МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 531.36

© 1993 г. Л. Д. АКУЛЕНКО

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕСБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОТОР

Рассмотрена задача минимизации плоских колебаний твердого тела (корпуса), связанного с неподвижным основанием посредством вязкоупругих демпферов (амортизаторов). С корпусом жестко связан несбалансированный вращающийся ротор, который может приводить к дополнительному возбуждению колебаний как в резонансном, так и в нерезонансном режимах. В качестве управляющих воздействий принимаются переменные коэффициенты жесткости и вязкости, регулируемые в некоторых малых пределах. При помощи асимптотических методов оптимального управления получено решение задачи существенной минимизации амплитуды относительных горизонтальных и вертикальных колебаний на фиксированном асимптотически большом интервале времени. Установлены качественные эффекты, связанные с возможностью полного гашения начальных и подавления вынужденных колебаний корпуса.

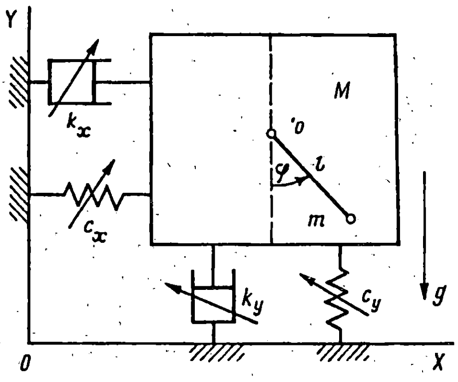
1. Описание модели и постановка задачи управления. Исследуется плоская вращательно-колебательная система, схематически представленная на фигуре. Предполагается, что несущее тело (корпус) может перемещаться плоскопараллельно в пределах, допускаемых амортизационными устройствами, при помощи которых оно связано с неподвижным основанием (осями OXY). Система содержит вращающийся вокруг связанной с корпусом подвижной оси o несбалансированный ротор, приводящий к возбуждению колебаний несущего тела. Она может подвергаться воздействию внешних, в частности, массовых (гравитационных) сил. Ставится задача гашения начальных (собственных) и вынужденных колебаний тела при помощи управляемого изменения характеристик амортизационных устройств. Постановки задач параметрического управления движением колебательных систем представляют несомненный теоретический интерес [1]. Их решение может быть полезным в прикладном аспекте, поскольку имеются технические возможности реализации таких управлений на основе электромеханических устройств [2, 3].

При математической постановке задачи стабилизации корпуса будем следовать, в основном, подходу, развитому в [1]. Предположим, что корпус имеет массу M и по осям X и Y связан при помощи вязкоупругих амортизаторов с неподвижным основанием. Амортизаторы характеризуются коэффициентами вязкости $k_{x,y}$ и упругости $c_{x,y}$; в общем случае $k_x \neq k_y$, $c_x \neq c_y$. Пусть масса ротора равна m, а его дебаланс — l. Для определенности будем учитывать влияние силы тяготения, ускорение которой направлено вдоль оси Y. Координаты корпуса x, y отсчитываются относительно недеформированного состояния амортизаторов, а угол φ — относительно вертикали. Предполагая колебания малыми, получим уравнения движения для рассматриваемой системы с тремя степенями свободы

$$M^*\ddot{x} + k_x\dot{x} + c_x x = ml(\omega^2 \sin\varphi - \gamma\cos\varphi) + f_x$$

$$M^*\ddot{y} + k_y\dot{y} + c_y y = -M^*g - ml(\omega^2\cos\varphi + \gamma\sin\varphi) + f_y \qquad (1.1)$$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = \gamma, \quad \gamma(t) \in \Gamma$$



Здесь $M^{*} = M + m$ — полная масса системы, g — ускорение сил тяготения, $f_{x,y}$ — внешние воздействия. Угловое ускорение ротора γ трактуется как управление кинематического типа. Влиянием движения корпуса на вращение ротора пренебрегается, что, конечно, требует соответствующего обоснования. Это допущение оправдано для ряда электромеханических приводов [1—3].

