МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Э. НАУМОВ

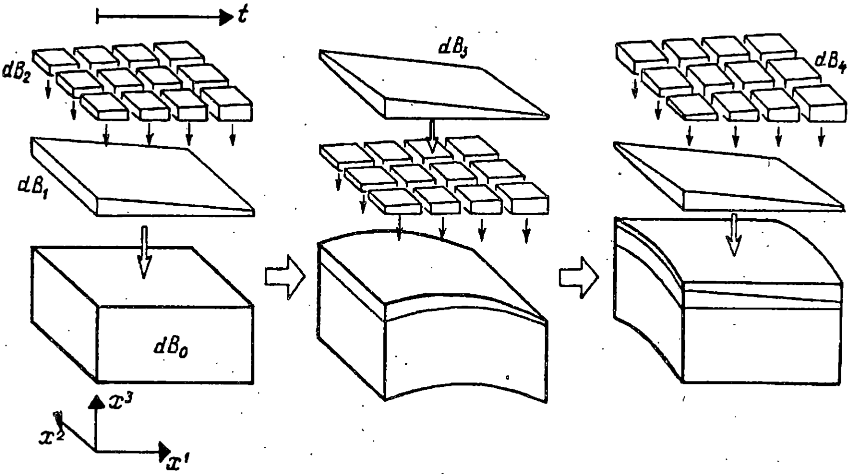
# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НАРАЩИВАЕМЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Понятие наращиваемого деформируемого тела отражает характерные черты широкого круга процессов современной технологии, связанные с пополнением тела материальными элементами в ходе деформирования. Указанное обстоятельство оказывает значительное влияние на формирование полей напряжений и деформаций в теле и требует учета в рамках соответствующей математической модели. Формулировка начально-краевой задачи для наращиваемого тела обладает рядом принципиальных отличий от формулировки задачи для тела постоянного состава, которые обсуждаются в данной работе обзорного характера.

**1. Концепция наращиваемого тела.** В классической механике деформируемого твердого тела обычно считается, что множество материальных частиц, образующих данное тело, не изменяется в процессе его деформирования. Такие материальные объекты условимся называть телами постоянного состава. Однако, многообразие процессов деформирования, с которыми мы сталкиваемся в окружающей нас действительности, не укладывается в рамки этих представлений. Под воздействием разнообразных факторов множество частиц, образующих тело, может изменяться в очень широких пределах. Такие тела называются далее телами переменного состава. Встречаются ситуации, когда тело в процессе деформирования теряет свои частицы — так происходит, например, при коррозионных повреждениях, износе, абляции, эрозии, расплавлении. В подобных ситуациях можно говорить о телах уменьшающегося состава или, короче, распадающихся телах. Весьма часто приходится сталкиваться также со случаями увеличения массы деформируемого тела за счет добавления к нему новых материальных частиц. Так происходит, например, при последовательном возведении массивных бетонных конструкций, намораживании льда, изготовлении деталей способами намотки и напыления, выращивании кристаллов и т. д. Тела, переменность состава которых обусловлена притоком материала к ним извне, будем называть наращиваемыми телами. Заметим, что в динамику абсолютно твердого тела понятие тела переменного состава (массы) было введено еще И. В. Мещерским в конце прошлого века (см. [1]), однако понятие деформируемого твердого тела переменного состава появилось в механике существенно позднее.

Важно отметить, что «зарождение» или «исчезновение» материальных частиц может, в принципе, происходить как внутри тела, так и на его поверхности. По первому типу протекают, например, процессы биологического роста или деградации тканей, а по второму типу — разнообразные технологические процессы (напыление, затвердевание, намотка и т. п.). В дальнейшем будут рассматриваться только процессы наращивания деформируемых тел, поскольку этот случай значительно сложнее с точки зрения его математического моделирования, чем случай распадающегося тела (некоторые замечания о причинах такого соотношения будут даны ниже). Кроме того, все рассмотрения будут ограничены процессами наращивания по внешней поверхности тела. Явления зарождения частиц во внутренних точках тела из рассмотрения исключаются.

Процессы наращивания целесообразно классифицировать еще по одному при-




Фиг. 1

знаку — на дискретные и непрерывные. При дискретном наращивании к телу в отдельные моменты времени присоединяются объемы материала конечных размеров, а при непрерывном к телу постоянно добавляются бесконечно малые частицы или, скажем, бесконечно тонкие слои материала.

Итак, основными характерными чертами рассматриваемой здесь концепции наращиваемого деформируемого твердого тела являются следующие: *1*) дополнительные элементы материала присоединяются к телу по его внешней поверхности; *2*) процесс наращивания протекает непрерывно — за каждый бесконечно малый промежуток времени к телу присоединяется инфинитезимальный объем материала; *3*) наращивание происходит одновременно с нагружением тела поверхностными и/или массовыми силами.

На фиг. 1 схематично показан элемент, примыкающий к поверхности наращиваемого тела. Бесконечно тонкие слои материала по мере присоединения к поверхности тела вовлекаются в деформирование в составе тела, что представляет собой фактор, оказывающий значительное влияние на формирование напряженно-деформированного состояния тела. Конфигурации *1*, *2* и *3* (см. фиг. 1) соответствуют трем последовательным моментам после начала наращивания, разделенным бесконечно малыми промежутками времени ($dB_0$ — элемент основного тела, существовавшего до начала наращивания; $dB_1$, $dB_2$, ... — приращиваемые элементы). Одна из принципиально важных особенностей процесса наращивания состоит в том, что приращиваемые элементы могут находиться как в ненапряженном (естественном) состоянии, так и в, вообще говоря, произвольном состоянии «преднапряжения», которое никак не согласовано с состоянием поверхностного слоя тела, к которому они присоединяются.

Рассмотрим теперь лишь основные положения теории наращиваемых деформируемых тел, которые в той или иной степени отличны от соответствующих положений механики тел постоянного состава.

**2. Об описании движения наращиваемого тела.** Пусть $B_0$ — множество частиц, составляющих рассматриваемое тело перед началом его наращивания (основное тело), а $B(t)$ — множество частиц, образующих наращиваемое тело в момент $t$. Очевидно, $B_0 \subseteq B(t)$. В принципе, можно представить процесс наращивания, когда множество $B_0$ пусто, т. е. первая частица наращиваемого тела, присоединяется к «пустому месту». Процесс наращивания продолжается в течение множества моментов времени $T$; $T$ — связный конечный или полубесконечный отрезок действительной оси $R$, начинающийся в нуле ($t = 0$ — момент начала наращивания). Следуя построениям [2], рассмотрим пространство событий $W = E_3 \times R$, где $E_3$ — трехмерное эвклидово пространство, а $R$ — вещественная прямая, содержащая $T$.

