_3 области контакта $\Omega(\tau)$.

Таким образом, на сверхзвуковом этапе внедрения для задач 1,2 результирующие контактные силы и момент являются линейными комбинациями кинематических параметров ударника с коэффициентами в виде геометрических характеристик области контакта $\Omega(\tau)$. Это позволяет проинтегрировать задачу Коши для ударника без предварительного определения контактных напряжений. После нахождения кинематических параметров ударника контактные напряжения вычисляются с помощью интегральных представлений (3.1), (3.3) и (3.5).

Окончательно начальная задача для ударника в форме Коши примет вид:

$$\dot{\Xi} = \Lambda, \quad \Xi(0) = \Xi_0; \quad \Xi^T = (u_{c1}, V_{c1}, u_{c2}, V_{c2}, \theta, \omega)$$

$$\Xi_0^T = (u_{c10}, V_{c10}, u_{c20}, V_{c20}, \theta_0, \omega_0), \quad \Lambda^T = (\lambda_i)_{i=1,6}$$

$$\lambda_1 = V_{c1}, \quad \lambda_2 = m^{-1} [R_{c1} + \omega S_{x_3} - (\omega u_{c2} + V_{c1}) S] \quad (4.9)$$

$$\lambda_3 = V_{c2}, \quad \lambda_4 = m^{-1} [R_{c2} + \gamma^{-1} (\omega u_{c1} - V_{c2}) S]$$

$$\lambda_5 = \omega, \quad \lambda_6 = I^{-1} [M_e - \omega J_{x_3} + (2u_{c2}\omega + V_{c1}) S_{x_3} -$$

$$- (u_{c2} (\omega u_{c2} + V_{c1}) + \gamma^{-1} u_{c1} (\omega u_{c1} - V_{c2})) S$$

В итоге получена система обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, для интегрирования которой может быть применен один из хорошо разработанных численных методов.

5. Примеры. Ниже приведены результаты расчета задачи о внедрении в упругое полупространство (сталь, $\gamma = 1,871$) эллиптического цилиндра с большой полуосью $a = 1$:

$$y_1^2 + y_2^2 / (1 - e^2) = 1, \quad e = (1 - d^2)^{1/2} \quad (5.1)$$

где e — эксцентриситет, d — малая полуось.

Условие касания цилиндра в начальный момент $\tau = 0$ полупространства в точке O имеет вид

$$u_{c10} = -y_{10} \cos \theta_0 + y_{20} \sin \theta_0, \quad u_{c20} = -y_{10} \sin \theta_0 - y_{20} \cos \theta_0$$

$$y_{20} = -(1 - e^2) \operatorname{tg} \theta_0 / [1 + (1 - e^2) \operatorname{tg} \theta_0]^2 \quad (5.2)$$

$$y_{10} = [1 - y_{20}^2 / (1 - e^2)]^{1/2}, \quad (-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2)$$

В соотношениях (5.2) θ_0 является параметром, задавая который определяются начальные координаты центра масс ударника u_{c10} и u_{c20} .

Для определения $b_j(\tau)$ ($j = 1, 2$) воспользуемся (1.7) и (1.8):

$$y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta + u_{c1} = 0 \quad (5.3)$$

Подставляя в (5.3) явную зависимость $y_1 = [1 - y_2^2 / (1 - e^2)]^{1/2}$, получим

$$b_j(\tau) = y_2^{(j)} \cos \theta + y_1^{(j)} \sin \theta + u_{c1}$$

$$y_2^{(j)} = B^{-1} (u_{c1} \sin \theta + (-1)^j [u_{c1}^2 \sin^2 \theta - (u_{c1}^2 - \cos^2 \theta) B]^2) \quad (5.4)$$

$$y_1^{(j)} = [1 - y_2^{(j)2} / (1 - e^2)]^{1/2}, \quad B = \sin^2 \theta + d^{-2} \cos^2 \theta \quad (j = 1, 2)$$

Следовательно, геометрические характеристики области контакта с использованием (5.4) могут быть явно найдены как функции $u_c(\tau)$ и $\theta(\tau)$.

