

УДК 539.3

© 1993 г. М. Ю. КАШТАЛЯН, Ю. Н. НЕМИШ

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НА-  
ГРУЗКАМИ

Краевая задача об изгибе поперечной нагрузкой прямоугольных плит при определенных видах граничных условий допускает решение методом разделения переменных, в частности, когда все края плиты свободно оперты, а изгибающая нагрузка представима в виде двойного тригонометрического ряда по синусам. В постановке пространственной задачи теории упругости решение краевой задачи об изгибе синусоидальной нагрузкой однородной изотропной прямоугольной плиты, свободно опертой по краям, получено в [1, 2]. Исследование напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных плит проведено в [3—5], причем [4, 5] обобщен подход, предложенный в [1]. Изгиб синусоидальной нагрузкой свободноопертых непрерывно-неоднородных плит рассмотрен в [6, 7] в рамках двумерной теории, учитывающей влияние поперечного сдвига и обжатия. Отметим, что в [1—7] рассматривались плиты постоянной толщины; при этом авторы ограничивались, как правило, первой гармоникой в представлении нагрузки. Изгиб другими видами нагрузки, допускающими представление двойными тригонометрическими рядами, не исследовался.

Применительно к плитам переменной толщины трехмерная краевая задача об изгибе синусоидальной нагрузкой рассмотрена в [8] для однородной изотропной плиты, толщина которой периодически изменяется в одном направлении. Для решения задачи применяется метод возмущения формы границы [9, 10], основанный на разложении компонент напряженно-деформированного состояния в ряды по степеням малого параметра, характеризующего амплитуду отклонения искривленных лицевых поверхностей плиты от близких к ним координатных плоскостей.

В настоящей статье рассматривается трехмерная краевая задача об изгибе прямоугольных свободно опертых плит переменной толщины, находящихся под действием поперечной нагрузки, распределенной по синусоидальному закону и локализованной в центре верхнего основания; исследуется влияние степени локализации нагрузки на напряженно-деформированное состояние неоднородных плит с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты и постоянным коэффициентом Пуассона, толщина которых периодически изменяется в одном направлении.

1. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $oxuz$  прямоугольную плиту размерами  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , верхнее и нижнее основания которой  $S_i$  ( $i = 0, 1$ ) неплоские и описываются уравнениями

$$S_i: z = h_i + \varepsilon \omega_i f(x, y) \quad (h_0 = 0, h_1 = h) \quad (1.1)$$

где  $f \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$  — функция, описывающая вид искривления лицевых поверхностей  $S_i$ ;  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) — малый положительный параметр, характеризующий вместе с параметром  $\omega_i$  ( $|\omega_i| \leq 1$ ) амплитуду отклонения  $S_i$  от близких к ним координатных плоскостей  $z = h_i$ .

Предположим, что плита свободно оперта по краям и, следовательно, на ее торцах выполняются граничные условия вида

$$\sigma_{xx} |_{x=0, a} = 0, \quad u_x |_{x=0, a} = u_y |_{x=0, a} = 0$$

$$\sigma_{yy} |_{y=0,b} = 0, \quad u_z |_{y=0,b} = u_x |_{y=0,b} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{jk}$  — компоненты тензора напряжений,  $u_k$  — составляющие вектора перемещений ( $j, k = x, y, z$ ).

Будем также предполагать, что нижнее основание плиты  $S_0$  свободно от усилий, а к верхнему  $S_1$  приложена изгибающая нагрузка  $Q(x, y)$ , распределенная по синусоидальному закону и локализованная в центре верхнего основания, т. е.

$$Q(x, y) = -q_{mn} \sin^{2m+1}(\pi x/a) \sin^{2n+1}(\pi y/b) \quad (1.3)$$

где  $m, n \in N$  — степени локализации нагрузки, а  $q_{mn}$  — ее интенсивность. Рассмотрим случай, когда независимо от степеней локализации суммарная нагрузка, приложенная к плите, остается постоянной по величине и равной суммарной нагрузке при  $m = n = 0$ . Для этого должно выполняться соотношение

$$q_{mn} = \alpha_{mn} q_{00} \quad (1.4)$$

$$\alpha_{mn} = \left( \int_0^a \int_0^b \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) dx dy \right) \left( \int_0^a \int_0^b \sin^{2m+1}(\pi x/a) \sin^{2n+1}(\pi y/b) dx dy \right)^{-1}$$