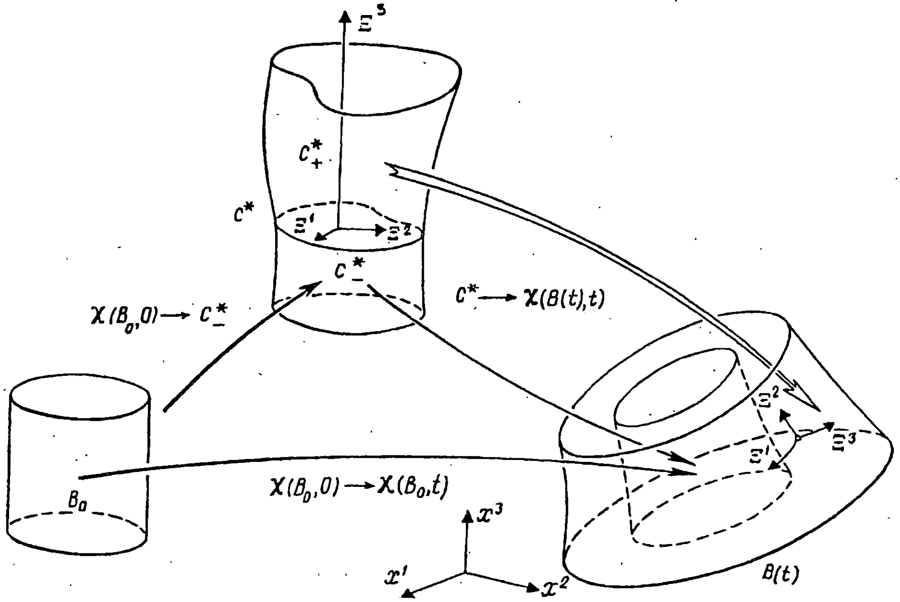
Движение каждой фиксированной частицы $P$ наращиваемого тела можно представить в виде отображения $\lambda(P)$, ставящего в соответствие каждому $t \in T$ одну и только одну точку $E_3$; такое отображение называется мировой линией частицы $P$. Совокупность мировых линий всех частиц есть мировая трубка тела, которую обозначим $\mu(B)$; очевидно, $\mu \subset W$. Сечение трубки $\mu$ гиперплоскостью $t = \mathrm{const}(t \in T)$ — есть область в $E_3$, занимаемая телом $B(t)$ в момент $t$, называемая конфигурацией тела $B(t)$ и обозначаемая $\chi(B(t), t)$.

Особенность наращиваемого тела состоит в том, что оно непрерывно пополняется новыми частицами и, следовательно, два произвольных сечения мировой трубки $\mu(B)$ гиперплоскостями $t = \mathrm{const} \equiv t_1$ и $t = \mathrm{const} \equiv t_2(t_2 > t_1)$ не могут быть приведены во взаимнооднозначное соответствие посредством мировых линий частиц — для тех точек в конфигурации $\chi(B(t_2), t_2)$, которые заняты частицами, добавленными к телу за интервал времени $(t_1, t_2)$, в конфигурации $\chi(B(t_1), t_1)$ просто нет прообразов. При этом отображение основного тела на любую его конфигурацию $(B_0 \to \chi(B_0, t))$ является биективным для всех $t \in T$. Свойством биективности обладает также отображение $B(\tau) \to \chi(B(\tau), t)$, но только при $t > \tau$. Отображения же $\chi(B(t), t) \to B(\tau)$ при $t > \tau$ или $B(t) \to \chi(B(\tau), \tau)$ при $t > \tau$ не могут быть биекциями в указанном смысле. Отмеченное обстоятельство имеет далеко идущие последствия в механике сплошной среды, поскольку для описания движения тел обычно используется отсчетный способ (см. [2]), который состоит в выборе одной из конфигураций тела в качестве отсчетной. Пусть, например, $\chi(B, t) = \{\chi(P, t), P \in B\}$ — множество пространственных точек, которые занимают частицы тела $B$ в момент $t$, т. е. текущая (актуальная) конфигурация тела $B$. Координата $x$ частицы $P$ в актуальной конфигурации определяется отображением

$$\mathbf{x} = \chi(P, t), P \in B \tag{2.1}$$

Если $B$ — тело постоянного состава, то символическому аргументу $P$ в (2.1) можно поставить в соответствие координату $\mathbf{X}$ места, которое частица $P$ занимала в отсчетной конфигурации. Тогда актуальное положение частицы $P$ есть $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$. Для частиц основного тела $B_0$ такое описание сохраняет свою привлекательность. Что же касается частиц, добавленных к телу в ходе наращивания, то здесь дело обстоит иначе. Ни одна из конфигураций тела не может быть принята в качестве отсчетной, поскольку отображение $B(\tau) \to \chi(B(t), t)$ при $t \neq \tau$ не является биективным $(t, \tau \in T)$ и, следовательно, единая конфигурация, в которой можно было зафиксировать отсчетные координаты $\mathbf{X}$ частиц тела, принципиально не может быть введена. Это обстоятельство впервые было отмечено в [3]. Заметим попутно, что одним из основных понятий кинематики тел постоянного состава является вектор перемещения частицы, который вводится как $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, где $\mathbf{x}$ — актуальное положение частицы в $E_3$, а $\mathbf{X}$ — ее положение в отсчетной конфигурации. Очевидно, что в механике наращиваемых тел вектор перемещения утрачивает свой смысл из-за отсутствия отсчетной конфигурации тела. Если говорить о перемещении частицы из той точки пространства, где она присоединилась к телу, то нельзя заранее исключить, что в одной и той же точке пространства к поверхности движущегося тела могут присоединяться в разные моменты времени различные частицы. Это означает, что вектор перемещения для наращиваемого тела может быть введен лишь как многозначный — разным точкам в одной и той же актуальной конфигурации может соответствовать одно и то же место $E_3$, откуда частицы начинают движение.

Таким образом, возникает вопрос об определении дифференцируемого многообразия, на которое любая конфигурация наращиваемого тела отображается биективно. Обозначив это многообразие $C^*$ (фиг. 2), сконструируем его следующим образом (см. [4, 5]). Составим его из двух подобластей $(C^* = C^*_- \cup C^*_+)$, разделенных поверхностью $\Xi^3 = 0$ (элементы многообразия — тройки $\Xi = (\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3)$). Частицам основного тела $B_0$, как обычно, ставятся в соответствие их пространственные координаты $\mathbf{X}$ в какой-либо (например, в $\chi(B_0, 0)$) конфигурации тела $B_0$.




