МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 531.8

© 1993 г. В. Б. ЛАРИН

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

При моделировании механизмов, содержащих замкнутые кинематические цепи, обычной процедурой является вывод уравнений движения для разомкнутого варианта этого механизма (разорваны замкнутые кинематические цепи) с последующим наложением дополнительных связей (замыканием кинематических цепей) [1]. Благодаря использованию современных математических подходов (аппарат блочных матриц [1], система аналитических вычислений MMANG[1], ε — алгебры [2] и т. п.) в настоящее время первый этап практически полностью алгоритмизирован. Однако, второй этап этой процедуры (замыкание кинематических цепей) при ориентации на полную автоматизацию построения математической модели требует соответствующей алгоритмизации выбора обобщенных координат. Ниже этот вопрос рассмотрен в рамках подхода, описанного в [1], однако очевидна возможность его использования и в алгоритмах[2] [2].

**1. Задача выбора обобщенных координат.** Рассмотрим, следуя [1], процедуру моделирования механизма, имеющего замкнутые кинематические цепи. На первом этапе их разрывают так, чтобы моделируемый механизм содержал только разомкнутые кинематические цепи. Соответствующий такому механизму вектор обобщенных координат обозначим $\mathbf{y}^T = [y_1 ... y_n]$ (верхний индекс $T$ означает операцию транспонирования). Используя для описания динамических процессов эти координаты, можно получить выражение для кинетической энергии, обобщенных сил и, в конечном итоге, найти значения вторых производных этих координат, необходимых для интегрирования уравнений движения. Однако надо иметь в виду, что в связи с наличием замкнутых кинематических цепей компоненты вектора $\mathbf{y}$ фактически не являются независимыми, а подчинены $m$ связям, т. е. удовлетворяют системе $m$ уравнений

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}) = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ – $m\times 1$ вектор-функция.

Таким образом $n$ компонент вектора $y$ могут быть выражены через $n-m$ независимых параметров и, следовательно, задача состоит в выборе $k$ обобщенных координат $\mathbf{q}^T = [q_1 ... q_k]$ $(k = n - m)$, т. е. в определении $n\times 1$ вектор-функции (соотношение (4.7.45) [1]):

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = 0 \tag{1.2}$$

или, по крайней мере, в определении матрицы перехода ((4.7.46) [1]):

$$\partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{q} = -[\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{y}]^{-1}\,\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{q} \tag{1.3}$$

которая задает связь между обобщенными скоростями

[1] *Городецкий О. М., Климов Д. М., Корлюков А. В.* Реализация аналитических процедур теоретической механики на ЭВМ в системе MMANG: Препринт № 84.233. М.: ИПМ АН СССР, 1984, 56 с.

[2] *Бордюг Б. А.* Методы компьютерной алгебры в задачах управления движением шагающих аппаратов: Препринт № 88.42. Киев: Институт математики АН УССР, 1988, 23 с.

$$y^{\cdot} = \partial y/\partial q q^{\cdot}$$

Формально выбор обобщенных координат (выбор функции $f(y, q)$) должен удовлетворять только условию невырожденности матрицы $\partial f/\partial y$ однако при неудачном выборе обобщенных координат матрица $\partial f/\partial y$ может быть плохо обусловлена, что отрицательно скажется на точности математического моделирования механизма. Ориентируясь как и в [1] на численный алгоритм моделирования, можно построить следующую процедуру введения обобщенных координат на каждом шаге интегрирования. Линеаризовав в начале шага уравнения связей (1.1) в окрестности начального значения $y_0$ вектора $y$ далее считаем, что фигурирующая в (1.1) вектор-функция является линейной, т. е.

$$C(y) = \Gamma y + C_0, \quad \Gamma = \partial C(y)/\partial y \,|_{y=y_0}$$

$C_0$ — постоянный вектор. Пополнив эти уравнения системой $n-m$ линейных уравнений $By = q$ получим выражение для вектор-функции $f(y, q)$:

$$f(y, q) = \begin{Vmatrix} \Gamma_y & -C_0 \\ By & -q \end{Vmatrix}$$

В этом случае матрицы $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial q$ имеют вид

$$\partial f/\partial y = \begin{Vmatrix} \Gamma \\ B \end{Vmatrix}, \quad \partial f/\partial q = \begin{Vmatrix} 0 \\ E \end{Vmatrix}$$

Здесь и далее $E$ — единичная матрица.