или после вычисления определенных интегралов

$$\alpha_{mn} = \left( \sum_{i=0}^{2m+1} \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(-1)^{i+j} (2m+1)! (2n+1)!}{(2i+1)! (2j+1)! i! j! (2m+1-i)! (2n+1-j)!} \right)^{-1} \quad (1.5)$$

Значения  $\alpha_{mn}$  при  $m = n$  приведены ниже

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_{mn}$	1,00	2,25	3,52	4,79	6,06	7,33	8,60	9,87	11,15	12,49

Граничные условия на  $S_0, S_1$  будут иметь вид

$$(\sigma_{xk} n_{x,i} + \sigma_{yk} n_{y,i} + \sigma_{zk} n_{z,i})_{S_i} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 0 \\ Q(x, y) n_{k,i} & \text{при } i = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $n_{k,i}$  ( $k = x, y, z$ ) — направляющие косинусы единичных нормалей к поверхностям  $S_i$  ( $i = 0, 1$ ), определяемые соотношениями

$$n_{x,i} = -\varepsilon \omega \Delta_i^{-1} \partial f / \partial x, \quad n_{y,i} = -\varepsilon \omega \Delta_i^{-1} \partial f / \partial y, \quad n_{z,i} = \Delta_i^{-1} \\ \Delta_i = (-1)^{i+1} (1 + \varepsilon^2 \omega^2 [(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2])^{1/2} \quad (1.7)$$

Вследствие сложности геометрии лицевых поверхностей плиты, описываемой уравнением (1.1), не представляется возможным разделить переменные в граничных условиях (1.6) и решить задачу непосредственно. Для преодоления этих трудностей предлагается воспользоваться методом возмущения формы границы для поверхностей, близких к координатным плоскостям [10]. Метод основан на разложении компонент напряженно-деформированного состояния в ряды по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\{\sigma_{jk}, u_k\} = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \{\sigma_{jk}^{(p)}, u_k^{(p)}\} \quad (1.8)$$

которые на граничных поверхностях  $S_i$  (с учетом предположения о допустимости разложения  $\sigma_{jk}^{(p)}, u_k^{(p)}$  в ряды Тейлора в окрестности  $z = h_i$ ) будут иметь вид

$$\{\sigma_{jk}, u_k\}_{S_i} = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \sum_{q=0}^p \omega^q f^q / q! \partial^q / \partial z^q \{\sigma_{jk}^{(p-q)}, u_k^{(p-q)}\}_{z=h_i} \quad (1.9)$$

Разлагая в ряды по степеням малого параметра  $\varepsilon$  также направляющие

косинусы  $n_{k, \nu}$ , определяемые соотношениями (1.7), и составляющие нагрузки  $Q_k = Q(x, y)n_{k,1}$ , можно свести исходную краевую задачу для плиты переменной толщины с граничными условиями (1.2), (1.6) к последовательности краевых задач для плиты постоянной толщины, ограниченной координатными плоскостями  $z = h$ . Краевые условия полученной задачи в произвольном  $p$ -м приближении будут иметь следующий вид на торцах и на основаниях соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(p)} |_{x=0,a} = 0, \quad u_x^{(p)} |_{x=0,a} = u_y^{(p)} |_{x=0,a} = 0 \\ \sigma_{yy}^{(p)} |_{y=0,b} = 0, \quad u_x^{(p)} |_{y=0,b} = u_y^{(p)} |_{y=0,b} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(0)} |_{z=h} = Q(x, y), \quad \sigma_{xz}^{(0)} |_{z=h} = \sigma_{yz}^{(0)} |_{z=h} = 0 \\ \sigma_{zz}^{(0)} |_{z=0} = \sigma_{xz}^{(0)} |_{z=0} = \sigma_{yz}^{(0)} |_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zk}^{(p)} |_{z=h} = \sum_{q=1}^p [N_{11}^{(q)} \sigma_{xk}^{(p-q)} + N_{21}^{(q)} \sigma_{yk}^{(p-q)} + N_{31}^{(q)} \sigma_{zk}^{(p-q)}]_{z=h} + Q_k^{(p)} \quad (p \geq 1) \\ \sigma_{zk}^{(p)} |_{z=0} = \sum_{q=1}^p [N_{10}^{(q)} \sigma_{xk}^{(p-q)} + N_{20}^{(q)} \sigma_{yk}^{(p-q)} + N_{30}^{(q)} \sigma_{zk}^{(p-q)}]_{z=0} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $Q_k^{(p)}$  — компоненты разложения выражения  $Q_k$  в ряды по степеням малого параметра  $\varepsilon$ ;  $N_{li}^{(q)}$ ,  $N_{2i}^{(q)}$ ,  $N_{3i}^{(q)}$  — дифференциальные операторы, зависящие от аналитической структуры уравнения (1.1). В первом и втором приближении они имеют вид

