МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1993

УДК 534.1

 Д. М. КЛИМОВ

ОБ ОДНОМ РЕЗОНАНСЕ В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ РЕЛЕЯ

Исследуется резонанс высшего порядка в обобщенном уравнении Релея. Для этого используется асимптотическая процедура, основанная на теории групп Ли. Обнаруживаются качественные изменения в поведении автоколебательной системы. Для построения асимптотических приближений используется система символических приближений MACSYMA для персональных компьютеров.

1. Для исследования уравнения Релея будем использовать асимптотическую процедуру, основанную на теории групп Ли [1, 2]. Для этого многочастотная система с малым параметром E:

$$
\begin{aligned}
&dV_1/dt = OM_1 + E\cdot V1_1 (V, W) + E^2V2_1 (V, W) + \ldots \qquad (1.1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&dV_n/dt = OM_n + E\cdot V1_n (V, W) + E^2V2_n (V, W) + \ldots\\
&dW_1/dt = E\cdot W1_1 (V, W) + E^2W2_1 (V, W) + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&dW_m/dt = E\cdot W1_m (V, W) + E^2W2_m (V, W) + \ldots
\end{aligned}
$$

гамильтонизируется вводом обобщенных импульсов, в результате чего получаем функцию Гамильтона

$$H = OM\cdot PV + E\,[V1\,(V, W)\cdot PV + W1\,(V, W)\cdot PW] + \ldots \qquad (1.2)$$

Используемые здесь обозначения переменных имеют специфический вид, характерный для системы символических вычислений MACSYMA. Например, OM_1 обозначает одну из угловых скоростей, т. е. символом одной переменной может быть сочетание нескольких букв и цифр. Чтобы отличать переменные, между ними вводится пробел.

Для выполнения асимптотической процедуры ищется замена старых переменных V, W через новые переменные X, Y посредством решения системы уравнений с гамильтонианом S. При этом новые переменные X, Y играют роль начальных условий, роль независимой переменной в гамильтоновых уравнениях играет параметр $\tau = E$, старые переменные выражаются через новые переменные посредством рядов Ли

$$
\begin{aligned}
&V = X + E\,\{X, S\} + (E^2/2!)\,\{\{X, S\}, S\} + \ldots\\
&W = Y + E\,\{Y, S\} + (E^2/2!)\,\{\{Y, S\}, S\} + \ldots
\end{aligned} \qquad (1.3)
$$

Здесь фигурные скобки — это скобки Пуассона.

После подстановки в гамильтониан H вместо старых новые переменные, получим гамильтониан

$$K\,(X, Y, PX, PY, E) \equiv H\,[V\,(X, Y, PX, PY, E),\ W\,(\ldots),\ PV\,(\ldots),$$

$$PW(\ldots)] = H(X, Y, PX, PY) + EUH + (E^2/2!)\, U^2H + \ldots = \tag{1.4}$$
$$= H(X, Y, PX, PY) + E\{H, S\} + (E^2/2!)\{\{H, S\}, S\} + \ldots$$

Подставляя в уравнение (1.3) вместо H, K, S ряды $H = H_0 + EH_1 + E^2H_2 + \ldots$, $K = K_0 + EK_1 + E^2K_2 + \ldots$, $S = S_0 + ES_1 + E^2S_2 + \ldots$ и приравнивая выражения при одинаковых степенях E, имеем

$$K_0 = H_0$$
$$K_1 = H_1 + \{H_0, S_0\}$$
$$K_2 = H_2 + \{H_1, S_0\} + \{H_0, S_1\} + 1/2\{\{H_0, S_0\}, S_0\}$$

где K_i и H_i неизвестны.

Будем считать частоты OM_i системы постоянными. Составляющие гамильтонианов K_i и S_i находятся из условия их независимости от быстрых переменных X_i. Так, представляя H_1 в виде $H_1 = AX1(Y)\cdot PX + AY1(Y)\cdot PY + CX1(X, Y)\cdot PX + CY1(X, Y)\cdot PY$, находим

$$K_1 = AX1\,(Y)\cdot PX + AY1\,(Y)\cdot PY$$

$$S_0 = \frac{1}{OM_n}\sum_{k=1}^{n} PX_k \int CX1_k \left[OM_1 \frac{X_n}{OM_n} + C_{1,n}, \ldots, X_n, Y\right] \times \tag{1.5}$$
$$\times\, dX_n + \frac{1}{OM_n}\sum_{l=1}^{m} \int CY1_l(\ldots)\, dX_n$$