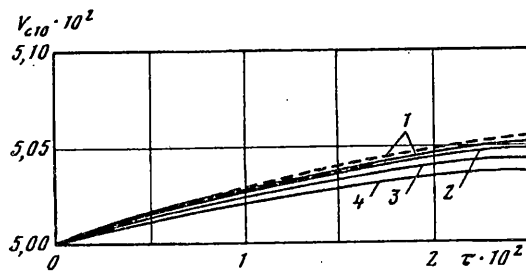
Для интегрирования системы (4.9) применялась процедура Рунге — Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага. Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $m = \pi$, $I = \sqrt{4\pi} (2 - e^2) (1 - e^2)^{-1/2}$, $R_{c1} = p_0 H(\tau)$, $p_0 = 0, 1$, $R_{c2} = M_e \equiv 0$.

Результаты расчетов при различных значениях вектора начальных параметров ударника Ξ_0 приведены на фиг. 1—4 (здесь и далее задаче 1 соответствуют штриховые линии, задаче 2 — сплошные).

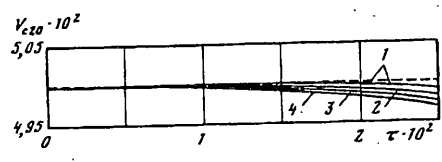
На фиг. 1, 2 представлены временные зависимости компонент V_{c1} , V_{c2} вектора скорости центра масс ударника ($e = 0, 3$). Начальные значения кинематических параметров принимались равными $V_{c10} = 0,05$, $V_{c20} = 0,05$, $\theta_0 = 0$. Номера кривых соответствуют следующим значениям угла θ_0 : 1 — $\theta_0 = 0^\circ$, 2 — $\theta_0 = 30^\circ$, 3 — $\theta_0 = 45^\circ$, 4 — $\theta_0 = 60^\circ$.

Фиг. 3, 4 отражают динамику вращательного движения ударника ($e = 0$) на сверхзвуковом участке внедрения. Расчеты проводились при следующих значениях компонент вектора Ξ_0 : $u_{c10} = -1$, $V_{c10} = 0,05$, $u_{c20} = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$. Варьируемый параметр — начальное значение продольной компоненты вектора скорости центра масс ударника V_{c20} (кривая 1 — $V_{c20} = 0,01$, кривая 2 — $V_{c20} = 0,03$, кривая 3 — $V_{c20} = 0,05$).

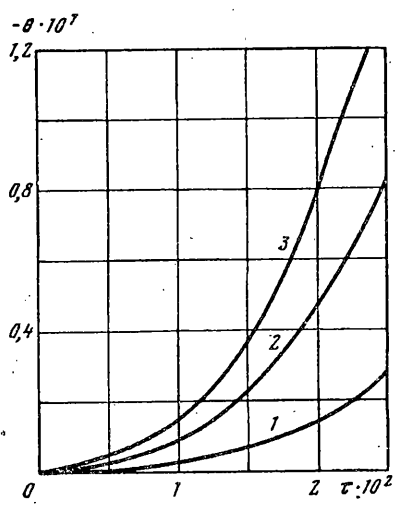
Проведенное параметрическое исследование динамики ударника позволяет



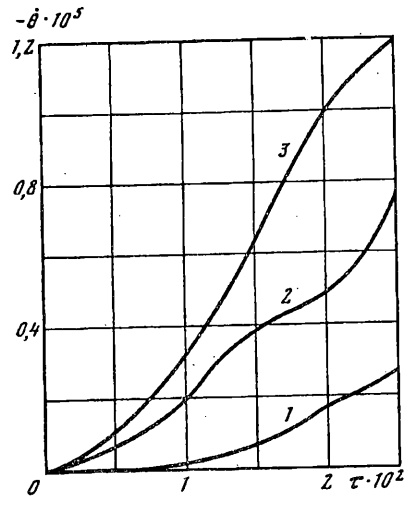
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



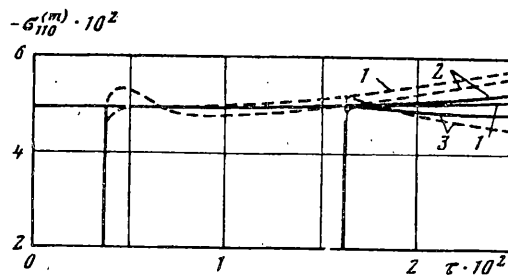
Фиг. 4

сделать следующий вывод: на сверхзвуковом участке внедрения реакция полупространства в количественном отношении является малой как для задачи 1, так и для задачи 2. Учет жесткого сцепления в задаче 2 качественно меняет картину движения ударника.

