МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. А. М. ГОМИЛКО

ГИПОТЕЗА РЭЛЕЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОТРАЖЕНИИ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА ОТ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТОРЦА ВОЛНОВОДА

Рассматривается плоская задача об отражении гармонической волны Рэлея — Лэмба от криволинейного торца полубесконечного однородного изотропного упругого волновода $X \geq Hl(Y/d)$, $|Y| \leq d$ со свободной от напряжений границей. Исследован вопрос о необходимых условиях справедливости гипотезы Рэлея, формулировка которой предполагает, что разложение отраженного поля напряжений по нормальным волнам Рэлея — Лэмба справедливо вплоть до граничной кривой $X = Hl(Y/d)$, $|Y| \leq d$. Сформулированы условия на аналитическую функцию $l(\lambda)$, при которых установлено существование такого значения h_0, что при $H/d > h_0$ гипотеза Рэлея не является справедливой. Приведен конкретный пример на использование этого утверждения.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская задача об отражении гармонической (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается) продольной волны Рэлея — Лэмба [1] от криволинейного торца полубесконечного однородного изотропного упругого слоя $X \geq Hl(Y/d)$, $|Y| \leq d$, где $l(y) = l(-y)$ и $H > 0$, со свободной от напряжений границей. Положим безразмерные частоты колебаний $\Omega_1 = \omega d/c_l$, $\Omega_2 = \omega d/c_t$, где c_l, c_t — скорости распространения продольных и поперечных волн в слое. В безразмерных переменных $x = X/d$, $y = Y/d$ граничные условия для нахождения отраженного поля напряжений σ_x^s, τ_{xy}^s, σ_y^s имеют вид

$$\begin{gathered}
\sigma_y^s(x, \pm 1) = \tau_{xy}^s(x, \pm 1) = 0, \quad x \geq hl(\pm 1) \\
(\sigma_x^s + \sigma_x^l) n_x + (\tau_{xy}^s + \tau_{xy}^l) n_y = 0 \\
(\tau_{xy}^s + \tau_{xy}^l) n_x + (\sigma_y^s + \sigma_y^l) n_y = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_h
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где σ_x^l, τ_{xy}^l, σ_y^l — поле напряжений падающей волны, кривая $\Gamma_h = \{x = hl(y)\}$ с $h = H/d$ и нормалью

$$n = (n_x, n_y) = (1, -hl'(y))(1 + h^2 l'^2(y))^{1/2}, \quad |y| \leq 1.$$

Условия (1.1) дополняются некоторыми условиями на бесконечности [1, 2], конкретный вид которых для дальнейших рассмотрений не является важным.

При $x > L = \max hl(y)$, $|y| \leq 1$ для решения граничной задачи (1.1) справедливо разложение в ряд по нормальным волнам Рэлея — Лэмба

$$\sigma_x^s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_x(\xi_k, y) \exp(i\xi_k x) \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy}^s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Psi(\xi_k, y) \exp(i\xi_k x), \quad \sigma_y^s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_y(\xi_k, y) \exp(i\xi_k x)$$

$$\Phi_x(\xi, y) = i\left[(\xi^2 + p_2^2)(\xi + \Omega_0^2)\frac{\operatorname{sh} p_2}{2p_2} \operatorname{sh} p_1 y - \xi^2 p_1 \operatorname{sh} p_1 \operatorname{ch} p_2 y\right]$$

$$\Psi(\xi, y) = \frac{\xi p_1}{2p_2}(\xi^2 + p_2^2)\,[\operatorname{sh} p_2 \operatorname{sh} p_1 y - \operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2 y] \tag{1.3}$$

$$\Phi_y(\xi, y) = -i\left[\frac{(\xi^2 + p_2^2)}{4p_2}\operatorname{sh} p_2 \operatorname{ch} p_1 y - \xi^2 p_1 \operatorname{sh} p_1 \operatorname{sh} p_2 y\right]$$

$$p_j = p_j(\xi) = (\xi^2 - \Omega_j^2)^{1/2} \quad (j = 1, 2), \quad 2\Omega_0^2 = \Omega_2^2 - 2\Omega_1^2$$

где ξ_k — корни дисперсионного определителя Рэлея — Лэмба

$$\Delta(\xi) = 4\xi^2 p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 - (\xi^2 + p_2^2)^2 \operatorname{cth} p_1 \tag{1.4}$$