Фиг. 2

Отсчетная конфигурация основного тела отображением $\Lambda$: $\chi(B_0,0) \to C^*_-$ переводится в нижнюю часть многообразия $C^*$ таким образом, чтобы часть границы $\partial B_0$, по которой начинает наращиваться тело, была отображена на подобласть поверхности $\Xi^3 = 0$ многообразия $C^*$. Предполагается, что упомянутое отображение $X = \Lambda(\Xi)$ биективно. Частицам $P \in B(t)\backslash B_0$ ставятся в соответствие тройки чисел $(\alpha, \beta, \tau^*(P))$, где $\tau^*(P)$ — момент времени, в который частица $P$ приращивается к телу, а $\alpha$, $\beta$ — криволинейные координаты того места на поверхности наращивания, где частица вступает в состав тела. Такой выбор метки частиц наращиваемой части тела, предложенный в [3], очевидно, полностью идентифицирует частицу. Тройке $(\alpha, \beta, \tau^*(P))$, естественно, соответствует некоторая точка $\mathrm{x} \in E_3$, а пара $(\mathrm{x}, \tau^*(P))$ определяет точку пространства событий $W$, откуда берет начало мировая линия $\lambda(P)$.

Полагая $\alpha = \Xi^1$, $\beta = \Xi^2$, $\tau^*(P) = \Xi^3$, будем считать определенную таким образом метку $\Xi$ частицы $P$ точкой части $C^*_+$ введенного многообразия. Каждое сечение $C^*_+$ координатной поверхностью $\Xi^3 = \mathrm{const} > 0$ содержит метки всех частиц, присоединяющихся к телу в момент времени $t = \Xi^3$. Модифицированный указанным образом отсчетный способ описания движения наращиваемого тела приводит к задаче нахождения закона движения, имеющего вид

$$\mathrm{x} = \chi(\Xi, t), \quad \Xi \in C^*, \quad t \geq \begin{cases} \Xi^3, & \Xi \in C^*_+ \\ 0, & \Xi \in C^*_- \end{cases} \tag{2.2}$$

Эта запись по своему содержанию конкретизирует (2.1) с учетом специфики моделируемого процесса движения. Введение отсчетного многообразия $C^*$, сконструированного указанным выше образом, представляет собой способ (возможно, не единственный) успешного построения кинематики наращиваемого тела.

Необходимо отметить, что биективность отображения $\chi: C^* \to E_3$ в некоторых особых случаях может нарушаться. Такая возможность реализуется, например, при самокасании наращиваемого тела, когда два непересекающихся участка границы $\partial C^*$ имеют образом в определенный момент времени одну и ту же двумерную подобласть $E_3$. В принципе, в состояние контакта друг с другом на определенных интервалах времени могут приходить и различные участки поверхности наращивания. Собственно наращивание по этим участкам в период контакта, естественно, осуществляться не может. Таким образом, поверхность наращивания может становиться несвязной, а внутри $C^*$ при этом образуются «пустоты», «разрезы» или особые точки. Границы этих пустот считаются составляющими $\partial C^*$. Тогда отображение $\chi$ биективно при $\Xi \in \mathrm{int}\, C^*$. На особых участках $\partial C^*$, соответствующих соприкасающимся участкам поверхности тела, должны формулироваться обычные для деформируемых тел условия контакта (непроникания, непрерывности вектора напряжения и т. д.).

**3. Об уравнениях состояния неоднородно стареющего континуума.** Представления, положенные в основу концепции наращиваемого тела, никоим образом не связаны с какими-либо ограничениями на используемые для описания реологического поведения среды определяющие соотношения. Это обстоятельство имеет принципиальный характер и к настоящему времени имеется уже значительное число задач наращивания, решенных с использованием разнообразных определяющих соотношений.

Специальный интерес представляют неоднородно стареющие среды, понятие о которых введено в [6]. Это понятие тесно связано с концепцией наращиваемого тела. Допустим, что материал, из которого постепенно формируется тело, характеризуется существенной нестабильностью механических свойств, т. е. заметным изменением этих свойств в течение некоторого начального периода времени после «порождения» этого материала. Пусть, далее, материальные элементы, укладываемые в тело при его формировании, порождаются непосредственно перед приращиванием к телу, либо за относительно малый промежуток времени до этого. Если, наконец, продолжительность наращивания сопоставима с характерным периодом старения материала, то наращиваемое тело будет обладать специфической возрастной неоднородностью, которая неразрывно связана с обусловленной ею материальной неоднородностью. Такая неоднородность может оказаться значительной и потребовать учета в рамках соответствующей модели.

Ограничиваясь случаем простого реологического материала, определяющее соотношение неоднородно стареющего континуума запишем в виде (см. [5]):

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{G}^t(\Xi),\ \Xi, t - \tau_b(\Xi)),\quad \mathbf{x} = \chi(\Xi, t) \tag{3.1}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\Xi$ — метки частиц, составляющих наращиваемое тело $B(t)$, $\mathbf{G}^t(\Xi) = \{\mathbf{G}(\Xi, t-s), 0 \le s \le t - \tau_b(\Xi)\}$ — предыстория до момента времени $t$ тензора дисторсии наращиваемого тела, $\Sigma(\mathbf{D}^t, \Xi, t - \tau_b(\Xi))$ — реакция элемента с меткой $\Xi$ на предысторию дисторсии $\mathbf{D}^t$ этого элемента относительно конфигурации элемента в момент его порождения $\tau_b(\Xi)$.

В [4] показано, что тензор дисторсии $\mathbf{G}$, характеризующий аффинную деформацию элемента наращиваемого тела, представляется разложением

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^+\mathbf{G}^*\mathbf{G}^- \tag{3.2}$$

где тензор $\mathbf{G}^-$ соответствует деформации элемента $\Xi$ на промежутке времени от момента порождения до момента присоединения (т. е. при $\tau_b(\Xi) \le t \le \tau^*(\Xi) - 0$), $\mathbf{G}^*$ — тензор мгновенной дисторсии, связанной с самим актом присоединения (приращивания) элемента к телу в момент $t = \tau^*(\Xi)$ (например, ударная дисторсия при столкновении элемента с телом), $\mathbf{G}^+$ — тензор, характеризующий дисторсию элемента в составе тела после приращивания (при $t \ge \tau^*(\Xi) + 0$). Тензоры $\mathbf{G}^-$ и $\mathbf{G}^+$ должны определяться из некоторых дополнительно привносимых в постановку задачи соотношений, а тензор $\mathbf{G}^+$, естественно,— вычисляться через закон движения наращиваемого тела (2.2).

При записи определяющего соотношения в форме (3.1) использован результат работы [7], в которой была показана корректность такой формы с точки зрения принципа материальной независимости от системы отсчета. Аксиомы Нолла, вводимые в общей теории определяющих соотношений (см. [2]), позволяют прийти к приведенной форме соотношения (3.1):

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\Xi, t)\,\Upsilon\,(\mathbf{C}^t(\Xi),\ \ \Xi, t - \tau_b(\Xi))\,\mathbf{R}^T(\Xi, t), \quad \mathbf{C} = \mathbf{G}^T\mathbf{G} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{C}^t$ — предыстория правого тензора деформации Коши — Грина, $\mathbf{R}$ — тензор поворота в полярном разложении $\mathbf{G} = \mathbf{RU}$.