$$\begin{aligned} N_{1i}^{(1)} = (-1)^{i+1} \omega_i \partial f / \partial x, \quad N_{1i}^{(2)} = (-1)^{i+1} \omega_i^2 f \partial f / \partial x \partial / \partial z \\ N_{2i}^{(1)} = (-1)^{i+1} \omega_i \partial f / \partial y, \quad N_{2i}^{(2)} = (-1)^{i+1} \omega_i^2 f \partial f / \partial y \partial / \partial z \\ N_{3i}^{(1)} = (-1)^i \omega_i f \partial / \partial z, \quad N_{3i}^{(2)} = (-1)^i \omega_i^2 [f^2 \partial^2 / \partial z^2 - ((\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2)] \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. Для решения краевой задачи об изгибе плиты переменной толщины в  $p$ -м приближении, удобно воспользоваться некоторыми общими решениями уравнений равновесия в декартовых координатах. Так, для одномерно неоднородной среды ( $G = G(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ ) целесообразно взять общее решение в форме В. П. Плевако [11]:

$$\begin{aligned} u_x^{(p)} = - (2G)^{-1} (\nu \Delta - \partial^2 / \partial z^2) \partial L^{(p)} / \partial x + \partial N^{(p)} / \partial y \\ u_y^{(p)} = - (2G)^{-1} (\nu \Delta - \partial^2 / \partial z^2) \partial L^{(p)} / \partial y - \partial N^{(p)} / \partial x \\ u_z^{(p)} = - G^{-1} (\Delta - \partial^2 / \partial z^2) \partial L^{(p)} / \partial z + \partial / \partial z [(2G)^{-1} (\nu \Delta - \partial^2 / \partial z^2) L^{(p)}] \\ (\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функции  $L^{(p)} = L^{(p)}(x, y, z)$  и  $N^{(p)} = N^{(p)}(x, y, z)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta (G^{-1} \Delta L) - (1 - \nu)^{-1} (\Delta - \partial^2 / \partial z^2) L d^2 / dz^2 (G^{-1}) = 0 \\ \Delta N + d / dz (\ln G) \partial N / \partial z = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

которые допускают разделение переменных в функциях  $L$  и  $N$ . В дальнейшем будем рассматривать одномерно неоднородные среды с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты в виде  $G = G_1 \exp [\gamma (z/R - 1)]$ , где  $\gamma$  — показатель неоднородности, и постоянным коэффициентом Пуассона  $\nu = \text{const}$ . С учетом вида граничных условий на торцах и того, что приложенную нагрузку (1.3) можно представить в форме

$$Q(x, y) = -\alpha_{mn} q_{00} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{k+l} (2m+1)! (2n+1)!}{2^{2(m+n)} (m-k)! (n-l)! (m+k+1)! (n+l+1)!} \times \\ \times \sin(2k+1)\pi x/a \sin(2l+1)\pi y/b \quad (2.3)$$

