

УДК 539.3

© 1993 г. М. А. ЗАДОЯН

МАЛОНАПРЯЖЕННОСТЬ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Исследованием явления малонапряженности (нулевых напряжений), имеющего место на крае контактной поверхности составного линейноупругого тела, как показано в [1], можно достичь высокой прочности данного соединения. В настоящей работе в пространстве физических и геометрических параметров рассматриваются зоны малонапряженности на крае контактной поверхности составного цилиндрического тела со степенным законом упрочнения материалов в условиях продольного сдвига. Задача исследуется в двух краевых условиях: когда на гранях клина заданы нулевые перемещения и когда на этих гранях заданы смешанные условия. Такая задача при нулевых напряжениях на гранях клина рассмотрена в [2].

Для однородных тел с нелинейными соотношениями между напряжениями и деформациями задача продольного сдвига исследована в [3—6]. Подробный анализ исследований в этой области содержится в [5, 6].

1. Постановка задачи. Пусть длинное цилиндрическое составное тело из степенно упрочняющегося материала с угловой точкой на крае контактной поверхности находится в условиях продольного сдвига. В этой точке поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta = 0$ направим по контактной поверхности, а ось z по продольному направлению (фиг. 1).

В каждой области поперечного сечения имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (1.1)$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещения

$$\tau_{\theta z} = F(\varepsilon_0) \gamma_{\theta z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

$$\sigma_0 = F(\varepsilon_0) \varepsilon_0, \quad \sigma_0 = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\gamma_{rz}^2 + \gamma_{\theta z}^2}$$

где функция $F(\varepsilon_0)$ характеризует закон упрочнения материала. В случае степенного закона имеем

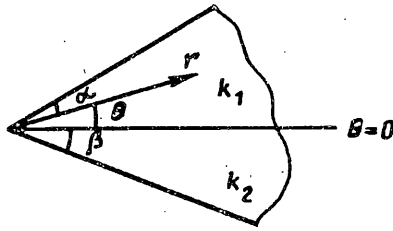
$$F(\varepsilon_0) = k \varepsilon_0^{m-1} \quad (1.3)$$

где k и m — параметры материала.

Исключая компоненты напряжений из (1.1) и (1.2), приходим к дифференциальному уравнению относительно w :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r F(\varepsilon_0) \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{F(\varepsilon_0)}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (1.4)$$

Величины в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\beta \leq \vartheta \leq 0$ обозначим индексами $i = 1, 2$ соответственно. Будем принимать степенной закон упрочнения (1.3), причем m для обоих материалов считаем одинаковыми, а k — различными. Не ограничивая общности, для определенности полагаем $k_2 > k_1$.



Фиг. 1

2. Представление решения. Компоненты напряжений и перемещения для случая принятого закона (1.3) в каждой области в малой окрестности угловой точки $r=0$ представим в форме

$$\tau_{rz} = \lambda k r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_{\theta z} = k r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i \quad (2.1)$$

$$w_i = r^2 f_i, \quad \chi_i = (f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2)^{1/2(m-1)}$$

где $f_i = f_i(\lambda, \theta)$ и λ — искомые функция и постоянная соответственно.

Подставляя выражение перемещения из (2.1) в (1.4) при допущении (1.3), приходим к дифференциальному уравнению

$$(f_i' \chi_i)' + \eta f_i' \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda [1 + (\lambda - 1) m] \quad (2.2)$$

Вводя новую функцию ($f_i = f_i \psi_i$) сведем (2.2) к уравнению первого порядка

$$\psi_i' = -(\psi_i^2 + \lambda^2) (\psi_i^2 + \omega^2) / (\psi_i^2 + \lambda^2 n) \quad (2.3)$$

$$\omega^2 = \lambda (\lambda + n - 1), \quad n = 1/m$$

Общее решение этого уравнения будет (H_i — произвольная постоянная):

$$\arctg(\psi_i/\lambda) + (1 - \lambda) \arctg(\psi_i/\omega)/\omega = H_i - \theta \quad (2.4)$$

Используя граничные условия на гранях клина и условия сопряжения на контактной поверхности, из (2.4) определяем H_i , λ , следовательно, и функции ψ_i в соответствующих областях $0 \leq \theta \leq \alpha$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$.