В формулах (1.5) следует после интегрирования произвести замену

$$C_{k,n} = X_k - (OM_k/OM_n)\, X_n \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Последующие приближения находятся аналогичным образом. Если на каком-то этапе проявится комбинация быстрых переменных X_i, производная которой в силу рассматриваемой системы уравнений имеет порядок $O(E)$, то это указывает на резонансную ситуацию. Такую комбинацию нужно взять за новую переменную и преобразовать гамильтониан по правилам, указанным в [1, 2]. После этого можно продолжить асимптотическую процедуру.

2. Обобщенное уравнение Релея, характерное для автоколебательных систем [3], имеет вид

$$d^2x/dt^2 + x = RHS$$
$$RHS = -2DW_1\cos V_1 - 8/3\,(3 - W_1^2(\sin V_1)^2)\, W_1 \sin V_1 + \tag{2.1}$$
$$+ 2\cdot MU\cdot \sin V_2 + 4\cdot NU\cdot W_1 \cos V_1 \cos V_3$$
$$V_1 = t, \quad V_2 = OM_2\cdot t, \quad V_3 = OM_3\cdot t$$

Выполняя замену $x = W_1 \cos V_1$, $dx/dt = -W_1 \sin V_1$, приведем это уравнение к системе вида (1.1):

$$dV_1/dt = 1 - \frac{1}{W_1}\cdot RHS\cdot \cos V_1, \quad dV_2/dt = OM_2$$
$$dV_3/dt = OM_3, \quad dW_1/dt = -RHS\cdot \sin V_1 \tag{2.2}$$

Соответствующий гамильтониан

$$H = (1 - RHS/W_1 \cos V_1)\cdot PV_1 + OM_2\cdot PV_2 + OM_3\cdot PV_3 - RHS\cdot \sin V_1\cdot PW_1$$

Далее коэффициенты D, MU и NU считаются малыми величинами порядка E и заменяются по формулам $D = DE\cdot E$, $MU = ME\cdot E$, $NU = NE\cdot E$. Вывод асимптотических приближений производится по пути, указанному в п. 1. При этом в системе MACSYMA используются следующие подпрограммы.

```
Data_H_S( ) := Block(
N : Read ("N : Number of fast vars X[k]"), M : Read ("M : Number of slow vars
Y[l]"),
H : Read ("Enter H(X[k], Y[l], PX[k], PY[l])"), S : Read ("Enter S(X[k],
Y[l], PX[k], PY[l])"));
```

С помощью этой функции вводятся данные для вычисления скобок Пуассона, которые вычисляются следующей подпрограммой:

```
Gen_Poisson_Brackets( ) :=
Sum(Diff(H, X[k])*Diff(S, PX[k]), k, 1, N) + Sum(Diff(H, Y[l])*Diff(S, PY[l]),
l, 1, M) — Sum(Diff(S, X[k])*Diff(H, PX[k]), k, 1, N) — Sum(Diff(S, Y[l])*Diff(H,
PY[l]), l, 1, M);
```

Для нахождения среднего, не зависящего от синусов и косинусов, значения некоторого выражения сначала вводятся новые правила подпрограммой:

```
MathDeclare(A, True); DefRule(Avrs, Sin(A), 0); DefRule(Avrc, Cos(A), 0);
```

после чего среднее значение Expression находится применением Apply1(Expression, Avrs, Avrc);