Начальные условия для переменных x, y, φ и их производных предполагаются заданными

$$\begin{gathered} x(t_0) = x^0, \ y(t_0) = y^0, \ \varphi(t_0) = \varphi^0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}^0, \ \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \ \omega(t_0) = \omega^0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Если к корпусу приложены управляющие воздействия $(f_x, f_y) \in F$, то задача гашения колебаний становится в некотором смысле стандартной. Она может быть изучена хорошо развитыми аналитическими и численными методами теории оптимального управления [1, 4] и др. Для приложений, однако, представляет существенный интерес исследование задачи управления системой (1.1), в которой параметры $k_{x,y}$, $c_{x,y}$ амортизаторов являются регулируемыми в допустимых фиксированных пределах. Таким образом, в уравнения движения (1.1) управляющие функции могут входить мультипликативно, что далее и предполагается.

Запишем уравнения движения в безразмерных переменных путем введения единиц времени ν^{-1} и длины L, которые естественно связать с периодом и амплитудой колебаний корпуса. Переменные x, y, φ и их производные преобразуются к безразмерным (штрихованным) следующим образом

$$\begin{gathered} x' = x/L, \ y' = y/L, \ \varphi' = \varphi, \ t' = \nu t \\ \dot{x}' = \dot{x}/\nu L, \ \dot{y}' = \dot{y}/(\nu L), \ \omega' = \omega/\nu \end{gathered} \tag{1.3}$$

По формулам (1.3) преобразуются также начальные значения (1.2). Безразмерные параметры, управления и силы вводятся аналогично [1]

$$\begin{gathered} \nu'_{x,y} = \nu_{x,y}\nu^{-1}, \ \nu^2_{x,y} = c^{\circ}_{x,y}/M^{*}, \ c_{x,y} = c^{\circ}_{x,y}(1 + \varepsilon u'_{x,y}) \\ \varepsilon k'_{x,y} = k_{x,y}/(M^{*}\nu), \ \varepsilon\mu' = ml/(M^{*}L), \ g' = g/(L\nu^2) \\ f'_{x,y} = f_{x,y}/(M^{*}L\nu^2), \ \varepsilon\gamma' = \gamma\nu^{-2}, \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 << 1 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $c^{\circ}_{x,y}$ — средние значения коэффициентов жесткости, $\varepsilon u_{x,y}'$ — относительные малые вариации этих коэффициентов, ε — малый числовой параметр. Далее штрихи у безразмерных переменных (1.3), параметров, сил и управляющих функций для сокращения записи опускаются. Заметим, что согласно (1.4) коэффициенты линейного трения по обеим переменным x, y считаются малыми, т. е. при малых ε система уравнений движения корпуса является колебательной с заданным периодическим воздействием по фазе φ. Частота внешнего возбуждения $\omega(\tau)$ есть медленная переменная.

Аналогично [1] рассмотрим задачу гашения начальных колебаний посредством выбора управляющих функций $u_{x,y}$, $k_{x,y}$, полагая $f_{x,y} = O(\varepsilon^2)$. На управления $u_{x,y}$ налагаются (без ограничения общности) симметричные ограничения, а на $k_{x,y}$ — несимметричные, учитывающие, например, условие диссипативности

$$|u_{x,y}| \le u^{\circ}_{x,y}, \quad 0 \le k^{-}_{x,y} \le k_{x,y} \le k^{+}_{x,y} \tag{1.5}$$

Используя (1.4), приведем уравнения управляемого движения корпуса (1.1) к безразмерному виду, допускающему при малых $\varepsilon > 0$ применение асимптотических методов [1]:

$$\begin{gathered}
\ddot{x} + \nu_x^2 x = -\varepsilon\nu_x^2 x u_x - \varepsilon\dot{x}k_x + \varepsilon\mu\omega^2 \sin\varphi \\
\ddot{y} + \nu_y^2 y = -g - \varepsilon\nu_y^2 y u_y - \varepsilon\dot{y}k_y - \varepsilon\mu\omega^2\cos\varphi \\
\dot{\varphi} = \omega(\tau), \quad \omega(\tau) \in \Omega, \quad \tau = \varepsilon t \in [\tau_0, \Theta]
\end{gathered} \tag{1.6}$$