Таким образом, на рассматриваемом шаге интегрирования определена матрица $\partial y/\partial q$, что позволяет выразить кинетическую энергию механизма через $q^{\cdot}$, так как имеют место следующие соотношения между обобщенными скоростями

$$\Gamma y^{\cdot} = 0, \quad By^{\cdot} = q^{\cdot} \tag{1.4}$$

На следующем шаге цикл повторяется. Естественно, что матрица $f(y, q)$, фигурирующая в (1.2) может быть уже другой. Отметим, что в силу соотношений (1.4) рассматриваемый алгоритм можно интерпретировать как процедуру введения обобщенных скоростей на каждом шаге интегрирования.

**2. Выбор матрицы $B$.** Запишем сингулярное разложение (SVD-разложение) [3] матрицы $\Gamma$:

$$\gamma = U \,\|\Sigma 0\|\, V^T \tag{2.1}$$

$$\Sigma = \mathrm{diag}\ \{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}, \ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_m > 0$$

где $U$, $V$ — ортогональные матрицы размера $m\times m$ и $n\times n$, 0— нулевой блок размера $m\times k$. Разбив матрицу $V$ на блоки $V_1$, $V_2$ соответствующих размеров ($V = \|V_1 V_2\|$), соотношение (2.1) можно переписать так

$$\Gamma = U\Sigma V_1^T \tag{2.2}$$

Располагая разложением (2.1), матрицу $B$ в (1.4) целесообразно выбрать в виде

$$B = V_2^T \tag{2.3}$$

В этом случае матрица $\partial f/\partial y$ имеет вид

$$\partial f/\partial y = \begin{Vmatrix} U\Sigma V_1^T \\ V_2^T \end{Vmatrix}$$

Нетрудно проверить, что

$$[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{y}]^{-1} = V \begin{Vmatrix} \Sigma^{-1}U^T & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

Подставив эти соотношения в (1.3), получим

$$\partial \mathbf{y}/\partial \mathbf{q} = \|V_1 V_2\| \begin{Vmatrix} \Sigma^{-1}U^T & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ E \end{Vmatrix} = V_2$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{y}^* = V_2\mathbf{q}^*, \quad \mathbf{q}^* = V_2^T\mathbf{y}^* \tag{2.4}$$

Эти соотношения с учетом (2.2), (2.3) тождественно удовлетворяют (1.4). Действительно, приняв во внимание соотношения $V_1^TV_1 = E$, $V_2^TV_2 = E$, $V_1^TV_2 = 0$, следующие из условия ортогональности матрицы $V$:

$$V^TV = \begin{Vmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{Vmatrix} \|V_1 V_2\| = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

имеем для соотношений (1.4):

$$\Gamma\mathbf{y}^* = U\Sigma V_1^T V_2 \mathbf{q}^* = 0\mathbf{q}^* = 0, \quad B\mathbf{y}^* = V_2^T V_2 \mathbf{q}^* = E\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$$

Существенно, что, согласно (2.3) задача выбора матрицы $B$ не требует построения SVD — разложения матрицы $\Gamma$. Достаточно построить только блок $V_2$ ортогональной матрицы $V$.

**3. Процедура построения матрицы $V_2$ в случае одного уравнения связи.** Очевидно, построив алгоритм нахождения соотношений (2.4) для случая одной связи, можно, используя этот алгоритм $m$ раз, в конечном итоге найти вектор обобщенных координат для полной задачи, включающей все $m$ ограничений. Итак, начнем со случая одного ограничения, т. е. случая, когда матрица $\Gamma$ состоит из одной строки, т. е. имеет размерность $1\times n$. В этом случае фигурирующие в (2.2) матрицы $U$ и $\Sigma$ будут скалярами, причем $U = \pm 1$, а $\Sigma$ равна норме вектора $\Gamma$, т. е. $\Sigma^2 = \Gamma\Gamma^T$.

