

УДК 539.214;539.374

© 1993 г. Я. Ф. АНДРУСИК, К. Н. РУСИНКО

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАГРУЖЕНИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЕВИАТОРОВ

Физические теории пластичности наиболее согласовано отображают результаты экспериментальных исследований при произвольном сложном нагружении, но определение пластических деформаций по ним обычно связано с выполнением краткого интегрирования, что создает значительные трудности при решении конкретных упругопластических задач. Поэтому, поиски путей возможного упрощения соответствующих определяющих соотношений для частных, но широко распространенных видов напряженного состояния, является актуальной задачей.

В [1] было показано, что теория Батдорфа — Будянского и теория, основанная на самопараллельном движении плоскостей, огибающих поверхность пластичности Треска, совпадают между собой. Известно также, что из моделей пластических сред, построенных на основе плоских локальных поверхностей текучести, которые поступательно перемещаются при активном нагружении при некоторых ограничениях получается ряд теорий пластичности, основанных на концепции скольжения [2, 3]. Однако, легкость с которой авторы определяют пределы области направлений активного микропластического деформирования возможна только в случае монотонного нагружения или плоской деформации. При произвольных путях нагружения ситуация намного усложняется и определению пределов интегрирования предшествует нелегкий анализ в пятимерном девиаторном пространстве.

Существующая тесная взаимосвязь между физическими теориями пластичности и предположениями теории Б. Койтера [1] послужила той основой, на которой в данной работе, в рамках нового подхода к феноменологической трактовке концепции скольжения [4] формулируются относительно простые и физически достоверные определяющие соотношения пластичности для процесса нагружения в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов. Построенная модель пластической среды, основана на синтезе положений, вытекающих из концепции скольжения (соответствие плоскостей пространства напряжений определенным системам скольжения, принцип трансформации поверхности нагружения) и теории течения с сингулярной поверхностью нагружения (условие пластичности, как огибающей системы плоскостей, принцип градиентальности вектора пластической деформации).

В процессе создания синтезной теории течения и скольжения доказана правомерность способа определения пластических деформаций, обусловленных движением плоскостей пятимерного пространства, с помощью перемещения их следов, плоскостей, заполняющих всю область вне поверхности нагружения трехмерного подпространства. В рамках сформулированных определяющих соотношения иллюстрируется их простота при аналитическом исследовании двухзвенного процесса нагружения с прямолинейными звеньями.

1. Способ определения пластической деформации при нагружении в трехмерном подпространстве. В рамках теории скольжения начало пластического деформирования связано с выполнением условия пластичности Треска — Сен-Венана

$$\tau_{\max} = \sigma_s / 2 \quad (1.1)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении. Этому критерию в шестимерном пространстве компонент тензора напряжений соответствует поверхность пластичности сложной формы. Для ее представления поступим следующим образом. Запишем значение компоненты касательного напряжения  $\tau_{nl}$  в произвольной плоскости, задаваемой нормалью  $n$  к ней, и в любом направлении  $l$  в этой плоскости

$$\tau_{nl} = l_i n_j \sigma_{ij} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в трехмерном (физическом) пространстве  $X, Y, Z$  ( $i, j = x, y, z$ );  $l_i$  и  $n_j$  — направляющие косинусы единичных векторов  $l$  и  $n$  относительно осей  $X, Y$  и  $Z$ , причем

$$l_i l_i = n_j n_j = 1, \quad l_i n_i = 0 \quad (1.3)$$

Приравняем  $\tau_{nl}$  и  $\sigma_s/2$ , т. е.

$$l_i n_j \sigma_{ij} = \sigma_s/2 \quad (1.4)$$

При фиксированных значениях  $l_i$  и  $n_j$  соотношение (1.4) является уравнением плоскости в шестимерном пространстве напряжений  $\tau_{ij}$ . Поверхность (1.1) является огибающей плоскостей (1.4), соответствующих всевозможным значениям  $l_i$  и  $n_j$ .

Необходимо подчеркнуть, что плоскости (1.4) являются трехпараметричными. Последнее вытекает из того, что на шесть величин  $l_x, l_y, \dots, n_z$  определяющих эти плоскости, наложены три условия (1.3). Это также вытекает из формул, выражающих  $l_x, l_y, \dots, n_z$  через три переменные Эйлера. Такие формулы приведены, например, в [5].