Отметим также, что вычисления упрощаются, если при преобразовании тригонометрических выражений воспользоваться переменными, которые называются авторами системы MACSYMA переменными Пуассона. Выражения, получаемые на компьютере в процессе вычислений, сложны, опускаем их и приводим в качестве иллюстрации одно из простейших:

```
S0: — PX [1] * Y [1]^2 * COS(4 * X [1])/12—PY [1] * Y[1]^3 * SIN (4 * X [1])/
/12—SIN (2 * X[1]) * (12 * PY [1] * Y [1]^2—4 * PY [1] * Y [1]^4—3 * PX [1] *
* Y[1] * DE)/(6 * Y[1])+COS(2 * X[1]) * (—12 * PX[1] * Y[1] * 2 * PX[1] *
* Y[1]^3—3PY[1] * Y[1]^2 * DE)/(6 * Y[1])+PX[1] * COS(—X[1]+X[2]) * ME/
/(Y[1] * (—1+OM[2]))—PY[1] * SIN(—X[1]+X[2]) * ME/(—1+OM[2])+PX[1] *
* COS(X[1]+X[2]) * ME/(Y[1] * (1+OM[2]))+PY[1] * SIN(X[1]+X[2]) * ME/
/(1+OM[2])—2 * PX[1] * SIN(X[3]) * NE/OM[3]—PY[1] * Y[1] * COS(—2 *
* X[1]+X[3]) * NE/(—2+OM[3]—PX[1] * SIN(—2 * X[1]+X[3]) * NE/(—2+OM[3])+
+PY[1] * Y[1] * COS(2 * X[1]+X[3]) * NE/(2+OM[3])—PX[1] * SIN(2 * X[1]+
+ X[3]) * NE/(2+OM[3]);
```

3. В третьем приближении проявляются синусы и косинусы с аргументом $X_1 + X_2 - X_3$. Производная этого выражения, взятая в силу дифференциальных уравнений (2.2) (переменные V_l следует заменить на переменные X_l) равна $1 + OM_2 - OM_3 + O(E)$. Отсюда видно, что выражение $X_1 + X_2 - X_3$ становится медленной переменной, если $OM_2 = 2$, $OM_3 = 3$. Таким образом, возникает резонансная ситуация, если в уравнении Релея присутствуют внешняя сила на удвоенной частоте собственных колебаний и параметрическое возбуждение на утроенной частоте собственных колебаний системы.

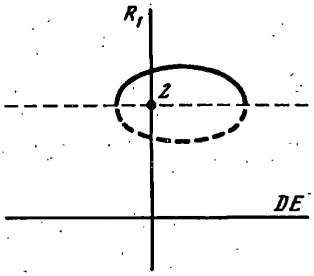
В рассматриваемой ситуации увеличивается число медленных переменных на единицу и на единицу уменьшается число быстрых переменных. Далее следует произвести замену переменных по формулам: $X_1 = Q_1$, $X_2 = Q_2$, $X_3 = R_2 - Q_1 - Q_2$, $PX_1 = PQ_1 + PR_2$, $PX_2 = PQ_2 + PR_2$, $PX_3 = -PR_2$, $Y_1 = R_1$, $PY_1 = PR_1$.

Выполняя операцию осреднения и требуемые вычисления, получаем для медленных переменных следующие уравнения:

$$\frac{dR_1}{dt} = ER_1(4 - R_1^2) + E^2\left(-R_1^3 DE - \frac{2}{5}\cdot ME\cdot NE\cdot\cos R_2\right)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = DE\cdot E + E^2\left(-8 + 4R_1^2 - \frac{3}{4}R_1^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{DE^2}{2} + \frac{2}{5}\left(\frac{ME\cdot NE}{R_1}\right)\sin R_2 + \frac{4}{5}NE^2\right)$$



Анализ этих уравнений производится традиционными методами. Сначала находятся положения равновесия системы, в которых $dR_1/dt = 0$, $dR_2/dt = 0$. Из полученных соотношений исключается переменная R_2 и строится график $R_1 = R_1(DE)$ (см. фигуру). Напомним, что R_1 характеризует амплитуду возникающих в системе колебаний, а DE — отличие частоты от частоты собственных колебаний системы.

Интересно отметить, что рассматриваемая резонансная ситуация приводит к качественным изменениям в системе. Во втором приближении существует хорошо известный автоколебательный режим $R_1 = 2$, $DE = 0$. В третьем приближении этот режим исчезает. Точки, соответствующие новым режимам, расположены на эллипсе, осью симметрии которого является прямая $R_1 = 2$. Смещение центра эллипса вдоль этой линии зависит от произведения $MU\ NU$. Верхняя часть эллипса соответствует устойчивым режимам системы, нижняя часть — неустойчивым режимам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф.* Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 559—565.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 321 с.
3. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. С. 161.
4. MACSYMA. REFERENCE MANUAL VERSION 13. 1988.
5. *Rand R. H.* Computer Algebra in Applied Mathematics: An Introduction to MACSYMA. Boston, 1984. 180 с.
6. *Климов Д. М., Руденко В. М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.II.1993