функции  $L^{(p)}$  и  $N^{(p)}$  для плиты с указанным типом неоднородности будут иметь вид

$$L^{(p)}(x, y, z) = \exp(\gamma z/2h) \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \{A_{kl}^{(p)} \operatorname{ch} \xi_{1kl} + B_{kl}^{(p)} \operatorname{sh} \xi_{1kl}\} \cos \xi_{2kl} + \\ + \{C_{kl}^{(p)} \operatorname{ch} \xi_{1kl} + D_{kl}^{(p)} \operatorname{sh} \xi_{1kl}\} \sin \xi_{2kl} \sin \lambda_k x \sin \lambda_l y \\ N^{(p)}(x, y, z) = \exp(-\gamma z/2h) \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n [E_{kl}^{(p)} \operatorname{ch} \xi_{3kl} + F_{kl}^{(p)} \operatorname{sh} \xi_{3kl}] \cos \lambda_k x \cos \lambda_l y \quad (2.4)$$

$$\lambda_k = (2k+1)\pi/a, \quad \lambda_l = (2l+1)\pi/b$$

$$\beta_{kl} = (\gamma^2/4 + (\lambda_k^2 + \lambda_l^2) h^2)^{1/2}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1kl} \\ \xi_{2kl} \end{pmatrix} = 2^{-1/2} [(\beta_{kl}^2 + \gamma^2 (\lambda_k^2 + \lambda_l^2) h^2 v (1-v))^{1/2} \pm \beta_{kl}]^{1/2} z/h$$

$$\xi_{3kl} = \beta_{kl} z/h \quad (2.5)$$

Заметим, что из предлагаемого решения при  $\gamma \rightarrow 0$  можно получить распределение напряжений и перемещений в однородной плите, полностью совпадающее при  $m=n=0$  с результатами [1] для плиты постоянной толщины и данными работы [8] для плит переменной толщины.

Произвольные постоянные  $A_{kl}^{(p)}, \dots, F_{kl}^{(p)}$  определяются из граничных условий на лицевых плоскостях плиты (1.11), (1.12), которые приводят к совокупности  $(m+1)(n+1)$  систем линейных алгебраических уравнений 6-го порядка. Граничные условия на торцах плиты (1.10) при данном выборе вида функций  $L^{(p)}, N^{(p)}$  — будут выполняться автоматически в каждом приближении.

При решении задачи в первом и последующих приближениях необходимо уточнить вид функций  $f(x, y)$ , описывающей геометрию лицевых поверхностей плиты. В случае, когда основания плиты периодически искривлены в одном направлении, в частности, когда

$$f = f(y) = h \cos(\omega y/b) \quad (2.6)$$

в выражениях для функций  $L^{(p)}, N^{(p)}$  необходимо последовательно заменить  $A_{kl}^{(p)}$  на  $A_{kl}^{(p,s)}, \dots, F_{kl}^{(p)}$  на  $F_{kl}^{(p,s)}, \lambda_l$  на  $\lambda_l^{(p,s)}$ , где  $p$  — номер приближения,  $s$  — индекс суммирования. В первом, втором и третьем приближениях имеем

$$\lambda_l^{(1,s)} = (\omega \pm l)\pi/b \quad (s = 1, 2)$$

$$\lambda_l^{(2,s)} = (2\omega \pm l)\pi/b, \quad l\pi/b \quad (s = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_l^{(3,s)} = (3\omega \pm l)\pi/b, \quad (\omega \pm l)\pi/b \quad (s = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Заметим, что с увеличением номера приближения  $p$  соответственно возрастает количество систем линейных уравнений для определения произвольных постоянных: в нулевом приближении необходимо решить  $(m+1)(n+1)$  систем, в первом  $2(m+1)(n+1)$ , во втором  $3(m+1)(n+1)$ , в третьем  $4(m+1)(n+1)$  и так далее.

3. На основе изложенного в пп. 1, 2 подхода исследуем закономерности напряженно-деформированного состояния непрерывно-неоднородных прямоугольных плит с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты в виде  $G = G_0 \exp[\gamma(z/h - 1)]$  и постоянным коэффициентом