3. Нулевые перемещения на гранях клина. 3.1. Когда перемещения в клине не меняют знак, для функции f_i имеем граничные условия $f_1(\alpha) = f_2(-\beta) = 0$, а также условия сопряжения на контактной поверхности $f_1 = f_2$, $f_1' \chi_1 = \gamma f_2' \chi_2$ при $\theta = 0$, где $\gamma = k_2/k_1$. Для ψ_i будем иметь

$$\psi_1(\alpha) = -\psi_2(-\beta) = -\infty \quad (3.1)$$

и условие на контактной поверхности

$$\mu_1 (\mu_1^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} = \gamma \mu_2 (\mu_2^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)}, \quad \mu_i = \psi_i(0) \quad (3.2)$$

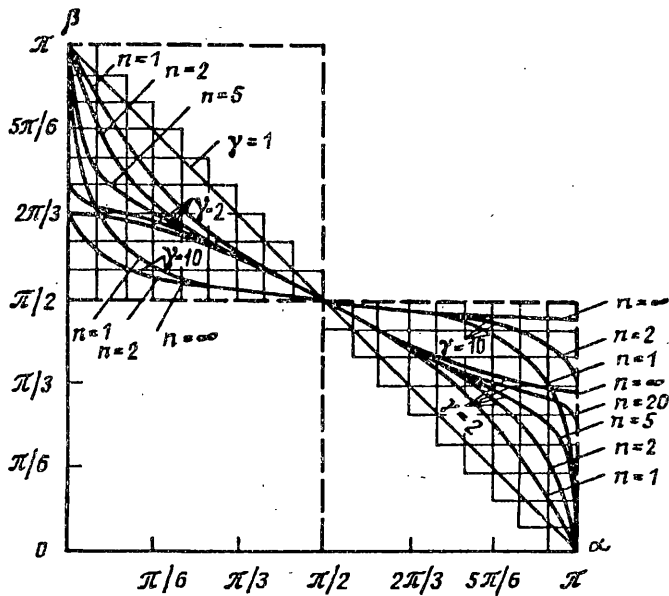
Таким образом, приходим к трехточечной задаче об определении собственной функции ψ_i и собственного значения λ из уравнения (2.4) при граничных условиях (3.1), (3.2).

Используя граничные условия (3.1), из (2.4) находим

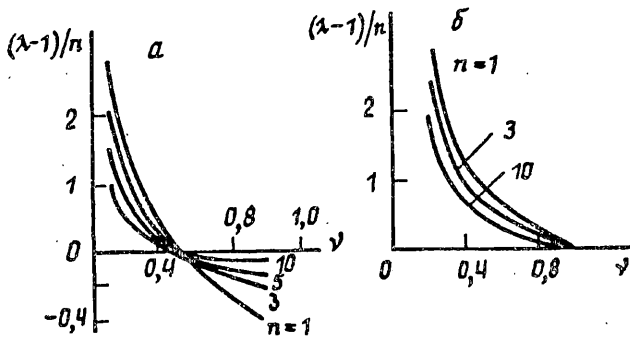
$$H_1 = \alpha - 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega), \quad H_2 = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) - \beta \quad (3.3)$$

Принимая $\theta = 0$, из (2.4) получаем уравнение относительно μ_i

$$\arctg \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{\omega} \arctg \frac{\mu_i}{\omega} = H_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Полученные зависимости (3.2)—(3.4) составляют систему из трех уравнений относительно μ_1 , μ_2 и λ , определяющих в конечном счете $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n)$.

