МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.3

 Ю. И. МИНДОЛИН, А. И. УЗДАЛЁВ

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Многие задачи теории упругости анизотропного тела приводятся к нахождению неизвестных функций $F(x, y)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям в частных производных второго, четвертого или шестого порядка. К ним относятся, в частности, задачи о плоском напряженном состоянии, об упругом равновесии ограниченного цилиндрической поверхностью тела, в котором напряжения не меняются вдоль образующей, и другие. Метод, разработанный в [1], позволяет свести интегрирование такого уравнения к выражению функции F через комплексные потенциалы. С помощью данного метода решен большой класс задач [1—5].

В публикуемой работе упомянутое выше уравнение преобразуется к виду, удобному для последовательного интегрирования уравнений Лапласа и Пуассона.

1. Дано дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 \frac{\partial^{2m} F}{\partial x^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m} F}{\partial x^{2m-1} \partial y} + \ldots + a_{2m} \frac{\partial^{2m} F}{\partial y^{2m}} = 0 \quad (m = 3) \tag{1.1}$$

Следуя [2], запишем это уравнение в операторной форме

$$D_1 D_2 \ldots D_6 F = 0, \quad D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x} \quad (k = 1, \ldots, 6) \tag{1.2}$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$a_6 \mu^6 + a_5 \mu^5 + \ldots + a_1 \mu + a_0 = 0 \tag{1.3}$$

Как установлено в [2], для реальных анизотропных материалов корни μ_k уравнения (1.3) являются комплексными и попарно сопряженными

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \mu_{k+3} = \alpha_k - i\beta_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Здесь коэффициенты α_k, β_k — действительные числа, i — мнимая единица. Уравнение (1.2) можно представить в ином операторном виде

$$L_3 L_2 L_1 F = 0$$

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\mu_k + \mu_{k+3}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \mu_k \mu_{k+3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

Оператор L_k имеет действительные коэффициенты, так как

$$\mu_k + \mu_{k+3} = 2\alpha_k, \quad \mu_k \mu_{k+3} = \alpha_k^2 + \beta_k^2 \tag{1.6}$$

В результате подстановки (1.6) в правую часть L_k получаем

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.7}$$

2. Для дальнейшего преобразования оператора L_k выполним переход от независимых переменных x, y к новым переменным u_k, v_k, полученным путем поворота осей координат на некоторый неизвестный пока угол φ_k и изменения линейных размеров за счет коэффициентов a_k, b_k, также пока неизвестных. Вид формул перехода следующий

$$\begin{aligned} u_k &= a_k (x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k) \\ v_k &= b_k (y \cos \varphi_k - x \sin \varphi_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

При замене переменных в операторе (1.7) пользуемся правилом дифференцирования сложной функции. В результате вычисления вторых производных приходим к зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= a_k^2 \sin^2 \varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k^2} + a_k b_k \sin 2\varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial v_k} + b_k^2 \cos^2 \varphi_k \frac{\partial^2}{\partial v_k^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{a_k^2}{2} \sin 2\varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k^2} + a_k b_k \cos 2\varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial v_k} - \frac{b_k^2}{2} \sin 2\varphi_k \frac{\partial^2}{\partial v_k^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= a_k^2 \cos^2 \varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k^2} - a_k b_k \sin 2\varphi_k \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial v_k} + b_k^2 \sin^2 \varphi_k \frac{\partial^2}{\partial v_k^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Группируя в (2.2) коэффициенты при производных $\partial^2/\partial u_k \partial v_k$, $\partial^2/\partial u_k^2$, $\partial^2/\partial v_k^2$ и требуя выполнения трех соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi_k &= \frac{2\alpha_k}{1 - (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \\ 1/a_k^2 &= \sin^2 \varphi_k - \alpha_k \sin 2\varphi_k + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \cos^2 \varphi_k \\ 1/b_k^2 &= \cos^2 \varphi_k + \alpha_k \sin 2\varphi_k + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \sin^2 \varphi_k \end{aligned} \tag{2.3}$$

преобразуем в итоге оператор (1.7) к оператору типа Лапласа

$$L_k = \partial^2/\partial u_k^2 + \partial^2/\partial v_k^2 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Выражения (2.3) служат для отыскания неизвестных коэффициентов φ_k, a_k, b_k, входящих в формулы (2.1). В (2.3) последние два соотношения можно привести с учетом первого соотношения к виду

$$\frac{1}{b_k^2}, \frac{1}{a_k^2} = \frac{1 + (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{2} \pm \left(\left[\frac{1 - (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{2} \right]^2 + \alpha_k^2 \right)^{1/2} \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что значения $1/b_k^2$ и $1/a_k^2$ являются положительными величинами.

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения (1.1) сводится к интегрированию уравнения (1.5), в котором операторы L_k ($k = 1, 2, 3$) определяются по формуле (2.4). Каждый из операторов содержит свои, только ему соответствующие независимые переменные u_k, v_k.

3. Интегрирование уравнения (1.5) производим, решая последовательно следующую систему уравнений Лапласа и Пуассона:

$$L_3 \Phi_2 = 0, \quad L_2 \Phi_1 = \Phi_2, \quad L_1 F = \Phi_1 \tag{3.1}$$

Сначала из уравнения Лапласа находим функцию $\Phi_2(u_3, v_3)$.

Затем в полученной функции переходим от переменных u_3, v_3 к переменным u_2, v_2, используя при $k=3$ формулы

$$\frac{u_k}{a_k} = \frac{u_{k-1}}{a_{k-1}} \cos(\varphi_{k-1} - \varphi_k) - \frac{v_{k-1}}{b_{k-1}} \sin(\varphi_{k-1} - \varphi_k) \tag{3.2}$$

$$\frac{v_k}{b_k} = \frac{v_{k-1}}{b_{k-1}} \cos(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \frac{u_{k-1}}{a_{k-1}} \sin(\varphi_{k-1} - \varphi_k)$$

Решение второго уравнения системы (3.1), уравнения Пуассона, определяется выражением

$$\Phi_1(u_2, v_2) = \Phi_{10}(u_2, v_2) + \Phi_{11}(u_2, v_2) \tag{3.3}$$

где Φ_{10} — общее решение соответствующего однородного уравнения, а Φ_{11} — частное решение данного неоднородного. Переходим далее в записи функции $\Phi_1(u_2, v_2)$ к новым переменным u_1, v_1 по формулам (3.2) при $k=2$.

Наконец, приступаем к интегрированию последнего уравнения системы (3.1). Решением этого уравнения Пуассона будет

$$F(u_1, v_1) = F_{00}(u_1, v_1) + F_{01}(u_1, v_1) \tag{3.4}$$

где F_{00} — общее решение однородного уравнения $L_1F=0$, F_{01} — частное решение неоднородного. Чтобы получить функцию F в переменных x, y, следует воспользоваться формулами (2.1) при $k=1$.

Итак, решение исходного дифференциального уравнения (1.1) свелось к решению хорошо изученных уравнений Лапласа и Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
4. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев—Донецк: Вища школа. Головное изд-во, 1976. 200 с.
5. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. 168 с.

Саратов

Поступила в редакцию
7.V.1991