Очевидно, что наращивание, вообще говоря,— сугубо необратимый процесс. Под обратимостью здесь понимается возможность возврата тела в одну из произвольно выбранных «прошлых» пространственных конфигураций и зафиксированное в той конфигурации напряженно-деформированное состояние посредством удаления материальных частиц в порядке, обратном тому, который имел место при наращивании. Предполагается, разумеется, что временна́я история действия на тело внешних нагрузок будет также «отслеживаться» в обратном порядке синхронизированно с удалением материала. Необратимость обусловлена несколькими взаимосвязанными факторами, среди которых, в общем случае,— нестационарность процесса, наследственность отклика материала, следящий характер поверхностных сил, ударная деформация присоединяющихся элементов с частичным восстановлением формы. С расширением модели наращиваемого тела за рамки изотермических процессов число задействованных диссипативных механизмов только увеличится.

Тем не менее, по-видимому можно выделить частный класс процессов наращивания, обладающих свойством обратимости. Речь идет о квазистатическом изэнтропическом наращивании идеально упругих тел. Заметим, что итоговое состояние наращиваемого упругого тела в отсутствие динамических эффектов определяется лишь последовательностью укладки элементов материала (предварительная деформация каждого элемента считается «внутренне» присущей элементу и от «внешнего» времени не зависит), а также соответствующей последовательностью приложения и изменения внешних нагрузок. Темп протекания процесса при этом роли не играет. Для обратимости важно, чтобы удаление частиц и сопутствующее изменение нагрузок происходило в строго обратном порядке по отношению к наращиванию. Нарушение этой последовательности, вообще говоря, нарушает обратимость.

Остановимся вкратце на случае, когда рассматриваемое тело не наращивается (и не наращивалось), а подвергается удалению материала, начиная с некоторой фиксированной конфигурации. В принципе, удаление частиц может осуществляться различными способами. Удаление может, например, сопровождаться динамическими «реактивными» эффектами или какими-либо силовыми воздействиями на удаляемые частицы, которые могут оказывать влияние и на состояние распадающегося тела. Условия на границе тела при этом должны конкретизироваться в каждой конкретной задаче. Не давая развернутой характеристики постановкам задач для распадающихся тел, заметим, что тензор дисторсии в этом случае не имеет такой же сложной структуры, как в (3.2). Все элементы тела при этом загружаются одновременно, поэтому сдвиг временно́го аргумента в определяющем соотношении (3.3), обусловливающий возрастную неоднородность тела, также отсутствует. Отмеченные обстоятельства предопределяют относительную простоту задач для распадающихся тел в сравнении с задачами для наращиваемых тел.

**4. Об уравнениях движения наращиваемого тела.** Рассматриваемая концепция наращиваемого деформируемого тела не предусматривает возможности объемного производства вещества и импульса. Масса и импульс подводятся к телу только через поверхность наращивания. Это означает, что в каждой внутренней точке пространственной области, занятой наращиваемым континуумом, выполняется обычное дифференциальное уравнение баланса количества движения

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{a} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ — вектор массовых сил, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ — вектор ускорения, $\rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы материала, $\mathbf{x}$ — точка в $E_3$, которая является образом соответствующей точки $\Xi$ многообразия $C^*$ при отображении $\mathbf{x} = \chi(\Xi, t)$ (в последующих рассуждениях это отображение считается не только биективным, но и обладающим необходимыми дифференциальными свойствами, т. е., по крайней мере, $C^1$-диффеоморфизмом). Все величины в (4.1) относятся к актуальной конфигурации наращиваемого тела в момент времени $t$.

Отображение (2.2) при каждом фиксированном $t$ порождает конвективную систему криволинейных координат в актуальной (соответствующей моменту $t$) конфигурации наращиваемого тела. Если $x^i$ — введенные в $E_3$ криволинейные координаты, то координатные линии упомянутой конвективной системы координат получаются из параметрических зависимостей

$$x^k = \chi^k(\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, t) \tag{4.2}$$

при фиксации в них помимо $t$ еще соответствующей пары координат $\Xi^K$ ($K = 1, 2, 3$). Условимся в качестве буквенных индексов компонент векторов и тензоров в конвективной системе координат использовать прописные буквы латинского алфавита, а для индексации компонент в фиксированной системе координат пространства — строчные латинские буквы.

Пусть $\{\mathbf{e}_K\}$ и $\{\mathbf{e}^K\}$ — основной и взаимный локальные базисы конвективной системы координат в точке $\mathbf{x}$ в момент $t$. Перейдем в записи уравнения (4.1) от пространственных координат $x^k$ к конвективным координатам $\Xi^K$. Векторное поле $\operatorname{div}\mathbf{T}$ допускает представление (см., например, [2]; в фигурных скобках здесь и далее — символы Кристоффеля второго рода):

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\Xi^M}\left(\sqrt{g}\,T^{MK}\right)\mathbf{e}_K + T^{PM}\begin{Bmatrix} K \\ M\ P \end{Bmatrix}\mathbf{e}_K \tag{4.3}$$

где $T^{KL}$ — контравариантные компоненты тензора $\mathbf{T}$, $g \equiv \det\|g_{KL}\|$, $g_{KL}$ — компоненты метрического тензора конвективной системы.

Вектор ускорения $\mathbf{a}$ при пространственном описании движения равен

$$\mathbf{a} = a^k(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{i}_k, \quad a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^j v^l \begin{Bmatrix} k \\ j\ l \end{Bmatrix} \quad (\mathbf{v} = v^j(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{i}_j) \tag{4.4}$$

где $\{\mathbf{i}_k\}$ — основной базис пространственной системы координат, $\mathbf{v}$ — вектор скорости ($v^j = \partial\chi^j/\partial t$).

Приводя векторное поле $\mathbf{a}$, например, ко взаимному базису конвективной системы координат, будем иметь

$$\mathbf{a}(\Xi, t) = \frac{\partial\chi^m}{\partial\Xi^N}\left(g_{mk}\frac{\partial^2\chi^k}{\partial t^2} + [jl, m]\frac{\partial\chi^j}{\partial t}\frac{\partial\chi^l}{\partial t}\right)\mathbf{e}^N \tag{4.5}$$

где $[ij, k]$ — символы Кристоффеля первого рода пространственной системы координат $x^i$, а $g_{jl}$ — метрика этой системы.