В уравнениях (1.6) отброшены члены $O(\varepsilon^2)$ и предполагается, что закон $\omega(\tau)$ из заданного класса Ω медленного изменения скорости вращения ротора задан, причем $\omega \sim \nu_{x,y}$. Построения режимов управления проводятся далее для системы (1.6). Эта система состоит из двух слабоуправляемых независимых осцилляторов, подверженных общему 2π-периодическому по фазе φ внешнему воздействию. Итак, рассматривается задача минимизации энергии относительных колебаний корпуса на асимптотически большом интервале времени $t \in [t_0, \Theta\varepsilon^{-1}]$; $\Theta \sim 1$:

$$\begin{gathered}
E_{x,y}(\Theta) \to \min; \quad E_x = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \nu_x^2 x^2) \\
E_y = \tfrac{1}{2}[\dot{y}^2 + \nu_y^2 (y - y_0)^2], \quad y_0 = -g\nu_y^{-2}
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Управляющие воздействия $u_{x,y}$, $k_{x,y}$ параметрического (мультипликативного) типа предполагаются кусочно гладкими удовлетворяющими ограничениям (1.5). Следует обратить внимание на то, что эффективность управлений u_x, k_x убывает при $E_x \to 0$. Поэтому полное гашение горизонтальных колебаний ($E_x(\Theta) \sim \varepsilon$) представляется проблематичным и дополнительно затрудняется наличием внешнего воздействия со стороны вращающегося ротора. В случае вертикальных колебаний, для которых $y \to y_0$, $\dot{y} \to 0$ при $E_y \to 0$, ситуация другая. А именно, эффективность управления k_y падает, а u_y — остается постоянной, см. ниже. Заметим, что амплитуды относительных колебаний $a_{x,y}$ и энергии $E_{x,y}$ связаны соотношениями: $a_{x,y} = (2E_{x,y})^{1/2}\nu_{x,y}^{-1}$. Поэтому задачи минимизации $a_{x,y}$ и $E_{x,y}$ эквивалентны. Предварительные результаты минимизации амплитуды колебаний систем, возбуждаемых вращающимся ротором, посредством изменения коэффициентов жесткости амортизаторов см. в [1, 3, 5].

2. Гашение колебаний корпуса в нерезонансном случае. Предположим сперва, что в процессе движения для всех $\tau \in [\tau_0, \Theta]$ выполняются условия $(\nu_{x,y} - \omega) = O(1)$, т. е. имеет место нерезонансная ситуация. Переходя к оскулирующим переменным «амплитуда—фаза» ($a_{x,y}$, $\psi_{x,y}$) (или «энергия—фаза» ($E_{x,y}$, $\psi_{x,y}$)), согласно [1] выпишем для искомых медленных переменных $a_{x,y}$ уравнения движения и их связь с исходными фазовыми переменными x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$:

$$\begin{gathered}
\dot{a}_x = -\varepsilon\nu_x^{-1}(\nu_x^2 x u_x + \dot{x}k_x - \mu\omega^2\sin\varphi)\cos\psi_x \\
\dot{a}_y = -\varepsilon\nu_y^{-1}(\nu_y^2 y u_y + \dot{y}k_y + \mu\omega^2\cos\varphi)\cos\psi_y
\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}
x = a_x \sin\psi_x, \quad \dot{x} = a_x\nu_x\cos\psi_x \\
y = y_0 + a_y\sin\psi_y, \quad \dot{y} = a_y\nu_y\cos\psi_y
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Начальные значения $a^\circ_{x,y}$ находятся согласно формулам (2.2) и выражениям (1.2). Уравнения для фаз $\psi_{x,y}$ в (2.1) не приведены, поскольку они не используются при построении решения первого приближения.

Применим приближенный метод [1], основанный на сочетании условий оптимальности принципа максимума [4] и метода усреднения [6, 7]. Учитывая равенство нулю средних от внешнего воздействия, знакопостоянство и медленность сопряженной переменной p_x, а также неособенность управлений u_x, k_x ($p_x \le \delta < 0$), получим выражения для оптимальных управлений в форме синтеза и уравнение движения в медленном времени τ:

$$\begin{aligned} &u_x = u_x^\circ \operatorname{sign}(x\dot{x}), \ k_x = k_x^+, \ \tau \in [\tau_0, \ \Theta] \\ &\dot{a}_x = -\lambda_x a_x, \ a_x(\tau_0) = a_x^\circ, \ \lambda_x = u_x^\circ \nu_x/\pi + \tfrac{1}{2}k_x^+ \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что для конечных Θ амплитуда $a_x(\tau)$ не достигает предельного нулевого значения. Очевидно, это обусловлено тем, как отмечалось ранее, что имеет место управление мультипликативного типа, эффективность которого неограниченно падает с уменьшением a_x; в результате получаем $a_x(\tau) = \mathring{a}_x \exp[-\lambda_x(\tau - \tau_0)]$. Таким образом, в нерезонансном случае приближенное решение задачи оптимального гашения горизонтальных колебаний корпуса построено в виде (2.3).