Рассматривается далее евклидово пространство  $R^5$  с ортонормированным базисным репером  $e_k$  ( $k = \overline{1, 5}$ ). Между девиаторами напряжений  $S_{ij}$  (деформаций  $e_{ij}$ ) и компонентами вектора напряжений  $S = S_k e_k$  (вектора деформаций  $\varepsilon = \varepsilon_k e_k$ ) существуют зависимости  $S = 3/2 (S_{zz} + S_{xx})$ ,  $S_2 = \sqrt{3}/2 (S_{zz} - S_{xx})$ ,  $S_3 = \sqrt{3} S_{xz}$ ,  $S_4 = \sqrt{3} S_{yz}$ ,  $S_5 = \sqrt{3} S_{xy}$ ,  $\varepsilon_1 = 3/2 (e_{zz} + e_{xx})$ ,  $\varepsilon_2 = \sqrt{3}/2 (e_{zz} - e_{xx})$ ,  $\varepsilon_3 = \sqrt{3} e_{xz}$ ,  $\varepsilon_4 = \sqrt{3} e_{yz}$ ,  $\varepsilon_5 = \sqrt{3} e_{xy}$ .

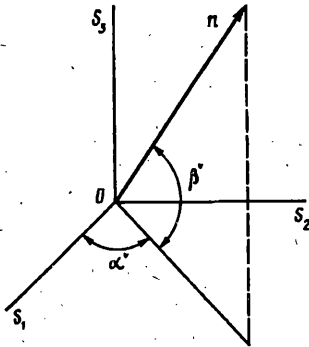
Модули векторов  $S$  и  $\varepsilon$  соответственно равны

$$|S| = (S_k S_k)^{1/2} = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad |\varepsilon| = (\varepsilon_k \varepsilon_k)^{1/2} = (3/2 e_{ij} e_{ij})^{1/2}$$

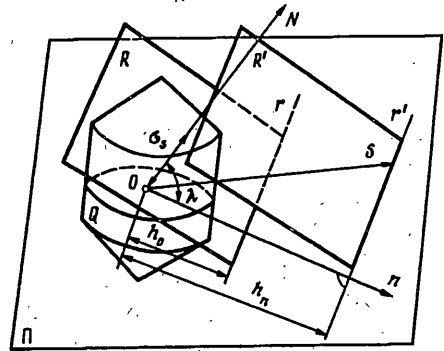
Запишем, аналогично состоянию текучести Треска (1.1) условие пластичности  $\sigma_{ij} l_j = \sigma_s / \sqrt{3}$ , через компоненты вектора напряжений. После некоторых преобразований, получим

$$S_1 \sqrt{3} (n_x l_x + n_y l_y) + S_2 (n_x l_x - n_y l_y) + S_3 (n_x l_x + n_z l_z) + S_4 (n_x l_y + n_y l_x) + S_5 (n_y l_x + n_x l_y) = \sigma_s \quad (1.5)$$

Такому условию пластичности в пятимерном пространстве соответствует поверхность, как огибающая плоскостей (1.5), равноудаленных от начала координат на величину  $\sigma_s$ . Принимается, что при активном нагружении плоскости (1.5) в пространстве  $R^5$  перемещаются самопараллельно от начала координат. Их движение вызывает приращение пластической деформации, зависящей от величины перемещения и направленной по нормали к движущейся плоскости. Следуя [4], покажем способ определения пластической деформации при нагружении в трехмерном подпространстве, когда отличны от нуля компоненты вектора напряжения  $S_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Следы семейства плоскостей (1.5) в этом пространстве описываются выражениями

$$S_1 \sqrt{3} (n_x l_z + n_x l_x) + S_2 (n_x l_z - n_x l_x) + S_3 (n_x l_z + n_x l_x) = \sigma_s \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) определяют совокупность плоскостей, заполняющих всю область вне поверхности текучести трехмерного подпространства. Покажем, что пластическую деформацию, обусловленную движением плоскостей (1.5) пятимерного пространства можно определять с помощью их следов — плоскостей (1.6). Для этого вначале установим взаимосвязь между параметрами, определяющими ориентацию плоскости в трехмерном подпространстве и направляющими косинусами  $l_p, n_p$ .

В трехмерном пространстве нормированное уравнение плоскости имеет вид

$$mS_1 + qS_2 + pS_3 = h_0 \quad (1.7)$$

где  $h_0$  — расстояние от начала координат до плоскости (1.7);  $m, q, p$  — направляющие косинусы нормали  $n$  к плоскости (1.7), которые находятся так:  $m = \cos \beta^v \cos \alpha^v, q = \cos \beta^v \sin \alpha^v, p = \sin \beta^v$ . Отсчет углов  $\alpha^v$  и  $\beta^v$  показан на фиг. 1.