Условие $\lambda = 1$ в пространстве параметров α , β , γ , n определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений [1, 2]. Принимая в (3.2)—(3.4) $\lambda = 1$, приходим к уравнению

$$\operatorname{ctg} \alpha |\sin \alpha|^{1-m} + \gamma \operatorname{ctg} \beta |\sin \beta|^{1-m} = 0 \quad (3.5)$$

На фиг. 2 показаны следы этой поверхности на координатной плоскости $\alpha\beta$ в зависимости от параметров γ и n . Эти кривые разделяют область малонапряженности (ниже кривых) и область сильной концентрации напряжений (выше кривых). Точки кривых соответствуют конечным напряжениям. Из характера изменения этих кривых заключаем, что при увеличении степени упрочнения n зона малонапряженности уменьшается, если сильному материалу соответствует больший угол, чем слабому, и наоборот, зона увеличивается, если сильному материалу соответствует меньший угол, чем слабому.

Принимая $\lambda = \lambda_* < 1$, из (3.2)—(3.4) находится уравнение гиперповерхности одинаковой степени концентрации напряжений.

Для линейно-упругого материала, принимая $n=1$, уравнение (3.5) и его графики сводятся к соответствующим результатам из [7, 8].

В случае однородного клина, т. е. при $\gamma=1$; полагая $\mu_1 = \mu_2$ уравнение (3.2) удовлетворяется тождественно, а из (3.4) находим

$$\alpha + \beta = \pi(1 + (1 - \lambda)/\omega) \quad (3.6)$$

Здесь и в дальнейшем, введя обозначения $\alpha + \beta = 2\alpha^*$, $\alpha^*/\pi = \nu$, из (3.6) получим: при $\nu = 1/2$ (полуплоскость $\lambda=1$), при $\nu=1$ (полубесконечная щель $\lambda=1/(n+1)$); когда $\nu \neq 1$ будем иметь

$$\lambda = \frac{2 + (1 - 2\nu)^2 (n - 1) \pm ([2 + (1 - 2\nu)^2 (n - 1)]^2 - 16\nu(1 - \nu))^{1/2}}{8\nu(1 - \nu)} \quad (3.7)$$

где верхний знак соответствует $\nu \leq 1/2$, а нижний $-\nu \geq 1/2$ (фиг. 3, а).

3.2. Пусть теперь перемещение меняет знак от отрицательного к положительному. Положим $w=0$ при $\theta = -\beta, -\varphi, \alpha$, причем $\varphi \geq 0$ — искомый угол, подлежащий определению в ходе решения задачи. В рассматриваемом случае решение (2.4) будем строить в трех областях: $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\varphi \leq \theta \leq 0$, $-\beta \leq \theta \leq -\varphi$. Величины в этих областях обозначим индексами $i=1, 2, 3$ соответственно. Принимаем, естественно, $k_2 = k_3$.

Имеем граничные условия $f_1(\alpha) = f_2(-\varphi) = f_3(-\varphi) = f_3(-\beta) = 0$, $f_2'(-\varphi) = f_3'(-\varphi)$ и условия на контактной поверхности $f_1 = f_2$, $f_1'\lambda_1 = f_2'\lambda_2$ при $\theta=0$.

В указанных областях решение ищется в виде (2.4), причем для ψ_i имеем условия

$$\psi_1(\alpha) = -\psi_2(-\varphi) = \psi_3(-\varphi) = -\psi_3(-\beta) = -\infty \quad (3.8)$$

и условие на контактной поверхности

$$\mu_1(\mu_1^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} = \gamma\mu_2(\mu_2^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} \quad (3.9)$$

Используя условие (3.8), из (2.4) находим

$$H_1 = \alpha - 1/2\pi(1 + (1 - \lambda)/\omega), \quad H_2 = 1/2\pi(1 + (1 - \lambda)/\omega) - \varphi \quad (3.10)$$

$$H_2 = 1/2\pi(1 + (1 - \lambda)/\omega) - \beta, \quad \varphi = \beta - \pi(1 + (1 - \lambda)/\omega)$$

Принимая $\theta=0$, из (2.4) получаем уравнение

$$\arctg \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{\omega} \arctg \frac{\mu_i}{\omega} = H_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.11)$$

Система уравнений (3.9), (3.11) определяет, в конечном счете, $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n)$. Полагая в этих уравнениях $\lambda=1$; приходим к тому же уравнению (3.5) гиперповерхности конечных напряжений, следы которой на координатной плоскости $\alpha\beta$ показаны на фиг. 2.