Таблица 1

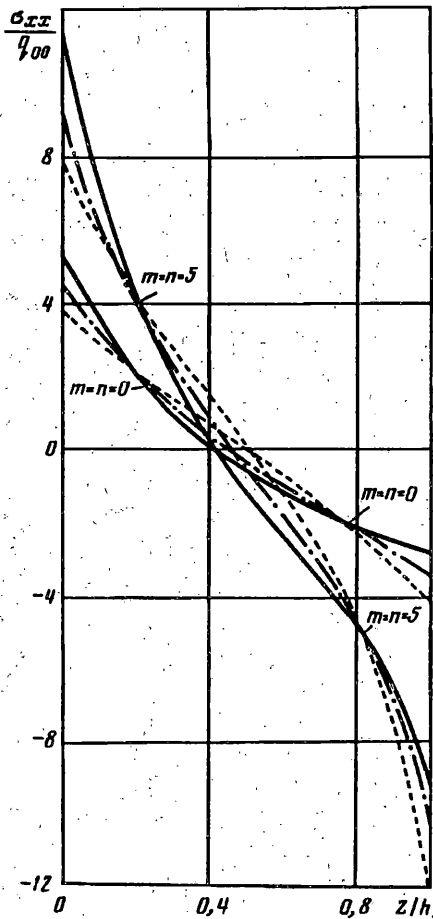
m	$\gamma = -0,5$		$\gamma = -1,0$	
	z = 0	z = h	z = 0	z = h
0	4,624	-3,419	5,462	-2,886
1	6,663	-5,331	7,877	-4,532
2	7,815	-6,775	9,245	-5,803
3	8,588	-8,009	10,160	-6,939
4	9,156	-9,240	10,840	-8,016
5	9,596	-10,387	11,360	-9,061
6	9,940	-11,508	11,780	-10,090
7	10,240	-12,610	12,130	-11,110
8	10,486	-13,701	12,420	-12,120
9	10,694	-14,782	12,670	-13,130

Таблица 2

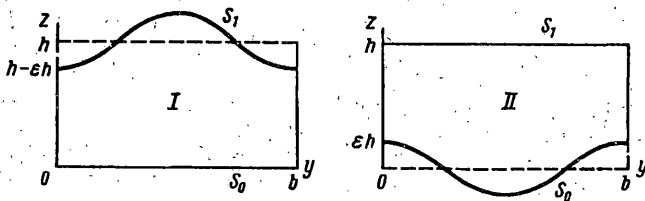
m	$\epsilon_{xx}^0/q_{00} \mid_{s_0}$	$\epsilon_{xx}^{(1)}/q_{00} \mid_{s_0}$	$\Delta_1^{(1)}$	$\epsilon_{xx}^{(2)}/q_{00} \mid_{s_0}$	$\Delta_1^{(2)}$
0	5,462	5,055	-7,5	5,510	0,9
1	7,877	6,971	-11,5	7,433	-5,6
2	9,245	7,961	-13,9	8,350	-9,7
3	10,16	8,586	-15,5	8,888	-12,6
4	10,84	9,024	-16,7	9,239	-14,8
5	11,36	9,351	-17,7	9,484	-16,5
6	11,78	9,606	-18,5	9,663	-18,0
7	12,13	9,811	-19,1	9,797	-19,2
8	12,42	9,979	-19,7	9,900	-20,3
9	12,67	10,12	-20,2	9,979	-21,3

Таблица 3

m	$G_1 u_z^{(0)}/q_{00} h \mid_{s_1}$	$G_1 u_z^{(1)}/q_{00} h \mid_{s_1}$	$\Delta_1^{(1)}$	$G_1 u_z^{(2)}/q_{00} h \mid_{s_1}$	$\Delta_2^{(2)}$
0	-1,767	-1,549	-12,3	-1,387	-21,5
1	-2,508	-2,193	-12,5	-1,937	-22,8
2	-2,945	-2,597	-11,8	-2,272	-22,9
3	-3,264	-2,910	-10,9	-2,526	-22,6
4	-3,523	-3,178	-9,8	-2,738	-22,3
5	-3,744	-3,418	-8,7	-2,926	-21,8
6	-3,940	-3,639	-7,6	-3,096	-21,4
7	-4,117	-3,846	-6,6	-3,253	-21,0
8	-4,281	-4,043	-5,6	-3,400	-20,6
9	-4,434	-4,232	-4,6	-3,539	-20,2



Фиг. 1



Фиг. 2

Пуассона  $\nu = \text{const}$ , находящихся под действием локализованных нагрузок вида (1.3) — (1.5). Числовые расчеты приведены для прямоугольной плиты  $a/h = 3$ ,  $b/h = 6$ ,  $\nu = 0,3$ .