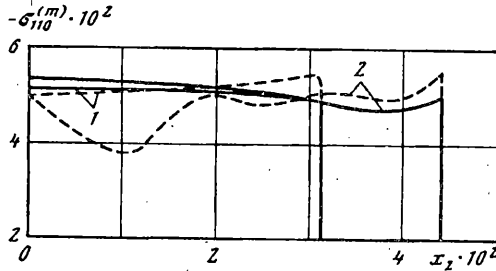
Контактные напряжения $\sigma_{10}^{(m)}(x_2, \tau)$ для задач 1 и 2 вычислялись по формулам (3.3) и (3.5) при внедрении в полупространство кругового цилиндра ($e = 0$). Интегралы $I_{ki}^{(m)}(x_2, \tau)$ ($k, m, i = 1, 2$) в (3.3) представлялись в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих, причем для обеих задач сингулярная составляющая имела вид

$$I_{k2s}^{(m)}(x_2, \tau) = A_{km} \int_{x_1}^2 \frac{\dot{h}(t) dt}{b(t) - x_2} = A_{km} \int_{x_1}^2 \frac{dh}{b(h) - x_2} \quad (5.5)$$

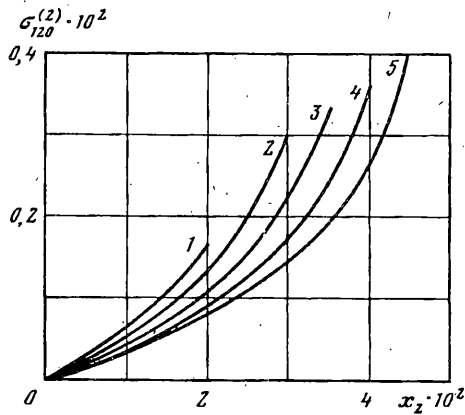
где $h(\tau) = u_{c1}(\tau) - u_{c10}$ — глубина погружения ударника, A_{km} — константы, зависящие от номера задачи.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Для кругового цилиндра нетрудно получить, что $b(h) = [h(2-h)]^{1/2}$ и интегралы (5.5) могут быть вычислены аналитически

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dh}{b(h) - x_2} = \operatorname{arctg} \frac{b(\tau_2)}{1 - h(\tau_2)}, \quad x_2 = 0;$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dh}{b(h) - x_2} = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{b(t)}{1 - h(t)} + x_2 (1 - x_2^2)^{1/2} [\ln |b(t) - x_2| - \right. \\ \left. - 2 \ln [(1 - b(t))(1 + x_2)]^{1/2} + [(1 + b(t))(1 - x_2)]^{1/2}] \right\} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad x_2 \neq 0 \quad (5.6)$$

Регулярные составляющие интегралов вычислялись с заданной точностью по квадратурам Ньютона — Котеса. Начальные значения кинематических параметров движения ударника принимались следующими: $u_{c10} = -1$, $V_{c10} = 0,05$, $u_{c20} = 0$, $V_{c20} = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$. Материал полупространства — сталь ($\gamma = 1,871$).

Зависимость нормальных контактных напряжений $\sigma_{110}^{(m)}$ от времени τ представлена на фиг. 5. Кривые 1—3 соответствуют $x_2 = 0; 0,02$ и $0,04$. Распределение $\sigma_{110}^{(m)}$ вдоль оси x_2 в различные моменты времени показано на фиг. 6 (кривые 1, 2 соответствуют $\tau = 0,01; 0,02$).

Характер распределения касательных контактных напряжений $\sigma_{120}^{(2)}$ под ударником в различные моменты времени приводится на фиг. 7 (кривые 1—5 соответствуют $\tau = 0,005; 0,01; 0,015; 0,02; 0,025$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Код проекта 93-013-16508.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства//Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 7. С. 69—77.
2. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи для абсолютно жестких тел и упругого полупространства.— Препринт/МАИ.— М., 1989.— 49 с.
3. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. Ч. 1. М.: Наука, 1972. 468 с.
5. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
6. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1976.— 518 с.
7. Симонов И. В. Динамическая задача о вдавлении осесимметричного штампа в упругое полупространство//Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 163—165.

Москва

Поступила в редакцию
5.11.1993