Анализ задачи управления вертикальными колебаниями несколько сложнее. Если величина Θ не очень велика, то особые управления отсутствуют и имеет место ситуация, аналогичная рассмотренной выше для горизонтальных колебаний. А именно, оптимальные управления в форме синтеза и уравнение движения получаются в виде

$$\begin{aligned} &u_y = u^\circ \operatorname{sign}(y\dot{y}), \ k_y = k_y^+, \ \tau \in [\tau_0, \Theta] \\ &\dot{a}_y = -\lambda_y(a_y)\, a_y, \ a_y(\tau_0) = a_y^\circ \\ &\lambda_y(a_y) = u_y^\circ \nu_y d(a_y)/\pi + \tfrac{1}{2}k_y^+ \\ &d(a_y) = 2|y_0|/a_y, \ 0 < a_y \le |y_0| \\ &d(a_y) = 1 + y_0^2/a_y^2, \ |y_0| \le a_y < \infty \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (2.4) при больших a_y ($a_y \gg |y_0|$) следует, что управление и движение по вертикальной координате y близки к рассмотренным выше для x. В области малых значений a_y ($a_y < |y_0|$) управление и движение кардинально отличаются. Существенно то, что величина y становится знакоопределенной; поэтому $u_y \sim \operatorname{sign} y_0 \operatorname{sign} \dot{y}$. Следовательно, эффективность управления u_y не уменьшается неограниченно (до нуля) при $a_y \to 0$, а остается конечной. Имеет место ситуация, эквивалентная наличию аддитивной внешней управляющей силы вида $f_y \simeq -\varepsilon\nu_y^2 y_0 u_y$, $|u_y| \le u_y^0$. Влияние такой силы на колебательную систему типа (1.6) для y подробно изучено [1].

Рассмотрим уравнение для a_y (2.4) в области $0 < a_y \le |y_0|$:

$$\dot{a}_y = -(2/\pi)\, u_y^\circ \nu_y |y_0| - \tfrac{1}{2}k_y^+ a_y, \ a_y(\tau^*) = a_y^* \le |y_0| \tag{2.5}$$

Как было условлено ранее, считаем $k_y^+ > 0$. Если в некоторый момент $\tau = \tau^* \ge \tau_0$, $\tau^* < \Theta$ амплитуда a_y попала в область $0 < a_y \le |y_0|$, то далее возможны два варианта движения. Эти возможности определяются интервалом $\Theta - \tau^*$, оставшимся до конца процесса управления. Для определения его критического значения найдем решение задачи Коши (2.5) и условие обращения $a_y(\Theta)$ в нуль

$$a_y(\tau) = a_y^* \exp[-\tfrac{1}{2}k_y^+(\tau-\tau^*)] - (4/\pi)\, u_y^\circ (\nu_y\, |y_0|/k_y^+)\, \{1-\exp[-\tfrac{1}{2}k_y^+(\tau-\tau_*)]\}$$

$$\Theta - \tau^* = (2/k_y^+) \ln[1 + \pi a_y^* k_y^+ (4u_y^\circ \nu_y\, |y_0|)^{-1}] \equiv \Theta^* - \tau^* \tag{2.6}$$

При $\Theta \le \Theta^*$ имеем неособый случай управления (2.4).

Итак, если $a_y^0 > |y_0|$, то на начальном этапе $\tau \in [\tau_0, \tau^*]$ происходит убывание амплитуды колебаний $a_y(\tau)$, близкое к экспоненциальному (типа $a_x(\tau)$) с показателем $\lambda_y \approx \lambda_y(\infty) = u_y^0 \nu_y/\pi + \tfrac{1}{2}k_y^+$. Для точного определения $a_y(\tau)$ требуется проинтегрировать уравнение Бернулли, сводящееся к линейному относительно $z = a_y^2$:

$$z = (a_y^{\circ 2} + f/k) \exp[-k(\tau - \tau_0)], \quad f = 2hy_0^2$$
$$h = u_y^\circ \nu_y/\pi, \quad k = 2h + k_y^+, \quad a_y^\circ > |y_0| \tag{2.7}$$

Очевидно, при $a_y^0 \gg |y_0|$ величина $\lambda_y \approx 1/2k$; величина $a_y(\tau)$ убывает согласно (2.7) по экспоненте: $a_y(\tau) \simeq a_y^0 \exp[-\tfrac{1}{2}k(\tau - \tau_0)]$.