с $\operatorname{Im}\xi_k \geq 0$. При этом, в (1.2) при $\operatorname{Im}\xi_k = 0$ берется лишь один из корней $\pm\xi_k$ определителя $\Delta(\xi)$, в соответствии с принятым, исходя из физической постановки задачи, принципом излучения при $x \to +\infty$. Далее, не уменьшая общности рассмотрений, считаем, что $\xi_k > 0$ для $k = 1, \ldots, \bar{k}$ и $\operatorname{Im}\xi_k > 0$ при $k > \bar{k}$. Такая ситуация реализуется, например, когда при формулировке условий излучения используется принцип предельного поглощения и на данной частоте колебаний ω отсутствует явление «обратной волны» [3]. Тогда поле напряжений падающей из бесконечности волны Рэлея — Лэмба дается выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= c_0 \Phi_x(-\xi_{k_0}, y)\exp(-i\xi_{k_0}x) \\ \tau_{xy}^i &= c_0 \Psi(-\xi_{k_0}, y)\exp(-i\,\xi_{k_0}x) \\ \sigma_y^i &= c_0 \Phi_y(-\xi_{k_0}, y)\exp(-i\xi_{k_0}x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

где ξ_{k_0} — один из множества вещественных корней $\{\xi_k\}_{k=1}^{\bar{k}}$ и $c_0 \neq 0$ — постоянная.

Содержание гипотезы Рэлея [4] при рассмотрении задачи (1.1) заключается в предположении, что разложение отраженного поля напряжений (1.2) справедливо вплоть до граничной кривой Γ_h. Обзор работ, связанных с обсуждением гипотезы Рэлея в задачах дифракции волн акустической и электромагнитной природы на неровных поверхностях (как с теоретической, так и с прикладной точек зрения), имеется в [4]. Здесь отметим [5—7], имеющие принципиальный характер. Так в [5] впервые строго установлен факт ограниченной применимости гипотезы Рэлея в ситуации, когда рассеивающая поверхность является периодической. Достаточные условия справедливости гипотезы Рэлея при рассмотрении дифракции плоской акустической волны на периодической поверхности впервые были получены в [6, 7].

В публикуемой работе, на основании метода [5], исследуется вопрос о необходимых условиях справедливости гипотезы Рэлея в задаче (1.1) об отражении волны Рэлея — Лэмба от криволинейного торца волновода.

2. Необходимые условия справедливости гипотезы Рэлея. Дальнейшие рассмотрения ведутся в предположении, что $l(\lambda)$ является целой функцией комплексного переменного λ. Предположим, что разложение (1.2) справедливо вплоть до граничной кривой Γ_h. Тогда, в силу условий (1.1), имеем равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k G(\xi_k, y)\exp(i\xi_k hl(y)) &= -c_0 G(-\xi_{k_0}, y)\exp(-i\xi_{k_0}hl(y)) \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k E(\xi_k, y)\exp(i\xi_k hl(y)) &= -c_0 E(-\xi_{k_0}, y)\exp(-i\xi_{k_0}hl(y)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$G(\xi, y) = \Phi_x(\xi, y) - hl'(y)\Psi(\xi, y),$$

$$E(\xi, y) = \Psi(\xi, y) - hl'(y)\,\Phi_y(\xi, y), \quad |y| \leq 1.$$

Дальнейшие рассуждения относительно необходимых условий справедливости разложения (2.1) связаны с выходом в комплексную плоскость по переменной y. При этом достаточно рассмотреть лишь одно из соотношений (2.1), например первое, куда входит функция $G(\xi, y)$. Вводя обозначение $\xi_0 = -\xi_{k_0}$, определим функции

$$F_0(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\bar{k}} c_k G(\xi_k, \lambda) \exp(i\xi_k hl(\lambda)), \quad \lambda \in C \tag{2.2}$$

$$F_1(\lambda) = \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} c_k G(\xi_k, \lambda) \exp(i\xi_k hl(\lambda)), \quad \lambda \in [-1, 1]$$

Тогда первое из гипотетических равенств (2.1) можно записать в виде

$$F_1(\lambda) = F_0(\lambda), \quad |\operatorname{Re}\lambda| \le 1, \quad \operatorname{Im}\lambda = 0 \tag{2.3}$$

при этом $F_0(\lambda)$ является целой функцией, а $F_1(\lambda)$, согласно (2.2), определена на начальном этапе на отрезке $[-1, 1]$.