Для однородного клина, т. е. $\gamma=1$; полагая $\mu_1 = \mu_2$, уравнение (3.9) превращается в тождество, а из (3.11) получаем $\alpha + \beta = 2\pi(1 + (1 - \lambda)/\omega)$, откуда следует

$$\lambda = \frac{2 + (1 - \nu)^2 (n - 1) + ([2 + (1 - \nu)^2 (n - 1)]^2 - 4\nu(2 - \nu))^{1/2}}{2\nu(2 - \nu)}$$

Графики изменения $(\lambda - 1)/n$ показаны на фиг. 3, б.

С другой стороны, переходя к пределу $\varphi \rightarrow 0$ и, соответственно принимая $\mu_1 \rightarrow \infty$, из (3.10), (3.11) находим $\alpha = \beta = \pi(1 + (1 - \lambda)/\omega)$, т. е. при $\alpha = \beta$ параметр λ не зависит от материала.

4. Смешанные граничные условия. Пусть край клина более сильного материала ($\theta = -\beta$) жестко заземлен, а край более слабого материала ($\theta = \alpha$) свободен от напряжения.

4.1. Когда перемещение не меняет знак, решение (2.4) будем строить в двух областях ($i = 1, 2$). Имеем граничные условия $f_1(\alpha) = f_2(-\beta) = 0$ и условия сопряжения на контактной поверхности $f_1 = f_2, f_1' \chi_1 = \gamma f_2' \chi_2$ при $\theta = 0$.

Для функции ψ_i будем иметь

$$\psi_1(\alpha) = 0, \quad \psi_2(-\beta) = \infty \quad (4.1)$$

а также условие $\mu_1 = \psi_1(0)$:

$$\mu_1 (\mu_1^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} = \gamma \mu_2 (\mu_2^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} \quad (4.2)$$

Используя решение (2.4) в соответствующих областях при граничных условиях (4.1), находим $H_1 = \alpha, H_2 = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega)$. Полагая в (2.4) $\theta = 0$ на контактной поверхности, получаем

$$\text{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{\omega} \text{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} = H_i \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.2), (4.3) определяет, в конечном счете, $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n)$. Условие $\lambda = 1$ в пространстве параметров α, β, γ, n определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Принимая $\lambda = 1$, из (4.2) и (4.3) приходим к уравнению

$$\text{tg} \alpha \mid \cos \alpha \mid^{1-m} - \gamma \text{ctg} \beta \mid \sin \beta \mid^{1-m} = 0 \quad (4.4)$$

На координатной плоскости $\alpha\beta$ уравнение (4.4) представляет следы гиперповерхности конечных напряжений в зависимости от γ и n (фиг. 4). При $n = 1$ приходим к графикам [7, 8].

Для однородного клина, т. е. при $\gamma = 1$, принимая $\mu_1 = \mu_2$, уравнение превращается в тождество, а из (4.3) получаем $\alpha + \beta = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega)$. Отсюда, используя обозначения (3.7), находим при $\nu = 1/4, \lambda = 1$, при $\nu = 1/2, \lambda = 1/(n + 1)$; когда $\nu \neq 1/2$, имеем

$$\lambda = \frac{2 + (1 - 4\nu)^2 (n - 1) \pm ([2 + (1 - 4\nu)^2 (n - 1)]^2 - 32\nu(1 - 2\nu))^{1/2}}{16\nu(1 - 2\nu)}$$

где верхний знак относится к $\nu \leq 1/4$, а нижний — к $\nu \geq 1/4$ (фиг. 5, а).

4.2. Когда перемещение меняет знак от отрицательного к положительному, ставятся следующие граничные условия: $\tau_{\theta z} = 0$ при $\theta = \alpha, w = 0$ при $\theta = -\beta, -\varphi$, причем $\varphi > 0$ — неизвестный угол, подлежащий определению.