Распределение напряжений  $\sigma_{xx}/q_{00}$  по толщине однородной и неоднородных плит постоянной толщины при различных степенях локализации нагрузки ( $m - n = 0$ ,  $m - n = 5$ ) представлено на фиг. 1. Данные для однородной плиты с модулем сдвига  $G = G_1$  отмечены пунктирной линией, для неоднородных — штрихпунктирной ( $\gamma = -0,5$ ) и сплошной ( $\gamma = -1,0$ ) линиями. Как видно из рисунка, с увеличением степени локализации нагрузки напряжения возрастают по абсолютной величине, изменяется характер их распределения вблизи поверхности, к которой приложена изгибающая нагрузка.

Зависимость максимальных напряжений ( $\sigma_{xx}/q_{00}$ ) в плите от показателя неоднородности  $\gamma$  ( $\gamma < 0$ ) и степени локализации нагрузки ( $m - n$ ) представлена в табл. 1. Анализ числовых результатов

показывает, что максимальные напряжения в неоднородных плитах при  $\gamma < 0$  (т. е. когда модуль сдвига уменьшается от нижнего свободного к верхнему нагруженному основанию) могут достигаться как на нижней, так и на верхней лицевой плоскости; чем меньше показатель неоднородности по абсолютной величине, тем при меньшей степени локализации нагрузки напряжения в плите начинают достигать максимальной величины на менее жестком основании.

Влияние непостоянства толщины плиты на величину максимальных напряжений и прогибов при различных степенях локализации нагрузки ( $m = n$ ) показано в табл. 2, 3 на примере плиты переменной толщины с показателем неоднородности  $\gamma = -1$ , геометрия оснований которой описывается уравнением  $z = h_1 + \epsilon h \omega_1 \cos(\omega_1 y/b)$  при  $\epsilon = 0,2$ ;  $\omega = 2$  ( $i = 0, 1$ ). Рассматриваются два типа плит переменной толщины: (1) — нижнее основание плоское, верхнее искривлено ( $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = -1$ ), (2) — нижнее основание искривлено, а верхнее плоское ( $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0$ ). Сечение в плоскости  $yoz$  плит описанных типов показаны на фиг. 2. Вычисления приводились с точностью  $O(\epsilon^4)$ . Из приведенных результатов видно, что искривление лицевых поверхностей плиты приводит к уменьшению величины максимальных напряжений и прогибов в плите, причем для перемещений существенное значение имеет также тип искривления. С возрастанием степени локализации нагрузки влияние непостоянства толщины на напряжения увеличивается, а на прогибы уменьшается, особенно для плиты 1 типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ. хим. 1957. № 2. С 25—34.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Виц. шк., 1985. 190 с.
3. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 2. С. 49—56.
4. Пискунов В. Г., Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Изгиб толстой трансверсально-изотропной плиты поперечной нагрузкой // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 11. С. 21—26.
5. Пискунов В. Г., Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Решение задачи статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 2. С. 41—49.
6. Присяжнюк В. К., Верижанко В. Е. Расчет непрерывно-неоднородных плит с учетом эффектов поперечного сдвига и обжатия // Расчет пространственных строительных конструкций, Куйбышев: Изд-во Куйбышев. ун-та, 1985. Вып. 11. С. 119—124.
7. Пискунов В. Г., Верижанко В. Е., Присяжнюк В. К. и др. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. Киев: Виц. шк., 1987. 199 с.
8. Немиш Ю. Н., Маслов В. П., Сагалюк И. С., Чернопиский Д. И. О трехмерном напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин переменной толщины при изгибе // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 8. С. 27—33.
9. Немиш Ю. Н., Чернопиский Д. И. К решению пространственных краевых задач об упругом равновесии составных плит с неканоническими поверхностями раздела // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 10. С. 84—92.
10. Немиш Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Киев: Наук. думка, 1989. 311 с.
11. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 853—860.

Киев

Поступила в редакцию  
2.VII.1991