Для схематического изображения процесса движения плоскостей пятимерного пространства и перемещения их следов (1.7), на фиг. 2 трехмерное пространство показано плоскостью  $\Pi$ , а поверхность пластичности —  $Q$ , как огибающая плоскостей (1.5). Одна из плоскостей (1.5), обозначенная  $R$  на фиг. 2 имеет нормаль  $N$ . Когда процесс нагружения происходит в трехмерном пространстве, вектор напряжений  $S$  приводит в движение плоскости  $R$  пятимерного пространства, которые перемещаются самопараллельно от начала координат. Плоскость  $R$ , отдаленная от начала координат на величину  $\sigma_s$ , перемещается в положение  $R'$ , а ее след, плоскость  $r$ , которая находилась от начала координат на расстоянии  $h_0$ , перемещается в положение  $r'$ . Вместо  $h_0$  введем дополнительный параметр  $\lambda$  — угол между нормальми  $N$  и  $n$ . При этом справедливо равенство

$$h_0 \cos \lambda = \sigma_s \quad (1.8)$$

Переменные  $\alpha^v, \beta^v, \lambda$ , определяющие плоскости (1.7), позволяют описывать движение плоскостей (1.5) пятимерного пространства девиаторов.

Из условия идентичности уравнений (1.6) и (1.7), с учетом (1.8) и соотношений (1.3), получим

$$\sqrt{3} (n_x l_z + n_x l_x) = m \cos \lambda, \quad (n_x l_z - n_x l_x) = q \cos \lambda \quad (1.9)$$

$$(n_x l_z + n_x l_x) = p \cos \lambda$$

$$(n_x l_y + n_y l_x) = \pm (1/2 \sin^2 \lambda + A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^2$$

$$(n_y l_z + n_z l_y) = \pm (1/2 \sin^2 \lambda - A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^{1/2} \quad (1.10)$$

$$A(\alpha^v, \beta^v, \lambda) = \frac{mq [(9 - 8m^2) \cos^2 \lambda - 3] + 3p (3 - 4m^2)^{1/2} (l_y^2 - n_y^2)}{6\sqrt{3} (p^2 + q^2)}$$

$$l_y^2 - n_y^2 = 1/3 [9 - 18 \cos \lambda + 12m^2 \cos^2 \lambda + (3 - 4m^2)^2 \cos^4 \lambda]^{1/2}$$

Соотношения (1.9) и (1.10) устанавливают связь между направляющими косинусами  $l_i, n_i$  и переменные  $\alpha^v, \beta^v, \lambda$ , т. е. любая плоскость трехмерного подпространства, не пересекающая поверхности нагружения, соответствует определенной системе  $n, l$ . Следовательно, условие пластичности (1.5) в переменных  $\alpha^v, \beta^v, \lambda$  можно записать так

$$S_1 m \cos \lambda + S_2 q \cos \lambda + S_3 p \cos \lambda + \\ + S_4 (1/2 \sin^2 \lambda + A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^{1/2} \pm S_5 (1/2 \sin^2 \lambda - A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^{1/2} = \sigma_s \quad (1.11)$$

Если процесс нагружения происходит в трехмерном пространстве, то уравнение (1.11) позволяет судить о движении плоскостей пятимерного пространства девиаторов по перемещению их следов, плоскостей (1.7) с нормалью  $n$ , в трехмерном подпространстве. Определим пластическую деформацию и покажем достоверность способа ее определения для такого процесса.

Аналогично [4] введем в пространство  $R^5$  радиус-вектор единичной длины, перпендикулярный к плоскости (1.11):

$$r = (m \cos \lambda) e_1 + (q \cos \lambda) e_2 + (p \cos \lambda) e_3 + \\ + (1/2 \sin^2 \lambda + A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^{1/2} e_4 \pm (1/2 \sin^2 \lambda - A(\alpha^v, \beta^v, \lambda))^{1/2} e_5 \quad (1.12)$$

Определим бесконечно малые векторы  $r_1, r_2, r_3$ :

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial \lambda} d\lambda, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial \alpha^v} d\alpha^v, \quad r_3 = \frac{\partial r}{\partial \beta^v} d\beta^v \quad (1.13)$$

Из векторов (1.13) образуем поливектор  $dV$ , представляемый векторным произведением векторов (1.13) [6]:

$$dV = [r_1 \times r_2 \times r_3] \quad (1.14)$$

Все нормали к плоскостям (1.11), которые проходят через трехмерный элемент объема параллелепипеда, построенного на векторах  $r_1, r_2, r_3$  находятся в подпространстве, порожденном поливектором  $dV$ . Квадрат искомого трехмерного объема дается определителем Грама векторов  $r_1, r_2, r_3$  [6]:

$$(dV)^2 = \text{Det} \|(r_i, r_j)\| \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.15)$$

где  $(r_i, r_j)$  — скалярное произведение векторов  $r_i$  и  $r_j$ .