Вектор массовой силы в базисах конвективной системы координат имеет вид

$$\mathbf{b} = \frac{\partial\chi^m}{\partial\Xi^N}\,b_m\mathbf{e}^N = g^{NK}\frac{\partial\chi^m}{\partial\Xi^K}\,b_m\mathbf{e}_N \tag{4.6}$$

Наконец, плотность массы $\rho(\mathbf{x}, t)$ связана с плотностью $\rho^*(\Xi)$ материального элемента с меткой $\Xi$ сразу после его присоединения к телу лагранжевым уравнением неразрывности

$$p(\mathrm{x}, t) = \left(\frac{g^*}{g}\right)^{1/2} \rho^*(\Xi), \quad g^* = \det \|g^*_{KL}\| \tag{4.7}$$

в которое вместо x следует подставить движение $\mathrm{x} = \chi(\Xi, t)$; $g$ — тот же детерминант, что и в (4.3).

Компоненты $g^*_{KL}$ вычисляются по формулам [4, 5]:

$$g^*_{KL} = \left[g_{ij}\Big|_{\mathrm{x}=\chi(\Xi,t)} \frac{\partial\chi^i}{\partial\Xi^K}\frac{\partial\chi^j}{\partial\Xi^L}\right]_{t=H(\Xi)\Xi^3}, \quad H(\Xi) = \begin{cases}1, & \Xi \in C^*_+\\ 0, & \Xi \in C^*_-\end{cases} \tag{4.8}$$

На вопросах, связанных с вычислением величины $\rho^*(\Xi)$, мы здесь не останавливаемся — она предопределяется всей историей деформирования элемента вплоть до момента включения его в состав тела. Соответствующие соотношения должны дополнять постановку задачи. Кроме того, $\rho^*(\Xi)$ можно непосредственно задавать, например, как плотность элемента в естественном состоянии. В [4, 5] рассмотрена возможность скачкообразного изменения плотности при падении элемента на поверхность наращивания.

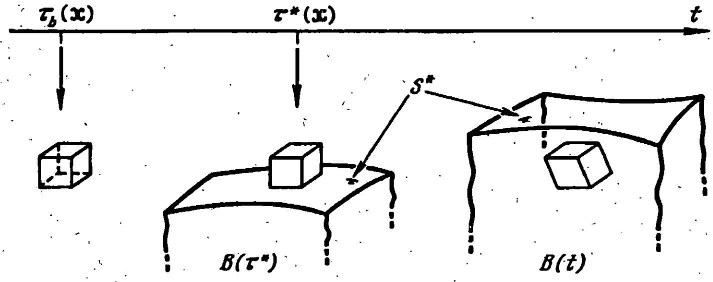
Подставляя теперь (4.3), (4.5)—(4.7) в (4.1), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\Xi^M}(\sqrt{g}T^{MK}) + \sqrt{g}T^{JM}\left\{\begin{matrix}K\\ M\ J\end{matrix}\right\} + \rho^*\sqrt{g^*}g^{KN}\frac{\partial\chi^m}{\partial\Xi^N}\Big(b_m - \\ - g_{mk}\frac{\partial^2\chi^k}{\partial t^2} + [jl, m]\frac{\partial\chi^j}{\partial t}\frac{\partial\chi^l}{\partial t}\Big) = 0, \quad \Xi \in C^*, \quad t \geq H(\Xi)\,\Xi^3\end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь записано шесть скалярных уравнений — система трех уравнений для $\Xi \in C^*_+$ и система трех уравнений для $\Xi \in C^*_-$. Каждая система после подстановки в нее определяющих соотношений вида (3.3), связывающих тензор T с законом движения (2.2), служит для нахождения трех функций $\chi^i(\Xi, t)$. Полная постановка эволюционной граничной задачи для наращиваемого тела дана в [5], а в [8, 9] в рамках этой постановки решена задача о наращивании упругого слоя.

Отметим одно существенное обстоятельство, которое во многом предопределяет специфику граничных задач рассматриваемого типа. При $\Xi \in C^*_+$ вследствие формул (4.8) в уравнениях (4.9) будут фигурировать частные производные движения $\chi$ по времени и материальным переменным $\Xi^j$, вычисленные в момент $t = \Xi^3$. Эти же значения производных войдут и в выражения для компонент $T^{KL}$. При этом уравнения движения будут содержать указанные «запаздывающие» члены наряду с соответствующими частными производными в текущий момент времени $t$. Можно предположить, что такая структура уравнений в частных производных существенно осложнит их исследование.

**5. Наращиваемые тела при инфинитезимальных деформациях.** Предположение о бесконечной малости деформаций в наращиваемом теле никак не связывается со степенью увеличения геометрических размеров тела вследствие наращивания — это разные аспекты одной модели. Геометрически линейная теория наращиваемых тел имеет свои особенности, связанные с тем, что каждой частице тела, как обычно, приписываются определенные пространственные координаты, которые не изменяются на протяжении всего процесса деформирования (если, разумеется, исключаются движения тела как жесткого целого). Это резко упрощает все кинематические построения. В частности, не лишенным смысла оказывается и понятие вектора перемещения, если его определение соответствующим образом «подправить». В [10, 11] подробно описаны определения вектора перемещения $\mathbf{u}(\mathrm{x}, t)$ частицы x и тензора инфинитезимальной деформации $\mathrm{E}(\mathrm{x}, t)$ элемента, расположенного в окрестности частицы $\mathrm{x}$ (x — пространственная коор-




Фиг. 3

дината частицы, которая, очевидно, в рамках геометрически линейной теории полностью ее идентифицирует). Тензор E(x, $t$) равен

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\mathrm{x}, t) = \mathrm{E}^*(\mathrm{x}) + \operatorname{def} \mathrm{u}(\mathrm{x}, t) - [\operatorname{def} \mathrm{u}(\mathrm{x}, \tau)]_{\tau=\tau^*(\mathrm{x})} \\
&\mathrm{x} \in \Omega^*(t), \quad t \geq \tau^*(\mathrm{x}); \quad \operatorname{def} \mathrm{w} \equiv 1/2\, [\nabla \mathrm{w} + (\nabla \mathrm{w})^T]
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

где $\Omega^*(t)$ — область наращивания (конфигурация $\mathcal{X}(B(t)\backslash B_0, t)$ согласно терминологии, использованной в п. 2), а $\tau^*(\mathrm{x})$ — момент присоединения частицы x к телу. Тензор $\mathrm{E}^*(\mathrm{x})$ характеризует деформацию, приобретенную элементом до момента присоединения и непосредственно в момент присоединения (если таковая имеет место).

На фиг. 3 условно показаны характерные моменты времени в «жизни» элемента: $\tau_b(\mathrm{x})$ — момент его зарождения, начиная с которого имеет смысл говорить о его существовании и деформировании вообще, $\tau^*(\mathrm{x})$ — момент приращивания, с которого начинается его деформирование в составе тела.