Если значение Θ достаточно велико, то существует момент $\tau = \tau^*$ такой, что $a_y(\tau^*) = |y_0|$; он определяется выражением, аналогичным (2.6) для Θ^*:

$$\tau^* - \tau_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{1 + a_y^{\circ 2}k/f}{1 + y_0^2 k/f} > 0 \quad (\tau^* < \Theta) \tag{2.8}$$

Таким образом, неособый случай управления описан полностью, Как установлено, в общей ситуации он может состоять из двух этапов движения, отвечающих соответственно «большим» амплитудам колебаний: $a_y \ge |y_0|$, $\tau \in [\tau_0, \tau^*]$ и «малым» амплитудам: $0 < a_y < |y_0|$, $\tau \in [\tau^*, \Theta]$. В зависимости от величин a_y^0 и Θ один из этапов может отсутствовать. Условия их наличия определены выше и должны проверяться в каждый текущий момент времени (синтез).

Второй вариант движения обусловлен возможностью особого управления вертикальными колебаниями корпуса. Он имеет место, если $\Theta > \Theta^*$. В этом случае достигается абсолютный минимум функционала $E_y(\Theta)$ (1.7); согласно (2.6) амплитуда $a_y(\Theta^*) = O(\varepsilon)$ и при $\tau \in (\Theta^*, \Theta]$ в соответствии с (2.4), (1.6) осуществляется скользящий режим. Управление u_y (2.4) удерживает переменную y в ε-окрестности значений $y = y_0$, $\dot{y} = 0$. Заметим, что эффективность управления k_y равна нулю в первом приближении по ε. Далее, если при этом положить $u_y \equiv 0$, $k_y \in [k_y^-, k_y^+]$, то переменная $a_y(\tau) \simeq O(\varepsilon)$ для $\tau \in (\Theta^*, \Theta]$. Нужно отметить, что управления u_y, k_y строятся неоднозначно [1]. Они могут быть выбраны произвольными из допустимого класса. В частности, можно положить

$$u_y = \xi(\Theta - \tau)\, u_y^\circ\, \mathrm{sign}(y\dot{y}), \quad \xi \in [0, 1], \quad k_y(\Theta - \tau) \in [k_y^-, k_y^+] \tag{2.9}$$

где ξ, k_y — любые кусочно-гладкие функции, но такие, чтобы $a_y(\Theta) = 0$. По-видимому, предпочтительнее собственные колебания гасить на начальном участке $\tau \in [\tau_0, \Theta^*]$, а остающийся интервал времени $\tau \in (\Theta^*, \Theta]$ использовать для парирования возмущений и стабилизации требуемого состояния. Отметим, что корпус будет совершать малые колебания с амплитудой $O(\varepsilon)$, которые дополнительно возбуждаются вращающимся ротором. Согласно методу эквивалентной линеаризации [6, 8], законы управления колебаниями (2.3), (2.4) для членов, содержащих $u_{x,y}$, соответствуют вязкому трению

$$xu_x \sim \frac{2}{\pi} \frac{u_x^\circ}{\nu_x} \dot{x}, \quad yu_y \sim \frac{2}{\pi} \frac{u_y^\circ}{\nu_y} d(a_y)\, \dot{y} \tag{2.10}$$

Таким образом, построено искомое приближенное решение задачи минимизации амплитуды колебаний корпуса путем регулируемой подстройки параметров амортизаторов в нерезонансной зоне вращения ротора. Внешнее возбуждение при этом незначительно влияет на амплитуду колебаний в горизонтальном и вертикальном направлениях. Для приложений, однако, представляет существенный интерес анализ управления в резонансных режимах вращения ротора (при прохождении или застревании на резонансах) [1].