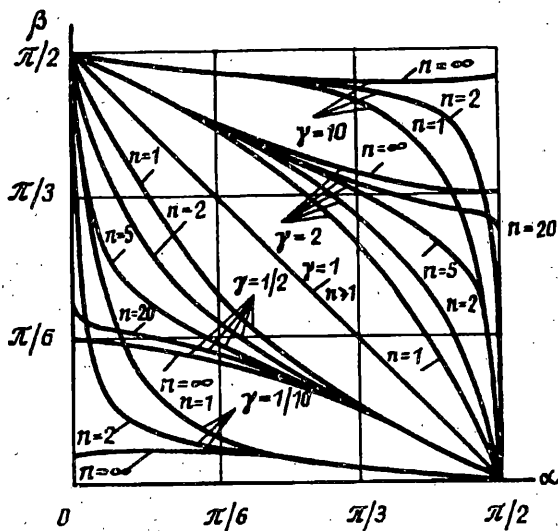
Решение (2.4) будем строить в трех областях $0 \leq \theta \leq \alpha, -\varphi \leq \theta \leq 0, -\beta \leq \theta \leq -\varphi$, величины в которых обозначаем индексами $i = 1, 2, 3$ соответственно, причем $k_2 = k_3$. Для функции f_i имеем граничные условия $f_1(\alpha) = f_2(-\varphi) = f_3(-\varphi) = f_3(-\beta) = 0, f_2'(-\varphi) = f_3'(-\varphi)$ и условия на контактной поверхности $f_1 = f_2, f_1' \chi_1 = \gamma f_2' \chi_2$ при $\theta = 0$.

Для функции ψ_i будем иметь граничные условия

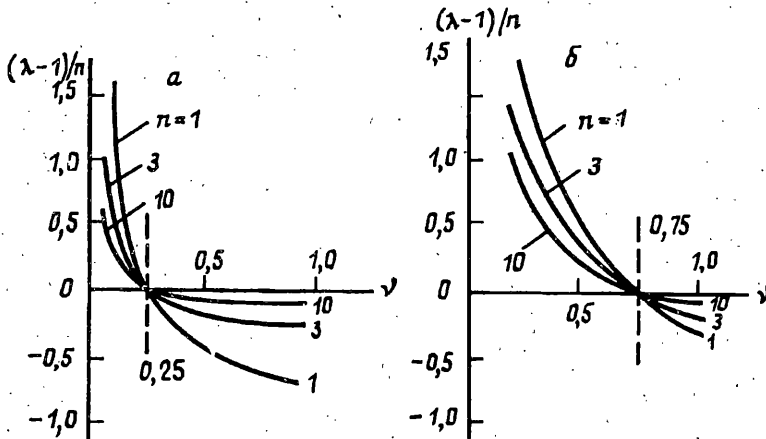
$$\psi_1(\alpha) = 0, \quad \psi_2(-\varphi) = -\psi_3(-\varphi) = \psi_3(-\beta) = \infty \quad (4.5)$$

и условие на контактной поверхности

$$\mu_1 (\mu_1^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} = \gamma \mu_2 (\mu_2^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} \quad (4.6)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Используя условия (4.5), из (2.4) находим $H_1 = \alpha$, $H_2 = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) - \varphi$, $H_3 = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) - \beta$, $\varphi = \beta - \pi (1 + (1 - \lambda)/\omega)$.

Принимая в (2.4) $\theta = 0$, получим

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} = H_i, \quad \mu_i = \psi_i(0) \quad (i = 1, 2) \quad (4.7)$$

Система уравнений (4.6), (4.7) определяет $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n)$. Принимая $\lambda = 1$, из (4.6), (4.7) приходим к тому же уравнению (4.4), определяющему зоны малонапряженности.

В случае однородного клина $\gamma = 1$; принимая $\mu_1 = \mu_2$, из (4.7) находим

$$\alpha + \beta = 3/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) \quad (4.8)$$

Отсюда следует $\lambda = 1$ при $\nu = 3/4$ и

$$\lambda = \frac{2 + (1 - 4/3\nu)^2 (n - 1) \pm \left([2 + (1 - 4/3\nu)^2 (n - 1)]^2 - 32/3\nu (1 - 2/3\nu) \right)^{1/2}}{16/3\nu (1 - 2/3\nu)}$$

где верхний знак относится к $v \leq 3/4$, а нижний — к $v \geq 3/4$ (фиг. 5, б).