Таким образом, задача сводится к нахождению ортогональной матрицы, первым столбцом которой был бы нормированный вектор $\Gamma^T$, т. е. вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{(\Gamma\Gamma^T)^{1/2}}\Gamma^T = \begin{Vmatrix} \gamma_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_* \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

где $\gamma_0$ — первый элемент вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

Пусть $\gamma_0 \neq -1$ (в противном случае умножаем $\Gamma$ на $-1$, что не нарушает соотношения (1.4)). В качестве матрицы $V$ можно принять следующую матрицу

$$V = \begin{Vmatrix} \gamma_0 & -\boldsymbol{\gamma}_*^T \\ \boldsymbol{\gamma}_* & [E - (1+\gamma_0)^{-1}\boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T] \end{Vmatrix}$$

Нетрудно проверить, что $V^TV = E$. Действительно

$$V^TV = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ a^T & b \end{Vmatrix}$$

$$a = -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}_*^T + \boldsymbol{\gamma}_*^T - (1+\gamma_0)^{-1}\boldsymbol{\gamma}_*^T\boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T =$$

$$= -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}_*^T + \boldsymbol{\gamma}_*^T - (1-\gamma_0)\boldsymbol{\gamma}_*^T = 0$$

$$b = \boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T + E - 2(\gamma_0+1)^{-1}\boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T +$$

$$+ (1+\gamma_0)^{-2}\boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T\boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T = \boldsymbol{\gamma}_*\boldsymbol{\gamma}_*^T[1 -$$

$$- 2(\gamma_0 + 1)^{-1} + (1 - \gamma_0)(\gamma_0 + 1)^{-1}] + E = E$$

Следовательно

$$V_1 = \gamma,\ V_2 = \left\| \begin{matrix} -\gamma_*^T \\ E - (1 + \gamma_0)^{-1}\gamma_*\gamma_*^T \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

Таким образом, в случае одного уравнения связи алгоритм построения матрицы $V_2$ сводится к нормировке вектора (соотношение (3.1)) и формированию самой матрицы $V_2$ в соответствии с (3.2).

**4. Рекуррентный алгоритм построения матрицы $V_2$.** Пусть фигурирующая в (1.4) матрица $\Gamma$ имеет $m$ строк (на систему наложено $m$ связей). Покажем как, используя описанный в п. 3 алгоритм $m$ раз, можно построить матрицу $V_2$, не используя SVD — разложение матрицы $\Gamma$. Обозначим через $\Gamma_i$ $(i = 1,...,m)$ строки матрицы $\Gamma$, т. е.

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{matrix} \right\|$$

Применив алгоритм п. 3 к строке $\Gamma_1$, получим

$$\gamma_1 = \frac{1}{(\Gamma_1\Gamma_2^T)^{1/2}}\Gamma_1^T = \left\| \begin{matrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{*1} \end{matrix} \right\|,\quad V_2 = \left\| \begin{matrix} -\gamma_{*1}^T \\ E - (\gamma_0 + 1)^{-1}\gamma_{*1}\gamma_{*1}^T \end{matrix} \right\|$$

Этот шаг можно интерпретировать как введение обобщенных координат $q_1$, обусловленных только первым уравнением системы (1.1) (размерность вектора $q_1$ на единицу меньше размерности вектора $y$). Соотношение между обобщенными скоростями выглядит так: $y^\cdot = V_{21}q_1^\cdot$, $q_1^\cdot = V_{21}^T y^\cdot$. В новых координатах правое уравнение (1.4) принимает вид

$$\Gamma V_{21} q^\cdot = 0 \tag{4.1}$$

Приняв во внимание, что $\Gamma_1 V_{21} = 0$, получим следующую структуру (4.1):

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ D_1 \end{matrix} \right\| q_1^\cdot = 0,\quad D_1 = \left\| \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{matrix} \right\| V_{21} = \left\| \begin{matrix} D_{11} \\ \vdots \\ D_{1r} \end{matrix} \right\|,\quad r = m - 1$$

Следовательно, система уравнений (1.4) переходит в систему $D_1 q_1^\cdot = 0$. Количество уравнений, в которой (количество строк $D_{1j}$ $(j = 1,...,m - 1)$ матрицы $D_1$) на единицу меньше, чем количество строк у матрицы $\Gamma$. Далее, на втором шаге, определим вектор $\gamma_2$ и сформируем матрицу $V_{22}$:

$$\gamma_2 = \frac{1}{(D_{11}D_{11}^T)^{1/2}} D_{11}^T = \left\| \begin{matrix} \gamma_{02} \\ \gamma_{*2} \end{matrix} \right\|,\quad V_{22} = \left\| \begin{matrix} -\gamma_{*2}^T \\ E - (\gamma_{02} + 1)^{-1}\gamma_{*2}\gamma_{*2}^T \end{matrix} \right\|$$