3. Стабилизация корпуса в резонансном режиме вращения ротора. Рассмотрим задачу минимизации амплитуды колебаний в резонансной зоне, когда для рассматриваемых значений $\tau \in [\tau_0, \Theta]$ имеет место близость частот внешнего воздействия $\omega(\tau)$ и собственных колебаний $\nu = \nu_{x,y}$ [1]:

$$\omega(\tau) = \nu + \varepsilon\sigma(\tau), \quad \varphi = \varphi^\circ + \nu(t - t_0) + \eta(\tau), \quad \eta(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{3.1}$$

Посредством замен (2.2), где введены обозначения

$$r = r_0 + a\sin\psi, \quad \dot r = a\nu\cos\psi, \quad \psi = \varphi + \alpha$$
$$(r = x, y;\ r_0 = 0,\ y_0) \tag{3.2}$$

получим уравнения для амплитуд $a = a_x$, a_y и фазовых расстроек $\alpha = \alpha_x$, α_y:

$$\dot a = -(\varepsilon/\nu)(\nu^2 ur + k\dot r - \mu\nu^2\sin\varphi)\cos\psi$$
$$\dot\alpha = -\varepsilon\sigma(\tau) + (\varepsilon/\nu a)(\nu^2 ur + k\dot r - \mu\nu^2\sin\varphi)\sin\psi \tag{3.3}$$

Правые части уравнений (3.3) содержат переменные r, $\dot r$, для которых должны быть подставлены выражения (3.2), причем здесь отброшены члены $O(\varepsilon^2)$. Заметим, что в случае резонанса связь между амплитудой и фазой проявляется в первом приближении метода усреднения. Этим обусловлено введение фазовой расстройки α, начальное значение которой $\alpha(\tau_0) = \alpha^0$ определяется при помощи (3.2) и, как оказывается, существенно влияет на динамику управляемой системы, см. ниже.

Для определения управления движением системы (3.3) применим условия оптимальности принципа максимума [4]. Введем переменные $p = p_x$, p_y и $\rho = \rho_x$, ρ_y, сопряженные a и α соответственно. Из условия максимума функции Гамильтона находим управления u^*, k^*:

$$u^* = u^\circ \operatorname{sign} r\,(p\cos\psi - \rho a^{-1}\sin\psi)$$
$$k^* = ½(k^- + k^+) - ½(k^+ - k^-)\operatorname{sign}\dot r\,(p\cos\psi - \rho a^{-1}\sin\psi) \tag{3.4}$$

Подставим выражения (3.4) в функцию Гамильтона и усредним по угловой переменной φ. Для усредненного гамильтониана h в медленном времени τ получим представление

$$h = u^\circ\nu I_r + ½(k^+ - k^-)\nu^{-1}I_{\dot r} + ¼(k^- + k^+)ap -$$
$$- ½\mu\nu(p\sin\alpha + \rho a^{-1}\cos\alpha) - \rho\sigma(\tau) \tag{3.5}$$
$$I_r \equiv \langle|r\beta|\rangle, \quad I_{\dot r} \equiv \langle|\dot r\beta|\rangle, \quad \beta \equiv p\cos\psi - \rho a^{-1}\sin\psi$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по явно входящему аргументу φ, т. е. по ψ, причем для r, $\dot r$ подставляются выражения (3.2). Построение аналитических представлений для средних затруднено и представляется весьма громоздким, особенно для члена, содержащего $r = y = y_0 + a_y\sin\psi_y$. Для $r = x = a_x\sin\psi_x$ имеем [1] (индекс x опускаем):

$$I_r = I_x = (a/\pi)\Pi(\sqrt{1 - \chi^2} + \chi\arcsin\chi)$$
$$\chi = \rho/(a\Pi), \quad \Pi = [p^2 + (\rho/a)^2]^{1/2}, \quad -1 \le \chi \le 1 \tag{3.6}$$

В случае большой амплитуды вертикальных колебаний, т. е. $a_y \gg |y_0|$, выражение (3.6) является приближенным для $r = y$ (с относительной погрешностью $O(|y_0|/a_y)$). Если амплитуда $a_y \le |y_0|$, что представляет интерес для приложений, то имеем относительно простое выражение для $I_r = I_y$:

$$I_y = (2/\pi)\,|y_0|\,\textstyle\prod_y,\quad \prod_y \equiv [p_y^2 + (\rho_y/a_y)^2]^{1/2} \tag{3.7}$$

Отметим, что здесь использовано тождество относительно δ: $\langle \sin\psi \times$ $\times |\cos(\psi + \delta)| \rangle \equiv 0$.