Прежде чем установить возможность аналитического продолжения функции $F_1(\lambda)$ из (2.2), оценим величины коэффициентов c_k при $k \to \infty$, исходя из предположения о сходимости рядов в (2.1) при всех $|y| \le 1$. Из (2.1) при фиксированном $y \in (-1, 1)$ получаем в качестве необходимого условия оценку

$$|c_k G(\xi_k, y)| \exp(-\operatorname{Im}\xi_k hl(y)) \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{2.4}$$

Далее, для корней ξ_k справедлива асимптотика [8]:

$$\xi_k = \pm 1/2 \ln 4\pi k + i\pi(k + m - 1/4) + O(\ln k/k) \quad (k \to \infty) \tag{2.5}$$

где m — некоторое целое число, из которой, в частности, получаем оценки

$$|\operatorname{Re}\xi_k| \le a\ln k, \quad a_0 k \le \operatorname{Im}\xi_k \le a_1 k, \quad k > \bar{k} \tag{2.6}$$

с постоянными $a, a_0, a_1 > 0$, не зависящими от номера k. Подставляя (2.5) в выражения (1.3) для функций Φ_x, Ψ_0 можно получить (довольно громоздкие выкладки опускаем) оценку

$$|G(\xi_k, y)| = (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)\, 2^{|y|-2} (1 + h^2 l'^2(y))^{1/2} (\pi k)^{\varkappa} [(1 - |y|) + O(k^{-|y|})],$$

$$k \to \infty, \quad |y| < 1$$

$$\varkappa = 2 + (1 + |y|)/2 \tag{2.7}$$

Тогда, на основании соотношений (2.4) — (2.7), заключаем, что для любого $y \ne 0$ с $|y| < 1$ верно равенство

$$\lim_{k\to\infty} |c_k|\, k^{\varkappa} \exp(-\operatorname{Im}\xi_k hl(y)) = 0$$

откуда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и $L_0 = \min l(y)$, $|y| \le 1$:

$$|c_k| = O(\exp k(\varepsilon + \pi h L_0)) \quad (k \to \infty) \tag{2.8}$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении функции $F_1(\lambda)$ исходя из определения (2.2), оценок (2.5), (2.8) и аналитических свойств функции $l(\lambda)$. Согласно (2.6) имеем при $k > \bar{k}$ оценку

$$|\exp(\pm p_j(\xi_k)\lambda + i\xi_k hl(\lambda)| \le e^{c|\lambda|} \exp(a\ln k\, |\operatorname{Im}\chi_h^{\pm}(\lambda)| - \operatorname{Im}\xi_k \operatorname{Re}\chi^{\pm}(\lambda)) \tag{2.9}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от k и аналитическими функциями

$\chi_h^{\pm}(\lambda) = \mp i\lambda + hl(\lambda)$. Тогда, на основании (2.2), (2.6), (2.8) и определения функции $G(\xi, \lambda)$ получаем, что функция $F_l(\lambda)$ аналитически продолжается в любую связную, симметричную относительно вещественной оси, окрестность Q интервала $I \subset (-1, 1)$; $l(y) > L_0$, $y \in I$, такую, что

$$\operatorname{Re} \chi_h^{\pm}(\lambda) > hL_0, \quad \lambda \in Q \tag{2.10}$$

причем для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|F_1(\lambda)| \le c(\varepsilon)(1 + h\,|\,l'(\lambda)|\,e^{c|\lambda|} \times$$

$$\times \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} e^{\varepsilon k} \{\exp(a \ln k\,|\operatorname{Im}\chi_h^-(\lambda)| - a_0 k(\operatorname{Re}\chi_h^-(\lambda) - L_0)) +$$

$$+ \exp(a \ln k\,|\operatorname{Im}\chi_h^+(\lambda)| - a_0 k(\operatorname{Re}\chi_h^+(\lambda) - L_0))\}, \quad \lambda \in Q \tag{2.11}$$

Теорема. Пусть $l(\lambda)$ — четная целая функция экспоненциального типа [9] и $l(\pm 1) = 0$. Предположим, что найдется такая связная кривая γ, выходящая из интервала $|\operatorname{Re}\lambda| < 1$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и уходящая на бесконечность, что

$$\operatorname{Re} l(\lambda) > L_0, \quad \lambda \in \gamma \tag{2.12}$$

причем

$$\frac{\operatorname{Re} l(\lambda)}{\operatorname{Im} l(\lambda)} \to +\infty, \quad \frac{\operatorname{Im} l(\lambda)}{|\lambda|} \to +\infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in \gamma \tag{2.13}$$

Тогда существует такое $h_0 > 0$, что для любого $h > h_0$ не существует таких постоянных $c_0 \ne 0$ и $c_k \in C$, $k \ge 1$ с оценками (2.8), для которых выполняются соотношения (2.3).