Определим матрицу $D_2^T = V_{22}^T \|D_{12}^T \ldots D_{1r}^T\|$ и перейдем к следующему шагу, если $m > 2$. Повторив этот процесс $m$ раз, получим в конечном итоге

$$y^\cdot = V_{21}V_{22}\ldots V_{2m}q_m^\cdot,\quad q_m^\cdot = V_{2m}^T\ldots V_{21}^T y^\cdot$$

т. е. искомая матрица $V_2 = V_{21}...V_{2m}$

Таким образом, получив аналитически или численно матрицу $F = \partial C(y)/\partial y$ и определив, в соответствии с описанным алгоритмом, матрицу $\partial y/\partial q = V_{21}...V_{2m}$, можно далее использовать описанный в [1] алгоритм постро-

ения математической модели механизма, содержащего замкнутые кинематические цепи.

5. **Пример.** Изложенную выше процедуру введения обобщенных координат проиллюстрируем на примере плоского движения математического маятника. Материальная точка единичной массы, прикрепленная к невесомому стержню длины $l$, движется в плоскости $y_1y_2$ (ось $y_1$ направлена вверх). Выражение для кинетической энергии $T$, потенциальной энергии $\Pi$ и уравнение связи $C(y)$ можно записать так

$$2T = y_1^{\cdot 2} + y_2^{\cdot 2}, \quad \Pi = gy_1, \quad C(y) = \frac{y_1^2}{l^2} + \frac{y_2^2}{l^2} - 1 = 0$$

Согласно (3.1), (3.2) имеем $\gamma^T = \|\bar{y}_1\bar{y}_2\|$; $\bar{y}_1 = y_1/l$, $\bar{y}_2 = y_2/l$:

$$V_2 = \left\| \begin{matrix} -\bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{matrix} \right\|, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \left\| \begin{matrix} -\bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{matrix} \right\|, \quad y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|$$

Из (2.4) следует, что

$$y^{\cdot} = \left\| \begin{matrix} -\bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{matrix} \right\| q^{\cdot}, \quad q^{\cdot} = \|-\bar{y}_2\bar{y}_1\| \, y^{\cdot}$$

Введя таким образом обобщенную скорость $q^{\cdot}$, имеем

$$2T = \|-\bar{y}_2\bar{y}_1\| \left\| \begin{matrix} -\bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 \end{matrix} \right\| q^{\cdot 2} = q^{\cdot 2}$$

$$\partial\Pi/\partial q = (\partial\Pi/\partial y)\,(\partial y/\partial q) = -g\bar{y}_2$$

т. е. уравнение Лагранжа выглядит так $q^{\cdot\cdot} - g/ly_2 = 0$. Дополнив это уравнение соотношениями, связывающими обобщенные скорости, получим систему уравнений, описывающих движение точки

$$q^{\cdot} = w, \quad w^{\cdot} = (g/l)\, y_2, \tag{5.1}$$

$$y_1^{\cdot} = -(w/l)\, y_2, \quad y_2^{\cdot} = (w/l)\, y_1$$

Начальные условия для интегрирования этой системы будут следующими: $y_1(0)$, $y_2(0)$, $w(0) = q^{\cdot}(0) = \|-\bar{y}_2(0)\bar{y}_1(0)\|\, y^{\cdot}(0)$; в качестве начального условия $q(0)$ можно выбрать любую величину, например, $q(0) = 0$. Интегрируя эту систему, найдем $q(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, т. е. получим в параметрической форме зависимость декартовых координат $y_1$, $y_2$ от обобщенной координаты $q$. В данном примере $q$ имеет смысл дуговой координаты точечной массы. Возрастание этой координаты происходит при движении маятника по часовой стрелке.

Можно проверить, что решение системы (5.1) не нарушает условия связи $C(y) = 0$. Действительно

$$\frac{d}{dt} C(y) = \frac{d}{dt}(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 - 1) = \frac{1}{l^2}(y_1y_1^{\cdot} +$$

$$+ y_2y_2^{\cdot}) = \frac{1}{l^3}(-y_1y_2w - y_2y_1w) = 0$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
2. *Wakker M. W.* Adaptive control of manipulators containing closed kinematic loops // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. V. 6. No. 1. P. 10—19.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Киев

Поступила в редакцию
25.V.1991