МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 531.383

© 1993 г. Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. Ч. 2

В рамках кватернионной теории регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских уравнений возмущенного центрального движения [1] построены обобщенные кватернионные регулярные уравнения пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо — Штифеля, регулярные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi = -a_1r^{-1} - a_2r^{-2} - a_3r^{-3} - a_4r^{-4}$ (a_i = const, r — расстояние от центра центрального силового поля) в осцилляторной и нормальной формах, получены системы уравнений возмущенного центрального движения, содержащие кватернионные уравнения ориентации возмущенной орбиты в осцилляторной или нормальной форме и обобщенное уравнение Бинэ. Дан сравнительный анализ предложенных уравнений.

1. Кватернионные уравнения возмущенного центрального движения. Рассматриваем движение материальной точки M с массой m в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi = \Pi(r)$, являющимся произвольной функцией расстояния r точки M от центра O этого силового поля. Полагаем, что на материальную точку действуют возмущающие силы: сила, обусловленная наличием возмущающего силового поля с потенциалом $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r})$, являющимся произвольной функцией времени t и радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки M, проводимого из центра O, и сила, сообщающая материальной точке M возмущающее ускорение $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$, являющееся произвольной функцией времени t, радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

Для построения кватернионных уравнений возмущенного центрального движения с требуемыми (в частности, регулярными) свойствами используем следующую совокупность кватернионных уравнений и соотношений с регуляризующими функциями [1].

Основное кватернионное уравнение для обобщенных переменных Кустаанхеймо — Штифеля u_j (u-переменных) в осцилляторной форме

$$2\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + (r\varkappa)^3\alpha\mathbf{u} = (r\varkappa)^3\left[\mathbf{Q} - \left(2r\frac{d\varkappa}{dr} + \varkappa\right)P_1\mathbf{u}\right] \tag{1.1}$$

$$\alpha = 2r\left[\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2}\right]\frac{d^2\varkappa}{dr^2} + 2\left[\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m}\frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2}\right]\frac{d\varkappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3}\varkappa \tag{1.2}$$

Уравнение для расстояния r:

$$\frac{d^2r}{d\tau_1^2} + \frac{1}{m}\left[\frac{d(\nu_1^2\Pi)}{dr} - h\frac{d\nu_1^2}{dr}\right] + \frac{1}{2}c^2\frac{d}{dr}(r^{-2}\nu_1^2) = \nu_1^2P_1 \tag{1.3}$$

Уравнения для переменной h, являющейся энергией материальной точки при $\Pi^* = 0$, полной энергии h^* и модуля c вектора момента скорости материальной точки

$$dh/dt = m\,\mathrm{sqal}\,(\mu \circ \mathrm{Q}) \tag{1.4}$$

$$dh^*/dt = \partial \Pi^*/\partial t + m\,\mathrm{sqal}\,(\mu \circ \mathrm{q}), \quad h^* = h + \Pi^* \tag{1.5}$$

$$dc^2/dt = 4r^3\,\mathrm{sqal}\,(d\lambda/dt \circ \mathrm{Q}), \quad dc/dt = 2r^3c^{-1}\,\mathrm{sqal}\,\left(\frac{d\,\lambda}{dt} \circ \mathrm{Q}\right) \tag{1.6}$$

Уравнения для времени

$$dt/d\tau = \nu\,(r), \quad dt/d\tau_1 = \nu_1\,(r), \quad d\tau/d\tau_1 = \nu_1\,(r)/\nu\,(r) \tag{1.7}$$

Связь обобщенных переменных Кустаанхеймо — Штифеля u_j с параметрами Родрига — Гамильтона λ_j:

$$\lambda = \varkappa\,(r)\,\bar{\mathrm{u}}; \quad \lambda_0 = \varkappa\,(r)\,u_0, \quad \lambda_k = -\varkappa\,(r)\,u_k \quad (k = 1,\,2,\,3) \tag{1.8}$$

Обобщенное преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (u-преобразование): для расстояния

$$[\varkappa\,(r)\,]^2\,(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1 \tag{1.9}$$