Доказательство. Из (2.13) следует, что $|\lambda|^{-1} \operatorname{Re} l(\lambda) \to +\infty$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \gamma$, тогда, с учетом (2.12), получаем, что найдется такое $h_0 > 0$, для которого

$$h \operatorname{Re} l(\lambda) > |\lambda| + hL_0, \quad \lambda \in \gamma, \quad h > h_0 \tag{2.14}$$

В силу непрерывности функций $\chi_h^{\pm}(\lambda)$ получаем, что для любого $h > h_0$ найдется такое открытое множество Q_h, для которого $(y_1, y_2) \subset Q_h$ при некоторых $y_1, y_2 \in (-1, 1)$, $y_1 \ne y_2$ и $\operatorname{Re}\chi_h^{\pm}(\lambda) > hL_0$ при $\lambda \in Q_h$. В частности, тогда функция $F_1(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в Q_h с оценкой (2.11). Покажем, что в этом случае

$$|F_1(\lambda)| \to 0, \lambda \to \infty, \lambda \in \gamma \tag{2.15}$$

Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и достаточно малое $\delta > 0$. Тогда для всех $\lambda \in \gamma$, $|\lambda| \ge 1$, таких, что $|\lambda| + h|\operatorname{Im} l(\lambda)| \le \delta h(\operatorname{Re} l(\lambda) - L_0)$, используя неравенство $|l'(\lambda)| \le l^{b|\lambda|}$, получаем оценку

$$|F_1(\lambda)| \le c(\varepsilon) \exp((c + b)|\lambda|) \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} e^{\varepsilon k} \exp((a + a_0)\, k\, (|\lambda| + h|\operatorname{Im} l(\lambda)|) -$$

$$- a_0 kh(\operatorname{Re} l(\lambda) - L_0)) \le c(\varepsilon) \exp((c+b)|\lambda|) \sum_{k=1}^{\infty} e^{\varepsilon k} \exp(-(a_0\delta^{-1} - a_0 - a)\, kh\, |\lambda|)$$

и выбирая число $\delta > 0$ из условия $a_0\delta^{-1} - a_0 - a - \varepsilon = r \ge 2(c + b)$, получаем

$$|F_1(\lambda)| \le c(\varepsilon) \frac{\exp((c + b - r)|\lambda|)}{1 - \exp(-r|\lambda|)} \to 0, \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in \gamma$$

т. е. утверждение (2.15).

Проанализируем правую часть из уравнения (2.3). Так как $\xi_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, \bar{k})$, то, с учетом определения функции $G(\xi, \lambda)$, имеем при достаточно больших по модулю $\lambda \in \gamma$:

$$
\begin{aligned}
& | F_0(\lambda) | \geq | c_0 G(\xi_0, \lambda) | \exp(-\xi_0 h \operatorname{Im} l(\lambda)) - \\
& - e^{b_1 |\lambda|} \sum_{k=1}^{\bar{k}} | c_k | \exp(-\xi_k h \operatorname{Im} l(\lambda))
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Далее, $G(\xi_0, \lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, тогда [9] найдется такая постоянная $b_2 > 0$ и последовательность $r_n \to +\infty$, $n \to \infty$, что

$$
\min_{|\lambda| = r_n} | G(\xi_0, \lambda) | \geq \exp(-b_2 r_n) \tag{2.17}
$$

Так как $\xi_k > 0$ $(k = 1, \ldots, \bar{k})$ и $\xi_0 < 0$, то из (2.13), (2.16), (2.17) получаем, что найдется такая последовательность точек $\lambda_n \in \gamma$ с $|\lambda_n| = r_n$, для которой $|F_0(\lambda_n)| \to \infty$, $n \to \infty$, т. е.

$$
\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} | F_0(\lambda) | = \infty, \quad \lambda \in \gamma \tag{2.18}
$$

Тогда утверждение теоремы следует из сопоставления (2.15), (2.18) и (2.3), с учетом аналитичности функций $F_0(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ при $\lambda \in Q_h$.

Таким образом, так как равенство (2.3) есть следствие предположения о справедливости гипотезы Рэлея, то значит при условиях на функцию $l(\lambda)$, сформулированных в теореме, найдется такое $h_0 > 0$, что при любом $h > h_0$ гипотеза Рэлея для рассматриваемой задачи (1.1), не является справедливой.