Учитывая (1.12) и (1.13), после соответствующих преобразований, получим

$$dV = \frac{\sin \lambda \cos \lambda \cos \beta^v}{(l_y^2 - n_y^2) (3 - 4m^2)^{1/2}} d\alpha^v d\beta^v d\lambda \quad (1.16)$$

Относительное количество плоскостей (1.11) с нормальми, заключенными внутри объема  $dV$ , определенного поливектором  $dV$ , пропорционально  $dV$ . Принимается, что в процессе нагружения плоскости (1.11) перемещаются поступательно от начала координат. Движение плоскостей вызывает приращение пластической деформации, зависящей от величины перемещения и направленной по нормали к движущейся плоскости. Единичное приращение пластической деформации от движения плоскости с нормалью  $N$ , есть

$$\gamma_N^{op} = F(H_N) \quad (1.17)$$

где  $F$  — характеристическая функция материала;  $H_N$  — расстояние от начала координат до плоскости с нормалью  $N$ .

Пластическая деформация движущейся истемы плоскостей (1.11) с нормальями, находящимися внутри ориентированного элемента объема, пропорциональна  $dV$ :

$$d\gamma_N^p = F(H_N) dV \quad (1.18)$$

Компоненты пластической деформации (1.18) относительно осей пятимерного евклидового пространства запишутся так:

$$de_k^p = N_k d\gamma_N^p \quad (1.19)$$

где  $N_k = m \cos \lambda$ ,  $q \cos \lambda$ ,  $p \cos \lambda$  — направляющие косинусы нормалей  $N$  к плоскостям (1.11).

Отметим, что ввиду знакопеременности направляющих косинусов к осям  $S_4$  и  $S_5$  в уравнении (1.11) получим, что  $de_4^p = de_5^p = 0$ .

Общая пластическая деформация находится как сумма составляющих (1.19) по всем движущимся плоскостям. С учетом (1.16), (1.18) и (1.19), получим

$$e_k^p = \int_{\Omega} \int_{\lambda} N_k F(H_N) \frac{\sin \lambda \cos \lambda \cos \beta^v}{(3 - 4m^2)^{1/2} (l_y^2 - n_y^2)} d\alpha^v d\beta^v d\lambda \quad (1.20)$$

В соотношениях (1.20) величина  $H_N$  определяется из равенства

$$H_N = h_n \cos \lambda \quad (1.21)$$

где  $h_n$  — расстояние от начала координат до плоскостей с нормалью  $n$  трехмерного подпространства (фиг. 2). При этом  $h_n$  определяется следующей формулой:

$$h_n = (S, n) \quad (1.22)$$

Отметим, что в уравнениях (1.20) величина  $\cos \beta^v d\alpha^v d\beta^v$  представляет собой элемент телесного угла  $d\Omega$  конуса с осью  $n$ , внутри которого находятся нормали плоскостей (1.7). Все плоскости, которые переместились при нагружении имеют нормали, лежащие внутри телесного угла  $\Omega$ . Этот угол находится внутри конуса, образующие которого перпендикулярны к деформированной части текущей поверхности нагружения. Способ построения поверхности нагружения совпадает с принципом Сандерса [7, 8]. Согласно этому принципу ее можно представить совокупностью линейчатых поверхностей, натянутых на поверхность пластичности и траекторию вектора напряжений.

Соотношения (1.20) позволяют определить пластическую деформацию для процесса нагружения в трехмерном подпространстве, исходя из пятимерности пространства девиаторов. Как видно они представляют собой чрезвычайно сложную интегральную форму записи определяющих соотношений пластичности. При переходе от переменных  $\alpha^v$ ,  $\beta^v$ ,  $\lambda$  к эйлеровым переменным  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  они сводятся к уравнениям концепции скольжения. Действительно, учитывая, что якобиан замены переменных в тройном интеграле (1.20) на переменные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  имеет вид

$$\Delta = \frac{\sqrt{3} (l_x n_x - n_x l_x) (l_y^2 - n_y^2) \cos \beta}{(l_x^2 n_x^2 + n_x l_x n_x l_x + n_x^2 l_x^2)^{1/2} \sin \lambda \cos \lambda}$$

из уравнений (1.20) приходим к соотношениям концепции скольжения. Это окончательно подтверждает правомерность применяемого способа для определения пластической деформации.