для декартовых координат x_k

$$\mathrm{r}_X = x_1\mathrm{i}_1 + x_2\mathrm{i}_2 + x_3\mathrm{i}_3 = r\,\lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\lambda} = r\,[\varkappa\,(r)\,]^2\,\bar{\mathrm{u}} \circ \mathrm{i}_1 \circ \mathrm{u} \tag{1.10}$$

для проекций скорости

$$\mathrm{v}_X = \frac{d\mathrm{r}_X}{dt} = x_1^{\cdot}\mathrm{i}_1 + x_2^{\cdot}\mathrm{i}_2 + x_3^{\cdot}\mathrm{i}_3 = \lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\mu} = \mu \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\lambda} \tag{1.11}$$

$$\mu = r^{\cdot}\,\lambda + 2r\lambda^{\cdot}, \quad \lambda^{\cdot} = \varkappa^{\cdot}\bar{\mathrm{u}} + \varkappa\bar{\mathrm{u}}^{\cdot}$$

для возмущающих сил

$$\mathrm{Q} = \mathrm{q} - \frac{r^{-1/2}}{2m}\,\frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathrm{u}^*}, \quad P_1 = \varkappa\,\mathrm{sqal}\,(\bar{\mathrm{u}} \circ \mathrm{Q})$$

$$\mathrm{q} = -\varkappa\mathrm{i}_1 \circ \mathrm{u} \circ \mathrm{p}_X, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathrm{u}^*} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_0^*} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_k^*}\,\mathrm{i}_k \tag{1.12}$$

$$\Pi^* = \Pi^*\,(t,\,\mathrm{r}_X) = \Pi^*\,(t,\,\bar{\mathrm{u}}^* \circ \mathrm{i}_1 \circ \mathrm{u}^*), \quad \mathrm{u}^* = r^{1/2}\varkappa\mathrm{u}$$

$$\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_X\,(t,\,\mathrm{r}_X,\,\mathrm{r}^{\cdot}_X), \quad \mathrm{r}_X = r\varkappa^2\,\bar{\mathrm{u}} \circ \mathrm{i}_1 \circ \mathrm{u}$$

Здесь $\mathrm{u} = u_0 + u_1\mathrm{i}_1 + u_2\mathrm{i}_2 + u_3\mathrm{i}_3$ — кватернионная переменная, связанная первым соотношением (1.8) с кватернионом λ, характеризующим ориентацию в инерциальном базисе вращающейся системы координат Y, в которой записаны уравнения движения материальной точки; $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [2]; a_ξ ($\xi = X,\,Y$) — отображения вектора a на базис ξ (X — базис с началом в точке O, движущийся относительно инерциального базиса поступательно); символ $\circ$ означает кватернионное умножение, верхняя черта — сопряженный кватернион; точка сверху — производную по времени t (производная от кватерниона вычисляется в предположении неизменности ортов $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$), sqal $(\cdots)$ — скалярная часть кватерниона $(\cdots)$.

Уравнения (1.1)—(1.7) содержат регуляризующие функции $\varkappa, \nu, \nu_1$, являющиеся функциями расстояния r. Выбор регуляризующих функций осуществляем, пользуясь условиями [1]:

$$r\varkappa = \nu^{1/2} \tag{1.13}$$

$$(r\varkappa)^3 \alpha = (r\varkappa)^3 \left\{ 2r \left[\frac{2}{m} \left(h - \Pi \right) - \frac{c^2}{r^2} \right] \frac{d^2\varkappa}{dr^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \left[\frac{4}{m} (h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right] \frac{d\varkappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \varkappa \right\} = \text{const} \tag{1.14}$$

$$h = \text{const}, \quad c = \text{const}$$

$$\nu_1^2 \left(h - \Pi(r) - {}^1\!/\!{}_2 mc^2/r^2\right) = {}^1\!/\!{}_2 c_1^* r^2 + c_2^* r + c_3^* \tag{1.15}$$

$$c = \text{const}, \quad c_k^* = \text{const}$$

Равенства (1.13), (1.14) являются необходимыми и достаточными условиями приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения (1.1): при выборе регуляризующих функций $\varkappa$ и ν для заданного вида потенциала $\Pi = \Pi(r)$ в соответствии с равенствами (1.13), (1.14) это уравнение принимает вид уравнения движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае невозмущенного центрального движения (когда $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$) в силовом поле с потенциалом $\Pi(r)$ одночастотные гармонические колебания (при $(r\varkappa)^3\alpha > 0$).