Тензор $\mathrm{E}^*(\mathrm{x})$ в (5.1) можно представить в виде двух составляющих

$$
\mathrm{E}^*(\mathrm{x}) = \mathrm{E}_P(\mathrm{x}, \tau^*(\mathrm{x})) + \mathrm{E}_I(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega^*(t) \tag{5.2}
$$

где $\mathrm{E}_P(\mathrm{x}, \tau^*(\mathrm{x}))$ — значение тензора деформации $\mathrm{E}_P(\mathrm{x}, t)$ элемента, которая имела место до присоединения элемента к телу, т. е. при $\tau_b(\mathrm{x}) \leq t < \tau^*(\mathrm{x})$, а $\mathrm{E}_I(\mathrm{x})$ — мгновенная деформация элемента в момент $t = \tau^*(\mathrm{x})$, связанная с самим актом приращивания, например, ударная деформация элемента при падении на поверхность наращивания. Вообще говоря, предыстория тензора предварительной деформации $\{\mathrm{E}_P(\mathrm{x}, \tau), \tau_b(\mathrm{x}) \leq t < \tau^*(\mathrm{x})\}$ и значение тензора мгновенной деформации $\mathrm{E}_I(\mathrm{x})$ должны определяться некоторыми дополнительными соотношениями с учетом особенностей моделируемого процесса. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки данного обзора. Важно заметить, что результирующее значение $\mathrm{E}^*(\mathrm{x})$, в принципе, может быть любым. Теперь обратим внимание, что в систему уравнений, описывающих деформирование континуума постоянного состава, входит уравнение совместности деформаций Сен-Венана, которое тождественно выполняется для тензоров деформации, представимых в виде симметричной части градиента перемещения. Скажем, если $\mathrm{Q} = \operatorname{def} \mathrm{w}$, то $\operatorname{Ink} \mathrm{Q} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathrm{Q})^T \equiv 0$ ($\operatorname{Ink} \mathrm{D}$ — так называемый тензор несовместимости тензорного поля D).

Из (5.1) видно, что тензор E удовлетворяет условию $\operatorname{Ink} \mathrm{E} = 0$ только при условии

$$
\mathrm{E}^*(\mathrm{x}) - [\operatorname{def} \mathrm{u}(\mathrm{x}, \tau)]_{\tau=\tau^*(\mathrm{x})} = \operatorname{def} \mathrm{v}(\mathrm{x}) \tag{5.3}
$$

где v — некоторое произвольное векторное поле (в этом случае $\mathrm{E} = \operatorname{def}(\mathrm{u} + \mathrm{v})$). Ясно, что условие (5.3) может быть удовлетворено лишь в каких-то экзотических случаях, когда предварительная деформация приращиваемых элементов специально организуется таким образом, чтобы условие (5.3) выполнялось. Сказанное означает, что полные деформации элементов наращиваемого тела уравнению совместности Сен-Венана не удовлетворяют

$$\mathrm{Ink}\,\mathbf{E} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^* \tag{5.4}$$

Дифференцирование (5.1) по $t$ дает $\dot{\mathbf{E}} = \mathrm{def}\,\dot{\mathbf{u}}$ и, следовательно

$$\mathrm{Ink}\,\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^* \tag{5.5}$$

что означает совместность скоростей деформации в наращиваемом теле. Механическое содержание уравнения (5.5) очевидно — приращения деформации, приобретаемые материальными элементами в составе сплошного тела, совместны.

Из (5.1) при $t = \tau^*(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{x}, \tau^*(\mathbf{x})) = \mathbf{E}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^*(t) \tag{5.6}$$

что имеет смысл начального условия, накладываемого на тензор $\mathbf{E}$ в момент приращивания элемента. Подчеркнем еще раз, что это начальное значение тензора $\mathbf{E}$ нужно либо определять из дополнительных соотношений, не входящих в систему уравнений задачи для наращиваемого тела, либо явно задавать, принимая во внимание специфику процесса.

Пусть $S^*(t)$ — поверхность наращивания, т. е. часть границы области $\Omega^*(t)$, по которой в момент $t$ к телу присоединяются частицы. Введем параметрическое уравнение $S^*(t)$: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t, \alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta$ — некоторые криволинейные координаты на $S^*$. Все точки $S^*$, согласно ее определению, ассоциируются с частицами, приращиваемыми к телу в один и тот же момент времени. Поэтому очевидно тождество $\tau^*(\mathbf{x}^*(t, \alpha, \beta)) \equiv t$. Подставляя в (5.6) координату $\mathbf{x}^*$ вместо $\mathbf{x}$, будем иметь

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x}^* \in S^*(t) \tag{5.7}$$

Проведенное рассуждение показывает, что начальное условие (5.6) можно трактовать и как граничное условие, формулируемое на поверхности наращивания $S^*(t)$. Это естественно, поскольку всякая внутренняя точка $\mathbf{x}$ области $\Omega^*(t)$ в момент $\tau^*(\mathbf{x}) < t$ лежала на границе области $\Omega^*(\tau^*(\mathbf{x}))$.

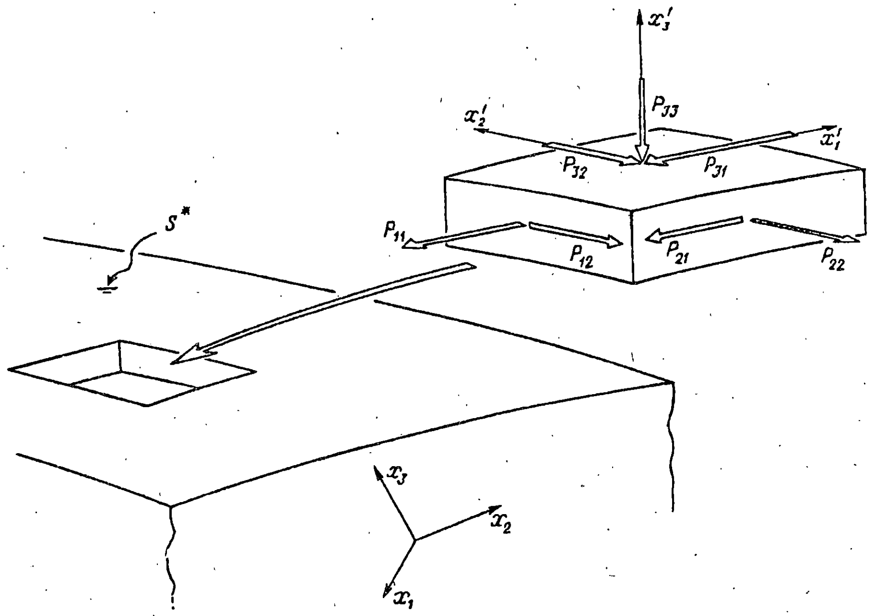
Положим теперь, что реакция материала, о котором идет речь, определяется по предыстории тензора $\mathbf{E}_p$ некоторой тензорно-функциональной зависимостью, учитывающей и мгновенную деформацию $\mathbf{E}_t$. Тогда на поверхности $S^*(t)$ должен быть известен тензор напряжения $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}^*$ — заданный симметричный тензор):

$$\mathbf{T}\,(\mathbf{x}, t)\,|_{\mathbf{x} \in S^*(t)} = \mathbf{T}^* \tag{5.8}$$

Поскольку напряжения и деформации предполагаются связанными некоторым обратимым определяющим соотношением, то можно, наоборот, задавать предыстории тензора напряжения и по ним вычислять значения тензора деформации в момент приращивания элементов.