2. Формулировка нового условия пластичности и упрощенной модели пла-

стической среды. Принцип получения соотношений (1.20) показывает, что их можно значительно упростить, если при нагружении в трехмерном пространстве компонент вектора напряжений ввести новое начальное условие пластичности, которое позволяет получить следующий определитель Грама (1.15):

$$(dV)^2 = \cos^2 \beta^v (d\alpha^v)^2 (d\beta^v)^2 (d\lambda)^2 \quad (2.1)$$

Для этого необходимо, чтобы скалярное произведение  $(r_1, r_1)$  принимало вид

$$(r_1, r_1) = (d\lambda)^2 / \cos^4 \lambda \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) можно получить, если вместо условия пластичности (1.11) записать

$$S_1 m \cos \lambda + S_2 q \cos \lambda + S_3 p \cos \lambda \pm \pm S_4 (1/2 \sin^2 \lambda + X(\lambda))^{1/2} \pm S_5 (1/2 \sin^2 \lambda - X(\lambda))^{1/2} = \sigma, \quad (2.3)$$

где  $X(\lambda)$  — неизвестная функция от  $\lambda$ , подлежащая определению.

Рассмотрим радиус-вектор единичной длины, перпендикулярный к плоскости (2.3):

$$r = (m \cos \lambda) e_1 + (q \cos \lambda) e_2 + (p \cos \lambda) e_3 \pm \pm (1/2 \sin^2 \lambda + X(\lambda))^{1/2} e_4 \pm (1/2 \sin^2 \lambda - X(\lambda))^{1/2} e_5, \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) находим вектор  $r_1 = (\partial r / \partial \lambda) d\lambda$  и на основании равенства (2.2), после небольших преобразований, получим

$$[X'(\lambda)]^2 - 4 \operatorname{ctg} \lambda X(\lambda) X'(\lambda) + 4 \left( \frac{1}{\cos^4 \lambda \sin^2 \lambda} - 1 \right) X^2(\lambda) - - \operatorname{tg}^2 \lambda (\operatorname{tg}^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = 0, \quad X'(\lambda) = \frac{dX(\lambda)}{d\lambda} \quad (2.5)$$

Это уравнение является исходным для определения функции  $X(\lambda)$ , входящей в условие пластичности (2.3). Следуя [9], находим его решение

$$X(\lambda) = -1/2 \sin^2 \lambda \sin \{2 \sqrt{2} [F(\lambda, 1/\sqrt{2}) - - E(\lambda, 1/\sqrt{2}) + (1 - 1/2 \sin^2 \lambda)^{1/2} \operatorname{tg} \lambda]\} \quad (2.6)$$

где  $F(\lambda, 1/\sqrt{2})$  — эллиптический интеграл первого рода;  $E(\lambda, 1/\sqrt{2})$  — эллиптический интеграл второго рода.

Функция (2.6) позволяет полностью доопределить соотношение (2.3), которое является новым условием пластичности, записанным через переменные, характеризующими ориентацию плоскостей трехмерного подпространства напряжений, в котором происходит процесс нагружения. Для пятимерного пространства девиаторов, огибающая равноудаленного от начала координат семейства плоскостей (2.3) представляет поверхность, след которой в трехмерном подпространстве является сферой радиуса  $\sigma$ . [10].

Следовательно, для полученной функции  $X(\lambda)$  (2.6) и при задании начального условия пластичности в виде (2.3), определитель Грама записывается выражением (2.1). Это позволяет найти компоненты вектора пластической деформации, используя предложенный выше способ. Окончательные определяющие соотношения пластичности для процессов нагружения в трехмерном подпространстве, в рамках предлагаемого подхода принимают вид

$$e_k^p = \int_{\Omega} \int_{\lambda} N_k F(H_N) \cos \beta^v d\alpha^v d\beta^v d\lambda \quad (2.7)$$

Интегрирование по  $\lambda$  ведется в пределах от 0 до  $\lambda_1 = \arccos(\sigma_s/h_n)$ . Внутри телесного угла  $\Omega$  лежат нормали к следам (1.7) плоскостей (2.3), которые переместились при нагружении.

Ранее, в [11], были получены соотношения аналогичные (2.7) при менее строгих предпосылках, что могло порождать сомнения в достоверности используемых утверждений. Предлагаемый способ детального обоснования определения пластической деформации исходя из трехмерного подпространства подтверждает правомерность такого подхода. Уравнения (2.7) сформулированы в рамках феноменологического подхода и в то же время совершенно правдоподобно отображают сдвиговый механизм процесса пластической деформации металла. Они существенно упрощают соотношения концепции скольжения и не противоречат одному из основных требований, предъявляемых к определяющим уравнениям [12]: принципу макродетерминизма. Простота достигается путем введения нового условия пластичности (2.3), близкого к условию Треска. Предложенное условие пластичности в трехмерном подпространстве совпадает с условием Губера — Мизеса, а в пятимерном пространстве девиаторов занимает промежуточное положение между условием Губера — Мизеса и Треска — Сен-Венана.