Равенство (1.15) является необходимым и достаточным условием приводимости к осцилляторному виду уравнения (1.3) для расстояния r [3].

Помимо дифференциальных уравнений второго порядка для получения уравнений возмущенного центрального движения с необходимыми свойствами будем использовать также кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной форме, имеющие вид [1]:

в отображениях на вращающийся базис Y:

$$\mathbf{c}_Y^{\cdot} = -r \operatorname{vect} (\mathbf{Q}^* \circ \lambda), \quad 2\lambda^{\cdot} = r^{-2}\lambda \circ \mathbf{c}_Y \tag{1.16}$$

$$\mathbf{c}_Y = c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{c}_Y^{\cdot} = c_2^{\cdot}\mathbf{i}_2 + c_3^{\cdot}\mathbf{i}_3$$

в отображениях на инерциальный базис (базис X):

$$\mathbf{c}_X^{\cdot} = -r \operatorname{vect} (\lambda \circ \mathbf{Q}^*), \quad 2\lambda^{\cdot} = r^{-2}\mathbf{c}_X \circ \lambda \tag{1.17}$$

$$\mathbf{c}_X = c_1^+\mathbf{i}_1 + c_2^+\mathbf{i}_2 + c_3^+\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{c}_X^{\cdot} = c_1^{+\cdot}\, \mathbf{i}_1 + c_2^{+\cdot}\, \mathbf{i}_2 + c_3^{+\cdot}\, \mathbf{i}_3$$

Здесь vect $(\cdots)$ — векторная часть кватерниона $(\cdots)$, c_k, c_k^+ — проекции вектора $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента скорости материальной точки на оси Y_k и X_k; кватернион $\mathbf{Q}^*$ определяется формулами

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q} - \frac{r^{-1}}{2m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{\lambda}}, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_0} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_k} \mathbf{i}_k$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}_1 \circ \bar{\lambda} \circ \mathbf{p}_X, \quad \Pi^* = \Pi^* (t, \mathbf{r}_X) = \Pi^* (t, r\lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \bar{\lambda}) \tag{1.18}$$

$$\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_X (t, \mathbf{r}_X, \mathbf{r}_X^{\cdot}), \quad \mathbf{r}_X = r\lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \bar{\lambda}$$

Уравнения (1.16) и (1.17) в общем случае необходимо рассматривать совместно с уравнением для расстояния r:

$$r^{\cdot\cdot} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} \frac{d\Pi(r)}{dr} = \operatorname{sqal} (\lambda \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \tag{1.19}$$

$$c^2 = c_2^2 + c_3^2 = (c_1^+)^2 + (c_2^+)^2 + (c_3^+)^2$$

При использовании кватернионных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки (1.16)—(1.19) координаты материальной точки и проекции ее скорости находятся по формулам

$$\mathbf{r}_X = r\lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\lambda}$$

$$\mathbf{v}_X = \lambda \circ \mathbf{v}_Y \circ \overline{\lambda}, \quad \mathbf{v}_Y = \mathbf{i}_1 \circ (r^{\cdot} - r^{-1}c_Y) \tag{1.20}$$

$$\mathbf{v}_X = r^{-1}\mathbf{r}_X \circ (r^{\cdot} - r^{-1}c_X), \quad \mathbf{v}_Y = \overline{\lambda} \circ \mathbf{v}_X \circ \lambda \tag{1.21}$$

Формулы (1.20) используют отображение вектора **c** на базис Y, а (1.21) — отображение вектора **c** на базис X.

2. Регулярные уравнения возмущенного центрального движения. Рассмотрим задачу регуляризации — устранения особенности, возникающей в дифференциальных уравнениях возмущенного центрального движения материальной точки при ее прохождении вблизи центра O центрального силового поля (когда расстояние r близко к нулю) с потенциалом вида

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3} - \ldots \quad (a_i = \mathrm{const}) \tag{2.1}$$

Для получения регулярных уравнений используем кватернионные уравнения (1.1)—(1.7) возмущенного центрального движения, выбирая соответствующим образом фигурирующие в них регуляризующие функции.