Таким образом, на поверхности $S^*$ должно формулироваться граничное условие необычного вида — должен задаваться полный тензор напряжения. Отличие от обычного граничного условия «в напряжениях», как видно, принципиальное — там задается только вектор напряжения.

При решении прикладных задач механики наращиваемых тел, по-видимому, удобнее задавать граничное условие на $S^*$ в форме (5.8), а не (5.7), поскольку во многих случаях контролю подвергаются именно напряжения в приращиваемых элементах, а не деформации. Если форма границы $S^*$ отклоняется от координатных поверхностей в используемой глобальной системе координат, то от компонент $\mathbf{T}^*$ в (5.8) целесообразно перейти к компонентам тензора напряжений




Фиг. 4

в локальной системе координат, связанной с точкой на $S^*$. На фиг. 4 показан инфинитезимальный элемент, выделенный из поверхностного слоя тела непосредственно в момент $t = \tau^*(\mathrm{x})$ его присоединения. Локальные оси $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ введены так, что орты осей $x_1'$ и $x_2'$ лежат в касательной плоскости к $S^*$ в рассматриваемой точке $\mathrm{x} \in S^*$, а орт оси $x_3'$ ортогонален им. Напряжение в точке x характеризуется симметричным тензором **P**. В соответствии со сказанным выше все шесть компонент **P** должны быть заданы. Компоненты $P_{31}$, $P_{32}$, $P_{33}$ образуют обычно задаваемый вектор поверхностного усилия, а компоненты $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{22}$ задают «мембранные» усилия, действующие в плоскости приращиваемого элементарного слоя (компоненты $P_{13}$ и $P_{23}$ на фиг. 4 не показаны). Если системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ для простоты считать декартовыми прямоугольными, то тензор начальных напряжений $\mathbf{T}^*$ в глобальной системе координат и соответствующий тензор **P** в локальной системе координат связаны соотношениями:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^*\mathbf{A}^T = \mathbf{P} \quad \text{или} \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \tag{5.9}$$

где $\mathbf{A} = \alpha_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ — тензор поворота, преобразующий систему координат $Ox_1x_2x_3$ в систему $Ox_1'x_2'x_3'$; $\alpha_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j)$; $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис системы $Ox_1x_2x_3$. В индексной записи формулы (5.9) имеют вид

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl}T^*_{kl} = P_{ij} \quad \text{или} \quad T^*_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}P_{kl} \tag{5.10}$$

Соответственно (5.9) (или (5.10)) граничное условие (5.8) записывается в виде

$$\mathbf{T}|_{\mathrm{x}\in S^*(t)} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \quad (\text{или } T_{ij}|_{\mathrm{x}\in S^*(t)} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}P_{kl}) \tag{5.11}$$

где, повторим, **P** — декартов тензор напряжений, действующий в поверхностном элементе в момент его приращивания, который можно назвать тензором преднапряжения элемента.

**6. К истории вопроса.** Первыми исследованиями, выполненными в области механики непрерывно наращиваемых тел, были аналитические решения некоторых сравнительно простых, но изящных по своей постановке задач, имеющих вместе с тем и прикладное значение. В [12] решена задача об усилении упругого полого цилиндра (ствола орудия) многослойной обмоткой, укладываемой с предварительным натяжением. По-видимому, в этой работе впервые было продемонстрировано «кумулятивное» действие укладываемых бесконечно тонких коаксиальных напрягаемых в окружном направлении витков на обжатие исходного цилиндра. Значение работы [12] для теории наращиваемых тел состоит в том, что впервые было показано влияние фактора наращивания на формирование напряженно-деформированного состояния тела.

Задача о наращивании бесконечного упругого клинообразного тела, находящегося под действием собственного веса, рассмотрена в [13]. Клинообразный массив (плоская деформация) наращивался таким образом, что угол раствора клина непрерывно увеличивался. Рассмотренная в [13] задача служила математической моделью для иллюстрации важности учета последовательности укладки материала при расчете возводимых гравитационных плотин. Следует отметить, что на ранних стадиях развития механики наращиваемых тел рассматривались главным образом задачи, связанные с приложениями в строительстве массивных грунтовых и бетонных сооружений. Задача о наращивании бесконечного клинообразного упругого массива (в условиях плоской деформации), одна грань которого наклонена к горизонту под некоторым произвольным углом, а другая горизонтальна, решена в [14]. Наращивание осуществлялось укладкой бесконечно тонких слоев гравитирующего материала по горизонтальной грани так, что высота возводимого «откоса» непрерывно увеличивалась. Напряженно-деформированное состояние массива на произвольном этапе возведения выражено замкнутыми формулами. В [14] получено замкнутое аналитическое решение центрально симметричной задачи о наращивании самогравитирующего шара из упругого материала, которая, по замыслу авторов, служила математической моделью процесса формирования напряженно-деформированного состояния аккрецирующей планеты. Неоспоримое достижение в [14, 15] состоит в том, что в этих работах впервые в абсолютно четкой форме было сформулировано утверждение о невыполнении уравнений совместности Бельтрами — Мичелла для наращиваемого тела. Поскольку уравнения Бельтрами — Мичелла выводятся из уравнений совместности Сен-Венана с использованием уравнений закона Гука, то фактически утверждение, сформулированное в [14, 15], эквивалентно (5.4) в случае линейно упругого тела. Однако утверждение (5.4), разумеется, справедливо и для общего случая геометрически линейной задачи вне зависимости от конкретных определяющих соотношений.