Сформулированная модель в качественном отношении аналогична [13], где рассматривается движение плоскостей, огибающих поверхность деформирования, сферу радиуса  $\epsilon_0$ , в пятимерном пространстве. В отличие от нее, полученные уравнения пластического состояния позволяют определять пластическую деформацию путем трехкратного интегрирования. Если возникает необходимость описать жесткое нагружение, то используемый подход позволяет обобщить предложенную модель для процесса деформирования в пространстве деформаций.

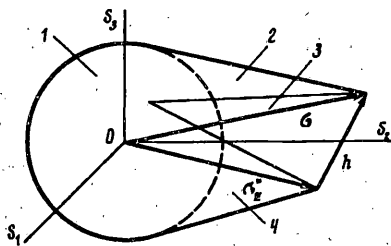
3. Аналитическое описание пластического деформирования при сложном нагружении вдоль траектории в виде двухзвенных ломаных. Для иллюстрации возможности и простоты сформулированной модели пластической среды, определим пластическую деформацию, используя соотношения (2.7), при двухзвенной траектории нагружения с прямыми звеньями.

Пусть элемент тела растянут за предел упругости до напряжения  $\sigma_2 = \sigma_2^* > \sigma_s$  и при изменяющихся напряжениях  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , подвергается сдвигу ( $|\tau_{xz}| > 0$ ). Догружение будем осуществлять таким образом, что на втором звене деформирования траектория вектора напряжений будет прямолинейной. Процесс деформирования представим векторами в трехмерном пространстве компонент вектора напряжений  $S_1, S_2, S_3$  (фиг. 3). Ориентацию двухзвенной ломаной траектории нагружения будем определять по схеме, показанной на фиг. 3.

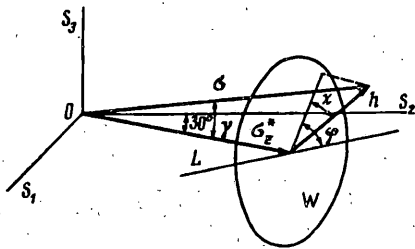
Произвольно ориентированный вектор догрузки  $h$  образует с плоскостью  $W$ , перпендикулярной к вектору предварительного нагружения  $\sigma_2^*$ , угол  $\chi$ . Плоскость  $W$  пересекает плоскость  $S_1, S_2$  по линии  $L$ . Угол между проекцией вектора  $h$  на плоскость  $W$  и линией  $L$  обозначен через  $\varphi$ . Вектор напряжения  $\sigma$  вдоль второго звена траектории нагружения составляет с вектором  $\sigma_2^*$  угол  $\gamma$ . Согласно сформулированному принципу трансформации поверхности нагружения, ее форма для двухзвенной траектории деформирования приобретает вид, показанный на фиг. 4. Отдельные участки ее обозначены 1, 2, 3, 4. Участок 1 — поверхность текучести, сфера радиуса  $\sigma_s$ ; 2 — конус с вершиной на конце вектора  $\sigma$  и образующими, касательными к сфере 1; 3 — плоскость, касательная к конусам 2 и 4; 4 — конус с вершиной на конце вектора  $\sigma_2^*$  и образующими, касательными к сфере 1.

В процессе нагружения вдоль траектории в виде двухзвенных прямолинейных ломаных, часть плоскостей трехмерного подпространства с нормалью  $n$  переместилась от действия вектора  $\sigma_2^*$ , а часть продолжает двигаться от действия вектора  $\sigma$ .

Области интегрирования  $\Omega$  и  $\lambda$  в уравнениях (2.7) определяются исходя из формы поверхности нагружения фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Уравнения (2.7) могут быть легко проинтегрированы, если характеристическую функцию  $F(H_N)$  при  $H_N \geq \sigma$ , принять в виде [11]:

$$F(H_N) = a [(H_N/\sigma_s)^2 - 1] \quad (3.1)$$

где  $a$  — постоянная материала.