Положим $\varkappa(r) = r^{-1/2}$. Тогда в соответствии с (1.13) $\nu(r) = r$, а в соответствии с (1.14):

$$(r\varkappa)^3\, \alpha = \frac{1}{m}\left[\frac{d\,(r\Pi)}{dr} - h\right] \tag{2.2}$$

Из (1.14), (2.2), (1.15) следует, что при выборе регуляризующих функций в виде

$$\varkappa(r) = r^{-1/2}, \; \nu_1(r) = \nu(r) = r \tag{2.3}$$

условия приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения (1.1) и уравнения (1.3) для расстояния r выполняются лишь в случае кеплеровского движения, когда

$$\Pi(r) = -m\mu r^{-1} \quad (\mu = \mathrm{const}) \tag{2.4}$$

Подставляя равенства (2.2)—(2.4) в уравнения (1.1)—(1.12), получаем для возмущенного кеплеровского движения систему уравнений (2.5)—(2.8), содержащую переменную h, и систему уравнений (2.9)—(2.11), (2.8), содержащую полную энергию h^*:

$$2d^2\mathbf{u}/d\tau^2 - h\mathbf{u}/m = r\mathbf{Q}' \tag{2.5}$$

$$d^2r/d\tau^2 - 2hr/m - \mu = r\,\mathrm{sqal}\,(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}') \tag{2.6}$$

$$dh/d\tau = 2m\,\mathrm{sqal}\,(d\mathbf{u}/d\tau \circ \mathbf{Q}'), \quad dt/d\tau = r \tag{2.7}$$

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{q}' - \frac{1}{2m}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{u}}, \quad \mathbf{q}' = -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_X$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{p}_X = \mathbf{p}_X(t, \mathbf{r}_X, \mathbf{v}_X) \tag{2.8}$$

$$r = \mathbf{u} \circ \overline{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\mathbf{r}_X = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}, \quad \bar{\lambda} = r^{-1/2}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{v}_X = \dot{\mathbf{r}}_X = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \dot{\mathbf{u}} = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ (d\mathbf{u}/d\tau)$$

$$h = 2mr \sum_{j=0}^{3} (\dot{u}_j)^2 - m\,\mu r^{-1} = mr^{-1} \left[2\sum_{j=0}^{3} (du_j / d\tau)^2 - \mu \right]$$

$$2\,\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{h^*}{m}\,\mathbf{u} = r\mathbf{q}' - \frac{1}{2m}\,\frac{\partial\,(r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2h^*}{m}\,r - \mu = r\left[-\frac{2}{m}\,\Pi^* + \operatorname{sqal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}') \right] \tag{2.10}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r\,\frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2m\,\operatorname{sqal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}' \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r \tag{2.11}$$

Системы уравнений (2.5)—(2.8) и (2.9)—(2.11), (2.8) являются обобщенными кватернионными формами регулярных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля пространственной задачи двух тел [4]. Неизвестными в них являются время t, переменные Кустаанхеймо — Штифеля u_j, расстояние r, величина h или полная энергия h^*. Свойства регулярных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля обсуждались в [1], здесь отметим лишь еще одно положительное свойство этих уравнений: в силу равенства $r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ кватернионные уравнения (2.5) и (2.9) в переменных Кустаанхеймо — Штифеля u_j могут рассматриваться независимо от уравнения для расстояния r.

Регулярные уравнения Кустаанхеймо — Штифеля содержат в качестве одной из переменных величину h или полную энергию h^*. Иной, чем в случае Кустаанхеймо — Штифеля, выбор регуляризующих функций, а также введение наряду с переменной h^* новой переменной c^2 позволяют получить более общие регулярные уравнения.