Вычислим теперь среднее для слагаемого, содержащего $\dot r = a\nu\cos\psi$. Это выражение одинаково для $\dot r = \dot x$, $\dot y$; действительно, получим

$$\begin{aligned} &I_{\dot r} \equiv \langle\, |\dot r\beta|\, \rangle = (\nu a/\pi) \textstyle\prod (\sqrt{1-\varkappa^2} + \varkappa \arcsin\varkappa) \\ &\varkappa = p/\textstyle\prod,\quad -1 \le \varkappa \le 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Нетрудно видеть, что выражение (3.8) для $I_{\dot r}$ получается из выражения для I_r (3.6) умножаем на ν и заменой аргументов (ρ/a) на p и наоборот. Далее подлежат решению двухточечные краевые задачи с гамильтонианами $h_{x,y}$ (3.5) в медленном времени τ, $\tau \in [\tau_0, \Theta]$:

$$\begin{aligned} &a^{\cdot} = \partial h/\partial p,\quad \alpha^{\cdot} = \partial h/\partial \rho;\quad a(\tau_0) = a^\circ,\quad \alpha(\tau_0) = \alpha^\circ \\ &p^{\cdot} = -\partial h/\partial a,\quad \rho^{\cdot} = -\partial h/\partial \alpha;\quad p(\Theta) = -1,\quad \rho(\Theta) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Интегрирование гамильтоновой системы уравнений и удовлетворение граничным условиям решений в задачах (3.9) требует применения численных методов [9, 10]. Отметим, что рассмотренный в п. 2 нерезонансный случай получается из (3.5), (3.9), если положить $\mu = 0$, $\sigma \equiv 0$. Уравнения для a, p тогда не зависят от α, ρ. Заметим также, что решения задач (3.9) в общем случае крайне затруднительны и могут привести к особым управлениям, связанным с вырождением краевой задачи. Если параметр μ в некотором смысле мал, то можно применить метод возмущений (по степеням μ), в основе которого лежит известное порождающее решение, отвечающее нерезонансному случаю. Для горизонтальных колебаний такие разложения нетрудно получить с погрешностью $O(\mu^2)$. В результате искомое решение задачи оптимального управления с ошибкой $O(\mu^2)$ имеет вид [1]

$$a = a^\circ \exp\left[-\tfrac{1}{2}\lambda(\tau - \tau_0)\right] - \mu\frac{\nu}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left[\lambda(\theta - \tau)\right] \sin\alpha_0(\theta)\, d\theta$$

$$\alpha = \alpha^\circ - \int_{\tau_0}^{\tau} \sigma(\theta)\, d\theta + \frac{\nu}{a^\circ}\int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{2}{\pi} u^\circ \rho(\theta) - \frac{\mu}{2}\cos\alpha_0(\theta)\right] e^{\lambda\theta} d\theta$$

$$p = -\exp\left[\lambda(\tau - \Theta)\right],\quad \rho = -\mu\frac{\nu}{2}\int_{\Theta}^{\tau} \exp\left[\lambda(\theta - \Theta)\right]\cos\alpha_0(\theta)\, d\theta$$

Суммарная погрешность решения будет $O(\varepsilon + \mu^2)$.

Отметим следующее важное обстоятельство. Как установлено в п. 2, переменная $a_x(\tau)$ нуля не достигает, так как эффективность управления падает и оно эквивалентно линейной диссипации согласно (2.10). В резонансной зоне при достаточно больших μ и Θ путем управления фазовой расстройкой α_x можно иногда добиться, чтобы $a_x(\Theta) = 0$, т. е. внешнее возбуждение со стороны вращающегося ротора может интерпретироваться как управляющее воздействие, см.

ниже. Для установления этого факта упростим задачу, предположив, что u_x — медленное управление, т. е. $u_x = u_x(\tau)$, а регулирование коэффициента k_x отсутствует: $k_x = \text{const}$. Усредним систему (3.3) по φ; получим в медленном времени τ:

$$a^{\cdot} = -\tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{2}\mu\nu \sin\alpha, \quad a(\tau_0) = a^{\circ} > 0$$
$$\alpha^{\cdot} = -\sigma(\tau) + \tfrac{1}{2}\nu u - \tfrac{1}{2}\mu\nu a^{-1}\cos\alpha, \quad \alpha(\tau_0) = \alpha^{\circ} \qquad (3.10)$$

Здесь и далее индекс x опускаем для сокращения записи. Отметим еще, что в случае медленного управления u_y, $u_y = u_y(\tau)$ усредненные уравнения (3.3) также имеют вид (3.10) и для переменных a_y, α_y. Будем далее считать, что управление $u(\tau)$ «превосходит» частотную расстройку $\sigma(\tau)$, т. е. при $\tau \in [\tau_0, \Theta]$:

$$\tfrac{1}{2}\nu u(\tau) - \sigma(\tau) \equiv v(\tau) \in V = \{v : v_1 \le v \le v_2\} \qquad (3.11)$$