Проведя вычисления, рассматривая различные варианты ориентации вектора догрузки, получим следующие соотношения для компонент вектора пластической деформации при двухзвенной траектории нагружения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p &= U(\chi + \beta_1^{\sigma*}) [U(\chi + \gamma) \varepsilon_1^{p'}(I) + U_1(\chi) \varepsilon_1^{p'}(II)] + \\ &+ U(\beta_1^{\sigma*} - |\chi|) [\text{sign } \chi \varepsilon_1^{p''}(II) - \text{sign}(\chi + \gamma) \varepsilon_1^{p''}(I)] \\ \varepsilon_2^p &= U(\chi + \beta_1^{\sigma*}) [U(\chi + \gamma) \varepsilon_2^{p'}(I) + U_1(\chi) \varepsilon_2^{p'}(II)] + \\ &+ U(\beta_1^{\sigma*} - |\chi|) [\text{sign } \chi \varepsilon_2^{p''}(II) - \text{sign}(\chi + \gamma) \varepsilon_2^{p''}(I)] \\ \varepsilon_3^p &= U(\chi + \beta_1^{\sigma*}) U(\chi + \gamma) \varepsilon_3^{p'}(I) + \\ &+ U(\beta_1^{\sigma*} - |\chi|) [\text{sign } \chi \varepsilon_3^{p''}(II) - \text{sign}(\chi + \gamma) \varepsilon_3^{p''}(I)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_i^{p'}(I)$ ,  $\varepsilon_i^{p''}(I)$ ,  $\varepsilon_i^{p'}(II)$ ,  $\varepsilon_i^{p''}(II)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — составляющие компонент вектора пластической деформации, являющиеся элементарными функциями от параметров  $\chi$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\beta_1^{\sigma*}$ ,  $\beta_1^\sigma$ . Для  $\beta_1^{\sigma*}$  и  $\beta_1^\sigma$  имеем

$$\cos \beta_1^\sigma = \sigma_s/\sigma, \quad \cos \beta_1^{\sigma*} = \sigma_s/\sigma_s^* \quad (3.3)$$

При этом для составляющих получим выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{p'}(I) &= 1/12 a\pi (\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma \cos \varphi) W_3 \\ \varepsilon_1^{p''}(I) &= 1/2 \varepsilon_1^{p'}(I) W_1/W_3 + 1/24 a\pi (\sin \gamma - \sqrt{3} \cos \gamma \cos \varphi) W_2 \\ \varepsilon_2^{p'}(I) &= 1/12 a\pi (\sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma \cos \varphi) W_3 \\ \varepsilon_2^{p''}(I) &= 1/2 \varepsilon_2^{p'}(I) W_1/W_3 + 1/24 a\pi (\sqrt{3} \sin \gamma + \cos \gamma \cos \varphi) W_2 \\ \varepsilon_3^{p'}(I) &= 1/6 a\pi W_3 \sin \gamma \sin \varphi, \quad \varepsilon_3^{p''}(I) = 1/12 a\pi \sin \varphi (W_1 \sin \gamma - W_2 \cos \gamma) \\ \varepsilon_1^{p'}(II) &= 1/12 a\pi W_3, \quad \varepsilon_1^{p''}(II) = 1/24 a\pi (W_6 + \sqrt{3} W_4 \cos \varphi) \\ \varepsilon_2^{p'}(II) &= \sqrt{3}/12 a\pi W_3, \quad \varepsilon_2^{p''}(II) = 1/24 a\pi (\sqrt{3} W_6 - W_4 \cos \varphi) \\ \varepsilon_3^{p'}(II) &= 0, \quad \varepsilon_3^{p''}(II) = 1/12 a\pi W_4 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$W_1 = \frac{(\sin \beta_1^\sigma - \sin |\gamma + \chi|)}{\cos^2 \beta_1^\sigma} [2 - 5 \cos^2 \beta_1^\sigma - \sin |\gamma + \chi| (\sin \beta_1^\sigma +$$