3. Пример. Рассмотрим конкретный пример полубесконечного упругого волновода с криволинейным торцом, описываемым уравнением $x = hl(y)$, $|y| \leq 1$. Пусть аналитическая функция

$$
l(\lambda) = 1 + \cos \pi\lambda \tag{3.1}
$$

Тогда для $\lambda = s + i\tau$ имеем выражения

$$
\operatorname{Re} l(\lambda) = 1 + \cos \pi s \operatorname{ch} \pi\tau, \operatorname{Im} l(\lambda) = -\sin \pi s \operatorname{sh} \pi\tau
$$

Для произвольного числа $q \in (0, 1/2)$ определим кривую

$$
\gamma_q = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = -q (\operatorname{Im} \lambda + 1)^{-1}, \ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\} \tag{3.2}
$$

Тогда $\operatorname{Re}(\lambda) \in (-1/2, 0)$ при $\lambda \in \gamma_q$, так что

$$
\operatorname{Re} l(\lambda) > 1, \ \lambda \in \gamma_q \tag{3.3}
$$

и $\operatorname{Im} l(\lambda) > 0$ для $\lambda \in \gamma_q$ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$. При этом $\operatorname{Re} \lambda = s \to 0$, $\operatorname{Im} \lambda = \tau \to +\infty$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \gamma_q$ и тогда

$$
\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{Re} l(\lambda)}{\operatorname{Im} l(\lambda)} \geq \operatorname{ctg} \pi |s| \operatorname{cth} \pi\tau \to +\infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in \gamma_q \\
& \frac{\operatorname{Im} l(\lambda)}{|\lambda|} \geq \frac{2|s|}{\sqrt{s^2 + \tau^2}} \operatorname{sh} \pi\tau \to +\infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in \gamma_q
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Оценки (3.3), (3.4) показывают (см. (2.13)), что функция $l(\lambda)$, задаваемая выражением (3.1), удовлетворяет условиям теоремы из п. 2. Таким образом, найдется такое $h_0 > 0$, что для любого $h > h_0$ предположение о продолжении разложения поля напряжений (1.2) вплоть до границы $x = hl(y)$, $|y| \leq 1$ не будет справедливым. Определим точное значение h_0. Для этого, согласно (2.14), (3.2) требуется определить значение h_q из условия

$$h(1+\cos \pi s \operatorname{ch} \pi\tau) > \tau, \quad s = -q(\tau+1)^{-1}, \quad \tau \geq 0, \quad h > h_q \tag{3.5}$$

Так как для $\lambda = s + i\tau \in \gamma_q$ имеем оценку $\cos \pi s \geq 1 - 2q$, то неравенство из (3.5) заведомо выполняется, если

$$h(1 + (1-2q) \operatorname{ch} \pi\tau) > \tau, \quad \tau \geq 0, \quad h > h_q \tag{3.6}$$

При этом, в силу произвольности $q \in (0, 1/2)$ из определения (3.2), из (3.6) получаем, что число $h_0 = \inf h_q$, $q \in (0, 1/2)$ определяется условием

$$h(1 + \operatorname{ch} \pi\tau) > \tau, \quad \tau \geq 0, \quad h > h_0 \tag{3.7}$$

В свою очередь, анализ условия (3.7) показывает (см. [5, 6]), что $\pi h_0 = 2z_0(z_0^2 - 1)^{-1}$, где z_0 — единственный корень уравнения $\ln z = (z+1)(z-1)^{-1}$, $z > 1$, причем $\pi h_0 \approx 0{,}448$. Таким образом, рассмотрение вопроса о необходимых условиях справедливости гипотезы Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея — Лэмба от криволинейного торца в виде участка синусоиды приводит к такому же результату, как и в задаче о дифракции плоской акустической волны на периодической синусоидальной поверхности (см. [4—7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
2. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. *Бабешко В. А.* Об условиях излучения для упругого слоя//Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 3. С. 547—549.
4. *Апельцин В. Ф., Кюркчан А. Г.* Аналитические свойства волновых полей. М.: Изд-во МГУ, 1990. 208 с.
5. *Petit R., Cadilhac M.* Sur la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. B. 1966. V. 262. No. 7. P. 468—471.
6. *Millar R. F.* On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1969. V. 65. No. 3. P. 773—791.
7. *Millar R. F.* On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface. II//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1971. V. 69. No. 1. P. 217—225.
8. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю.* О нулях целых функций одного класса//Труды семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1982. Вып. 8. С. 211—217.
9. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.

Киев

Поступила в редакцию
4.IX.1991