В предельном случае, когда $\varphi \rightarrow 0$, полагая в (4.7) $\mu_1 \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\beta = 2\alpha = \pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) \quad (4.9)$$

Это означает, что в рассмотренном случае, когда $\beta = 2\alpha$, параметр λ не зависит от материала. Очевидно, приведенное исследование справедливо при $\beta \geq 2\alpha$.

В случае $\beta \leq 2\alpha$ принимаем следующие граничные условия $\tau_{\theta z} = 0$ при $\theta = \alpha$, $w = 0$ при $\theta = -\beta$, φ , где $\varphi \geq 0$ — неизвестный угол, подлежащий определению.

Решение (2.4) строится в трех областях $\varphi \leq \theta \leq \alpha$, $0 \leq \theta \leq \varphi$, $-\beta \leq \theta \leq 0$, величины в которых обозначим индексами $i = 1, 2, 3$ соответственно. Полагаем также $k_1 = k_2$.

Будем иметь граничные условия $f_1'(\alpha) = f_1(\varphi) = f_2(\varphi) = f_3(-\beta) = 0$, $f_1'(\varphi) = f_2'(\varphi)$ и условия на контактной поверхности $f_2 = f_3$, $f_2'\chi_2 = \gamma f_3'\chi_3$ при $\theta = 0$. Для функции ψ_i имеем условия

$$\psi_1(\alpha) = 0, \quad \psi_1(\varphi) = -\psi_2(\varphi) = \psi_3(-\beta) = \infty \quad (4.10)$$

и условие на контактной поверхности ($\gamma = k_3/k_2$):

$$\mu_2 (\mu_2^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} = \gamma \mu_3 (\mu_3^2 + \lambda^2)^{1/2(m-1)} \quad (4.11)$$

$$\mu_i = \psi_i(0) \quad (i = 2, 3)$$

Используя условия (4.10), находим $H_1 = \alpha$, $H_2 = \varphi - 1/2\pi (1 - \lambda)/\omega$, $H_3 = 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega) - \beta$, $\varphi = \alpha - 1/2\pi (1 + (1 - \lambda)/\omega)$. Принимая $\theta = 0$, из (2.4) получаем

$$\arctg \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{\omega} \arctg \frac{\mu_i}{\omega} = H_i \quad (i = 2, 3) \quad (4.12)$$

Система уравнений (4.11), (4.12) определяет $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n)$. Отсюда при $\lambda = 1$ приходим к тому же уравнению (4.4) конечных напряжений.

В случае однородного клина $\gamma = 1$, принимая $\mu_2 = \mu_3$, уравнение (4.11) удовлетворяется тождественно, а из (4.12) приходим к прежнему уравнению (4.8). Переходя к пределу $\varphi \rightarrow 0$ и принимая в (4.12) $\mu_3 \rightarrow -\infty$, приходим к соотношению (4.9).

В [9, 10] также обсуждаются задачи малонапряженности составных тел из степенно упрочняющихся материалов. Эти исследования можно провести также путем сведения к системе интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра, при помощи введения функции напряжений, методом годографов [5], однако указанные пути не проще, чем изложенное здесь решение в перемещениях.

Автор благодарит С. С. Григоряна за обсуждение результатов и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М. А. Продольный сдвиг составного клина // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 2. С. 297—302.
3. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвигов, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации // Механика // Период. сб. перев. иностр. статей. 1961. № 4. С. 117—130.
4. Черепанов Г. П. Упругопластическая задача в условиях антиплоской деформации // ПИММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 697—708.

5. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения//Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204—335.
6. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
7. Аксентян О. К., Луцик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 102—108.
8. Саргсян А. М., Хачикян А. С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела//Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 86. № 4. С. 161—165.
9. Задоян М. А. Задачи малонапряженности составных тел//Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 87. № 4. С. 160—164.
10. Задоян М. А. Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением//Докл. АН АрмССР. 1982. Т. 74. С. 18—25.

Ереван

Поступила в редакцию
30.V.1990