$$\begin{aligned}
& + \sin |\gamma + \chi|) ] + 3 \cos^2 \beta_1^\sigma \ln \frac{(1 + \sin \beta_1^\sigma) \cos (\chi + \gamma)}{\cos \beta_1^\sigma (1 + \sin |\gamma + \chi|)} \\
W_2 &= \frac{[\cos (\gamma + \chi) - \cos \beta_1^\sigma]^3}{\cos^2 \beta_1^\sigma \cos (\gamma + \chi)} [\cos (\gamma + \chi) + 3 \cos \beta_1^\sigma] \operatorname{sign} (\chi + \gamma) \\
W_3 &= \sin \beta_1^\sigma (2 \operatorname{tg}^2 \beta_1^\sigma - 3) + 3 \cos^2 \beta_1^\sigma \ln \frac{1 + \sin \beta_1^\sigma}{\cos \beta_1^\sigma} \quad (3.5) \\
W_4 &= \frac{(\cos \beta_1^{\sigma*} - \cos \chi)^3}{\cos^2 \beta_1^{\sigma*} \cos \chi} (\cos \chi + 3 \cos \beta_1^{\sigma*}) \operatorname{sign} \chi \\
W_5 &= \sin \beta_1^{\sigma*} (2 \operatorname{tg}^2 \beta_1^{\sigma*} - 3) + 3 \cos^2 \beta_1^{\sigma*} \ln \frac{1 + \sin \beta_1^{\sigma*}}{\cos \beta_1^{\sigma*}} \\
W_6 &= \frac{(\sin \beta_1^{\sigma*} - \sin |\chi|)}{\cos^2 \beta_1^{\sigma*}} [2 - 5 \cos^2 \beta_1^{\sigma*} - \sin |\chi| (\sin \beta_1^{\sigma*} + \sin |\chi|)] + \\
& + 3 \cos^2 \beta_1^\sigma \ln \frac{\cos \chi (1 + \sin \beta_1^{\sigma*})}{\cos \beta_1^{\sigma*} (1 + \sin |\chi|)}
\end{aligned}$$

Применяемые ступенчатые функции определяются следующим образом

$$\operatorname{sign} B = \begin{cases} -1, & B < 0, \\ 1, & B \geq 0, \end{cases} \quad U(C) = \begin{cases} 1, & C > 0, \\ 0, & C \leq 0, \end{cases} \quad U_1(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi < 0 \\ 0, & \chi \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Полученные выражения (3.2) позволяют определить пластическую деформацию при произвольном положении вектора напряжений на двухзвенной траектории нагружения с прямолинейными звеньями. Для частного случая проведено сопоставление теоретических и опытных данных на сложное нагружение [14]. Рассмотрены опыты Б. Будянского и других, опыты П. Нахди, Ф. Эссенбурга и Коффа, опыты А. С. Вавакина, В. В. Викторова, И. М. Механиковой, А. И. Мохеля, Л. П. Степанова, выполненные в ИПМ АН СССР.

Сравнение результатов расчета и экспериментов показывает хорошую их согласованность. Анализ соотношений (3.2) показывает, что для процессов полного нагружения [3] получим уравнения деформационной теории пластичности.

Наличие конечной связи между напряжениями и деформациями для процессов, состоящих из полных догрузок, снимает возможные возражения, которые были выдвинуты для теории Батдорфа — Будянского [15, 16].

Авторы выражают благодарность В. Д. Ключникову за ценные советы и замечания, высказанные в процессе выполнения настоящей работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface//Quart. Appl. Math. 1953. V. 11. № 3. P. 350—354.
2. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняхов Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 890—897.
3. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 208 с.
4. Андрусик Я. Ф., Русинко К. Н. Новый подход к феноменологической трактовке концепции скольжения//Математические и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1989. Вып. 30. С. 55—57.
5. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища школа, 1981. 148 с.

6. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974. 544 с.
7. *Андрусик Я. Ф., Русинко К. Н.* Деформация поверхности нагружения//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 98—103.
8. *Андрусик Я. Ф.* Форма поверхности нагружения в трехмерном пространстве напряжений при двухзвенной траектории нагружения//Вест. Львов. политехн. ин-та: Технология машиностроения и динамическая прочность машин. 1983. № 170. С. 5—7.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
10. *Андрусик Я. Ф.* Об одном условии пластичности и определяющих соотношениях для сложного нагружения//Тез. докл. 2-й Всес. конф. «Получность в конструкциях». 1984. Новосибирск, 1984. С. 5—6.
11. *Русинко К. Н., Андрусик Я. Ф.* Ортогональный излом траектории нагружения в рамках обобщенной теории Койтера//Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1986. С. 223—228.
12. *Клюшников В. Д.* О допустимых формах соотношений пластичности//Докл. АН СССР. 1980. Т. 255. № 1. С. 57—59.
13. *Попов Л. Г.* Обобщенные модели пластичности Работнова на пятимерное пространство девиаторов//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 126—134.
14. *Андрусик Я. Ф.* Определяющие соотношения пластичности, основанные на синтезе теории скольжения и течения: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (УДК 539.373). Л.: ИПИММ АН УССР, 1987, 145 с.
15. *Yoshimura Y.* Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky//Bull. JSME. 1958. V. 1. № 2. P. 109—113.
16. *Рогозин И. Д.* О теории скольжения//Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1970. Вып. 4. С. 148—153.

Львов

Поступила в редакцию  
16.VII.1990