Утверждение о необходимости замены уравнений совместности полных деформаций в случае наращиваемого тела уравнениями совместности скоростей деформаций впервые сформулировано в [16] при анализе системы уравнений задачи о наращивании линейно вязкоупругого тела. Несовместность полных деформаций в наращиваемом теле и необходимость перехода к уравнениям совместности скоростей деформаций в общей постановке геометрически линейной задачи обоснованы в [17]. Там же указаны условия, при которых деформации в наращиваемом теле совместны (имеются в виду условия (5.3)); эти условия выделяют весьма специфический случай предварительной деформации приращиваемых элементов, который в прикладных задачах практически никогда не имеет места. При всей важности сделанного в [16, 17] вывода о несовместности деформаций в наращиваемом теле, полная постановка начально-краевой задачи в этих работах фактически дана не была. Для завершения постановки задачи требовалось ввести в рассмотрение поверхность наращивания и сформулировать граничное условие на ней. Это было сделано в [18] и затем, независимо, в [19]. Условия, формулируемые на поверхности наращивания $S^*(t)$, обсуждались выше в п. 5. В [10] постановка начально-краевой задачи для наращиваемого тела в случае малых деформаций приобрела тот вид, в который каких-либо существенных дополнений впоследствии уже не вносилось. Подробное изложение этой постановки задачи можно найти также в [11, 20]. Некоторые модификации начально-краевой задачи для наращиваемого тела при инфинитезимальных деформациях рассматривались в [21, 22]. К настоящему времени в рамках обсуждавшейся выше общей постановки задачи для наращиваемого тела решено значительное число модельных и прикладных задач, приведенных либо упоминаемых в [11, 20, 23]. Дальнейшее развитие теории наращиваемых деформируемых тел будет связано, как представляется, с конкретными технологическими приложениями. Для этого безусловно потребуется численная реализация общей постановки задачи в пространственном случае. Определенные шаги в этом направлении, ограниченные, правда, рамками плоской задачи теории упругости, были сделаны в [24—27] применительно к расчету последовательно укладываемых грунтовых массивов.

7. Заключительные замечания. В описанной в общих чертах выше модели наращиваемого твердого тела не затрагивались вопросы, связанные с описанием закона движения поверхности наращивания. Под поверхностью наращивания понимается образ верхнего основания ($\Xi^3 = t$) многообразия $C^*$ (см. фиг. 2) при отображении $C^* \to \chi(B(t), t)$. Помимо деформирования непосредственно наращиваемого тела (имеется в виду случай конечных деформаций, хотя все сказанное далее в этом разделе относится, разумеется, и к геометрически линейным задачам) движение поверхности наращивания в пространстве определяют еще условия, регламентирующие приток массы и преднапряжения (преддеформации) присоединяемых элементов. В принципе, как это подчеркивалось в работах по механике наращиваемых тел (см., например, [11, 28]), движение поверхности наращивания и условия на ней должны определяться из соотношений, описывающих массообмен наращиваемого тела с окружающей средой. Эти соотношения для каждого конкретного моделируемого процесса или класса процессов наращивания определяются их спецификой. Дополнение постановки задачи для наращиваемого тела соответствующими соотношениями для достаточно обобщенного случая сделало бы эту постановку труднообозримой. Поэтому в рамках теории наращиваемых тел внимание, как правило, сосредоточивается на анализе напряженно-деформированного состояния тела при некоторых произвольно задаваемых из тех или иных соображений условиях на поверхности наращивания. Закон движения поверхности наращивания при этом также задается в явном виде.

Ясно, что в некоторых специальных случаях, например при образовании твердой деформируемой фазы за счет фазового перехода, движение поверхности наращивания и условия на ней должны находиться из термодинамических соотношений, представляющих собой одно из возможных расширений модели наращиваемого тела. Вместо некоторого произвольно задаваемого закона движения поверхности наращивания и произвольно задаваемых условий на ней в случае фазового перехода можно, таким образом, говорить о регламентации и того и другого дополнительными соотношениями. Сказанное определяет соотношение между теорией наращиваемых тел и механикой фазовых переходов. Заметим, что каким бы сложным не оказался конкретный вид условий на фронте фазового перехода (а при учете связанности термомеханических полей эти условия весьма сложны), необходимость анализа эволюционирующего с движением фронта состояния твердой фазы в рамках модели наращиваемого тела при этом не отпадает. В частности, неизбежен и отказ от уравнений совместности деформаций. По этой причине решения задач об определении напряженно-деформированного состояния твердотельной фазы, наращиваемой за счет фазового перехода, полученные без отказа от уравнений совместности деформаций, нельзя считать реалистичными. Исключение здесь может быть только одно, если условия на поверхности наращивания будут искусственно «подправлять» предварительные деформации приращиваемых элементов до совместных с деформациями окрестных элементов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехтеориздат, 1952. 280 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Метлов В. В.* О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637—647.
4. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н.* Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85—98.
5. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н.* Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72—86.
6. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред//Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 3. С. 569—571.
7. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* О принципе инвариантности в теории неоднородно стареющих сред//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 1049—1051.
8. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н.* Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1.

Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью//Изв. АН. МТТ. 1992. № 5. С. 6—24.

9. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н.* Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью//Изв. АН. МТТ. 1992. № 6. С. 99—112.
10. *Метлов В. В., Турусов Р. А.* О формировании напряженного состояния вязкоупругих тел, растущих в условиях фронтального отверждения//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 145—160.
11. *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
12. *Southwell R. V.* An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Oxford: University Press, 1941. VII+509 p.
13. *Рашба Э. И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения//Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1953. № 18. С. 23—27.
14. *Goodman L. E., Brown C. B.* Dead load stresses and the instability of slopes//J. Soil Mech. and Foundat. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1963. V. 89. No. 3. P. 103—134.
15. *Brown C. B., Goodman L. E.* Gravitational stresses in accreted bodies//Proc. Roy. Soc. London. A. 1963. V. 276. No. 1367. P. 571—576.
16. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела//Механика стержневых систем и сплошных сред. Сб. тр. Вып. 49. Л., 1966. С. 93—119.
17. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела//ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783—789.
18. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142—152.
19. *Тринчер В. К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 119—124.
20. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э.* Механика растущих вязкоупругопластических тел.— М.: Наука, 1987. 472 с.
21. *Образцов И. Ф., Паймушин В. Н., Сидоров И. Н.* О постановках задачи непрерывного наращивания упругих тел//Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 4. С. 813—816.
22. *Быковцев Г. И., Луканов А. С.* Некоторые вопросы теории затвердевающих и наращиваемых вязкоупругих сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 116—118.
23. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
24. *Brown C. B.* Forces on rigid culverts under high fills//J. Struct. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1967. V. 93. No. 5. P. 195—215.
25. *Brown C. B., Green D. R., Pawsey S.* Flexible culverts under high fills//J. Struct. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1968. V. 94. No. 4. P. 905—917.
26. *Aggour M. S., Brown C. B.* The prediction of earth pressure on retaining walls due to compaction//Geotechnique. 1974. V. 24. No. 4. P. 489—502.
27. *Christiano P. P., Chuntranuluck S.* Retaining wall under action of accreted backfill//J. Geotechn. Eng. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1974. V. 100. No. 4. P. 471—476.
28. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э.* Об одном механизме формообразования растущих вязкоупругих тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 57—65.

Москва

Поступила в редакцию

14.II.1993