где $v_1 < 0$, $v_2 > 0$. Функция медленного аргумента $v(\tau)$ принимается за новое управление. Без ограничения общности полагаем, что $\alpha^{\circ} \in [0, 2\pi)$. Из вида системы (3.10) следует стратегия построения кусочно постоянного управления $v(\tau)$ (3.11). Требуется выбором $v(\tau) \equiv v_{1,2}$ добиться, чтобы в некоторый момент медленного времени $\tau = \Theta_* < \Theta$ фазовая переменная $\alpha(\Theta_*) = \pi/2$. Тогда, полагая $v(\tau) \equiv 0$ при $\tau > \Theta^*$, получим случай убывания амплитуды $a(\tau)$ до нуля за конечное время согласно (2.5), (2.6) со скоростью $a^{\cdot} \le -\tfrac{1}{2}\mu\nu$. Этот режим реализуем, если $|v_{1,2}|$ достаточно велики, а α° близко к $\pi/2$.

Заметим, что такое движение будет неустойчивым, поскольку при $v \equiv 0$ точка покоя $\alpha = \pi/2$ для второго уравнения (3.10) экспоненциально неустойчива, причем степень неустойчивости неограниченно растет при $a(\tau) \to 0$. В общем случае резонансные вращения ротора приводят к существенному возбуждению колебаний корпуса. Их амплитуда будет ограниченной, а предельным значением будет величина $a_* \simeq \mu\nu k^{-1}$ при достаточно больших Θ. Наличие быстропеременных (с частотой ν) управлений u, k ситуацию изменить кардинальным образом не может.

Рассмотрим задачу гашения вертикальных колебаний корпуса, для которых согласно (3.2) имеем выражение $r = y = y_0 + a_y \sin\psi_y$. Найдем локально оптимальное управление u_y в форме синтеза, максимизирующее скорость убывания a_y согласно (3.3): $u_y^* = u_y^0 \operatorname{sign}(y\dot{y})$.

Соответствующее усредненное уравнение имеет вид

$$a_y^{\cdot} = -\nu u_y^{\circ} I_y - \tfrac{1}{2}k_y a_y - \tfrac{1}{2}\mu\nu \sin\alpha_y, \quad a_y(\tau_0) = a_y^{\circ}$$
$$I_y \equiv \langle\, |y\cos\psi|\,\rangle; \quad I_y = (2/\pi)\,|y_0|, \quad |y_0| \ge a_y \qquad (3.12)$$
$$I_y = (a_y + y_0^2/a_y)/\pi, \quad |y_0| \le a_y$$

Из (3.12) следует, что если $(2/\pi)\,|y_0|\,u_y^{\circ} > \mu$, то локально оптимальное управление u_y^* позволяет подавить резонансное возбуждение и погасить собственные колебания корпуса в вертикальном направлении путем регулирования параметра жесткости амортизатора. Этот вывод аналогичен нерезонансному случаю, для которого можно условно считать $\mu = 0$, т. е. приведенное выше неравенство выполняется всегда.

Таким образом, стабилизация корпуса вблизи резонансной зоны вращений ротора затруднена. Для ее реализации необходимо экстремально ограничивать колебания за счет эквивалентной линейной диссипации и эффективно гасить колебания вне резонансной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
2. *Фролов К. В.* Уменьшение амплитуды колебаний резонансной системы путем управляемого изменения параметров//Машиноведение. 1965. № 3. С. 38—42.
3. *Akulenko L. D., Bolotnik N. N., Heinman B. et al.* Dynamik und optimale Schwingungstilgung in unwuchterregten Schwingsystemen. Report R — 03/80. Berlin: ZIMM AdW DDR. 1980. 110 S.
4. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
5. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об амортизации вращающихся частей механизмов//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 40—47.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
8. *Акуленко Л. Д.* Эквивалентная линеаризация квазилинейных колебательных систем с медленно изменяющимися параметрами//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 717—725.
9. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
10. *Roberts S. M., Shipman J. S.* Two-point boundary value problem. Shooting methods. New York: Amer. Elsevier Publ. Co., 1972. 269 p.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1992