МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 534.1

© 1993 г. Е. А. ПРИВАЛОВ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА НЕГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С ДВУСТОРОННИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ДВИЖЕНИЯ

Изучение виброударных систем — механических систем, колебания которых сопровождаются соударениями их элементов или ударами о неподвижные ограничители — стимулируется потребностями развития различных областей техники, в частности гироскопии [1]. В моменты ударов некоторые из переменных, описывающих движение этих систем, терпят разрывы, что препятствует непосредственному применению к их уравнениям аналитических методов исследования. С целью преодоления этих трудностей был предложен метод негладких преобразований [1], при использовании которого делается переход от исходных переменных к переменным, не претерпевающим разрывов в моменты ударов. Виброударные системы могут быть разделены на два типа. Системами первого типа являются системы с односторонним ограничением движения, второго — с двусторонним ограничением. Следуя методу негладких преобразований, для каждого из упомянутых типов виброударных систем необходимо сделать соответствующую замену переменных.

В [2] была предложена новая форма метода негладких преобразований, и с ее помощью был исследован характерный пример виброударной системы с односторонним ограничением движения. В данной работе эта модификация метода применена для исследования системы с двусторонним ограничением движения.

1. Рассмотрим колебания осциллятора в зазоре, величина которого равна $2l$. Уравнения движения осциллятора запишем в виде

$$\dot{x} = y, \dot{y} + x = F + \varepsilon f \tag{1}$$

Здесь x — координата осциллятора, y — его скорость, F — сила, ударного воздействия границ зазора на осциллятор, f — некоторая сила, ε — малый параметр, точкой обозначено дифференцирование по времени t. Положение статического равновесия $x=0$ совпадает с серединой зазора. Считается, что удар — мгновенный, потери энергии при ударе характеризуются коэффициентом восстановления r, то есть выполняются соотношения

$$x(t^*) = l, \quad y(t^* + 0) = -ry(t^* - 0) \tag{2}$$

где t^* — момент удара об одну из границ зазора, $t^* - 0$ — момент времени, предшествующий удару, $t^* + 0$ — момент, следующий за ударом. Аналогично выглядят условия при ударе о другую границу зазора, когда $x = -l$.

В зависимости от значений параметров могут реализоваться различные режимы движений осциллятора в зазоре, в том числе и безударные. Будем изучать колебания осциллятора, сопровождающиеся ударами об одну и другую границы зазора поочередно.

Рассмотрим порождающую систему уравнений, положив в (1) $\varepsilon=0$. При $r=1$ легко указать решение получившейся системы. Это — периодические с

[1] См.: *Журавлев В. Ф., Климов Д. М., Привалов Е. А., Филатов В. В.* О движении гироскопа с ударным поглотителем колебаний. IV Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Киев. «Наукова думка». 1976.

периодом $T(A) = 2\pi - 4 \arccos (l/A)$ функции времени, имеющие при $-\pi + 2 \arccos (l/A) - \chi < t < \pi - 2 \arccos (l/A) - \chi$ вид

$$x = A \cos [t + M \arccos (l/A) + \chi], \quad y = -A \sin [t + M \arccos (l/A) + \chi]$$

$$M = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi + 2 \arccos (l/A) - \chi < t < -\chi \\ 1 \text{ при } -\chi < t < \pi - 2 \arccos (l/A) - \chi \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь A и χ — произвольные постоянные, причем $A \geq l$; M — периодическая по t функция, задаваемая на том же периоде, что и функции x и y.

Если $r < 1$, то соотношения (3) не будут удовлетворять условиям (2) в моменты ударов. Для исследования этого случая рассмотрим функции

$$C = \cos [t + M \arccos (l/A) + \chi] + \sigma \sin \Omega (t + \chi)$$

$$S = \sin [t + M \arccos (l/A) + \chi] - \sigma\Omega \cos \Omega (t + \chi)$$

$$\Omega = 2\pi/T (A) = \pi/ [\pi - 2 \arccos (l/A)] \qquad (4)$$

$$\sigma = [(1 - r)/(1 + r)] [1 - (l/A)^2]^{1/2}/\Omega$$

При таком выборе C, S, Ω и σ функции $x = AC(t + \chi), y = - AS(t + \chi)$ удовлетворяют условиям в моменты ударов при любых значениях A и χ.

Обозначим $\psi = t + \chi$ и, считая A и χ функциями времени, сделаем в системе (1) замену переменных x и y на непрерывные переменные A и ψ по формулам

$$x = AC, \quad \dot{x} = \dot{A}C + A (\partial C/\partial\psi\dot{\psi} + \partial C/\partial A\dot{A})$$

$$y = -AS, \quad \dot{y} = -\dot{A}S - A (\partial S/\partial\psi\dot{\psi} + \partial S/\partial A\dot{A}) \qquad (5)$$

Учитывая выражения (4), заметим, что составляющие функций $\partial S/\partial\psi$, $\partial S/\partial A$, имеющие бесконечные разрывы в моменты ударов, при подстановке в (1) сократятся с силой F ударного воздействия границ зазора на осциллятор. В результате получим уравнения

$$\dot{A}C + \dot{A}A \{-lA^{-2} [1 - (l/A)^2]^{-1/2} M \sin [\psi + M \arccos (l/A)] +$$

$$+ (d\sigma/dA) \sin \Omega\psi + \sigma\Omega (d\Omega/dA) \cos \Omega\psi\} - AS (\dot{\psi} - 1) = 0$$

$$\dot{A}S + \dot{A}A \{lA^{-2} [1 - (l/A)^2]^{-1/2} M \cos [\psi + M \arccos (l/A)] - \qquad (6)$$

$$- [\sigma (d\Omega/dA) + \Omega (d\sigma/dA)] \cos \Omega\psi + \sigma\Omega^2 (d\Omega/dA) \sin \Omega\psi\} +$$

$$+ AC (\dot{\psi} - 1) + A\sigma\dot{\psi} (\Omega^2 - 1) \sin \Omega\psi = -\varepsilon f$$

Разрешим получившуюся систему уравнений относительно производных. Для функций C и S выполняется соотношение $C^2 + S^2 = 1 + \sigma(\cdots)$. Считая σ величиной порядка ε, т. е. коэффициент восстановления r близким к 1, будем пренебрегать членами порядка ε^2 и выше и запишем систему (6) в форме

$$\dot{A} = -[\varepsilon f + A\sigma (\Omega^2 - 1) \sin \Omega\psi] S$$

$$\dot{\psi} = 1 - A^{-1} [\varepsilon f + A\sigma (\Omega^2 - 1) \sin \Omega\psi] C \qquad (7)$$

Так как в уравнениях (7) удерживаются члены порядка не выше чем ε, в функциях C и S слагаемыми, содержащими множитель σ, следует пренебречь.

2. В качестве примера исследуем случай вынужденных колебаний осциллятора, когда $\varepsilon f = p \sin \nu t - hy$, где p — амплитуда внешней силы, ν — ее частота, h — коэффициент вязкого трения. Будем рассматривать уравнения (7) с указанной правой частью, дополненные уравнением $dt/dt = 1$, как систему с одной медленной переменной A и двумя быстрыми переменными ψ и t [3]. Пусть расстройка частоты $\Delta = m\Omega - \nu$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеет порядок ε, т. е. рассматриваются резонансные случаи колебаний. Введя переменные $\varphi = \nu t$ и $\theta = m\Omega\psi - \varphi$, получим систему с одной быстрой фазой ψ, допускающую осреднение по этой переменной.

В результате осреднения слагаемые, содержащие амплитуду p внешней силы, при четном m обращаются в нуль. При $m = 2n—1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ осредненные уравнения имеют вид

$$\dot{A} = -(2n-1)\, p\pi K(A)\, Q(A) \cos\theta - hA\, [1/2 + (l/A)\, Q(A)\, T^{-1}(A)] -$$
$$- 16\pi\sigma A Q(A)\, T^{-2}(A) \tag{8}$$
$$\dot{\theta} = \Delta + (2n-1)\, p\pi A^{-1} K(A)\, Q(A) \sin\theta$$
$$Q(A) = \left[1 - \left(\frac{l}{A}\right)^2\right]^{1/2},\; K(A) = \frac{1}{2}\left[n(n-1) + \pi \arccos\frac{l}{A} - \left(\arccos\frac{l}{A}\right)^2\right]^{-1}$$

Положив в (8) $\dot{A} = \dot{\theta} = 0$, получим систему двух трансцендентных уравнений, корни A_0, θ_0 которой определяют стационарные колебания осциллятора. Для исследования устойчивости стационарного решения составим систему уравнений в вариациях в окрестности A_0, θ_0. Это решение будет устойчиво, если коэффициенты

$$a_1 = (2n-1)\, p\pi K(A_0) \cos\theta_0 \frac{1}{A_0}\left[\left(\frac{l}{A_0}\right)^2 \frac{1}{Q(A_0)} - \frac{lT(A_0)}{A_0 K(A_0)} - Q(A_0)\right] +$$
$$+ \frac{h}{2} + \frac{2h}{T(A_0)}\left(\frac{l}{A_0}\right)^2\left[\frac{l}{A_0 Q(A_0)} + \frac{4}{T(A_0)}\right] + 8\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\frac{1}{T(A_0)} \times$$
$$\times \left[1 + \left(\frac{l}{A_0}\right)^2 + 4\frac{lQ(A_0)}{A_0 T(A_0)}\right]$$

$$a_2 = [(2n-1)\, p\pi K(A_0)]^2 Q(A_0)\left\{\frac{l}{A_0^3}\left[\frac{T(A_0)}{K(A_0)} - \frac{l}{A_0 Q(A_0)}\right] + \frac{Q(A_0)}{A_0^2}\sin^2\theta_0\right\} -$$
$$-(2n-1)\, p\pi K(A_0) Q(A_0) \cos\theta_0 \frac{1}{A_0}\left\{\frac{h}{2} + \frac{2h}{T(A_0)}\left(\frac{l}{A_0}\right)^2\left[\frac{l}{A_0 Q(A_0)} + \frac{4}{T(A_0)}\right] +\right.$$
$$\left. + 8\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\frac{1}{T(A_0)}\left[1 + \left(\frac{l}{A_0}\right)^2 + 4\frac{lQ(A_0)}{A_0 T(A_0)}\right]\right\}$$

характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ будут не отрицательны.

Необходимо отметить, что при больших значениях A величина частоты Ω, входящей множителем при малом параметре ε в правые части уравнений (7), также становится большой, и применение метода осреднения в этом случае становится некорректным.

Если рассматривать систему, в которой происходят соударения ее движущихся частей, замену типа (5) следует делать для относительных координаты и скорости этих элементов системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 30—34.
2. *Привалов Е. А.* Об одной форме метода негладких преобразований, применяемого для исследования виброударных систем//Изв. АН. МТТ. 1992. № 4. С. 37—40.
3. *Волосов В. Н., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1993