Положим $\varkappa = 1$, $\nu_1(r) = \nu(r)$. В соответствии с (1.13) $\nu = \nu_1 = r^2$, а левая часть условия (1.14) принимает вид

$$(r\varkappa)^3\,\alpha = \tfrac{1}{2}c^2 \tag{2.12}$$

Так как для невозмущенного центрального движения $c = \mathrm{const}$, то из (2.12) следует, что при выборе регуляризующих функций в виде

$$\varkappa = 1,\ \nu = r^2 \tag{2.13}$$

условие (1.14) приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения (1.1) выполняется для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Однако условие (1.15) приводимости к осцилляторному виду уравнения (1.3) для расстояния r при $\nu_1 = \nu = r^2$ не выполняется.

Подставляя равенства (2.12), (2.13) и равенство $\nu_1 = r^2$ в уравнения (1.1), (1.3), (1.5)—(1.12), получаем для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ систему уравнений возмущенного центрального движения относительно неизвестных параметров Родрига — Гамильтона λ_j, расстояния r, времени t и переменных h^*, c^2:

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} + \frac{c^2}{4}\,\lambda = \frac{r^3}{2}\left[\bar{\mathbf{Q}}^* - \operatorname{sqal}(\lambda \circ \mathbf{Q}^*)\,\lambda \right] \tag{2.14}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 r + \frac{1}{m}\left[\frac{d}{dr}(r^4\Pi) - 4\,(h^* - \Pi^*)\,r^3\right] = r^4\left[\operatorname{sqal}(\lambda \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\,\frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right] \tag{2.15}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r^2 \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \operatorname{sqal}(\mu^* \circ \mathrm{q}), \quad \mu^* = \frac{dr}{d\tau}\lambda + 2r\frac{d\lambda}{d\tau} \tag{2.16}$$

$$dc^2/d\tau = 4r^3 \operatorname{sqal}(d\lambda/d\tau \circ \mathrm{Q}^*) \tag{2.17}$$

$$dt/d\tau = r^2 \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Q}^* = \mathrm{q} - \frac{1}{2mr}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{\lambda}}, \quad \mathrm{q} = -\mathrm{i}_1 \circ \bar{\lambda} \circ \mathrm{p}_X \tag{2.19}$$

$$\bar{\mathrm{Q}}^* = \bar{\mathrm{q}} - \frac{1}{2mr}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda}, \quad \bar{\mathrm{q}} = -\mathrm{p}_X \circ \lambda \circ \mathrm{i}_1$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathrm{r}_X), \quad \mathrm{p}_X = \mathrm{p}_X(t, \mathrm{r}_X, \mathrm{v}_X)$$

$$\mathrm{r}_X = r\lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\lambda}, \quad \mathrm{v}_X = r^{-2}\lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\mu}^*$$

Для невозмущенного центрального движения имеет место интеграл площадей

$$r^2 d\varphi/dt = c, \quad c = \mathrm{const} \tag{2.20}$$

где φ — полярная координата, связанная с истинной аномалией φ^* соотношением $\varphi^* = \varphi + \mathrm{const}$.

Из сопоставления (2.20) с (2.18) следует, что

$$d\varphi = c\,d\tau \tag{2.21}$$

Переходя в уравнениях (2.14)—(2.18) к новой независимой переменной φ с помощью дифференциальных соотношений (2.20), (2.21) и учитывая, что в случае возмущенного движения $c \neq \mathrm{const}$, получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{dc^2}{d\varphi}\frac{d\lambda}{d\varphi} - r^3\left(\bar{\mathrm{Q}}^* - \operatorname{sqal}(\lambda \circ \bar{\mathrm{Q}}^*)\lambda\right)\right] \tag{2.22}$$

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} + r + \frac{1}{mc^2}\left[\frac{d}{dr}(r^4\Pi) - 4(h^* - \Pi^*)r^3\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{dc^2}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} + r^4\left(\operatorname{sqal}(\lambda \circ \mathrm{q}) - \frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial r}\right)\right] \tag{2.23}$$

$$\frac{dh^*}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}\frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \operatorname{sqal}(\mu^{**} \circ \mathrm{q}), \quad \mu^{**} = \frac{dr}{d\varphi}\lambda + 2r\frac{d\lambda}{d\varphi} \tag{2.24}$$

$$dc^2/d\varphi = 4r^3 \operatorname{sqal}\left[(d\lambda/d\varphi) \circ \mathrm{Q}^*\right] \tag{2.25}$$

$$dt/d\varphi = r^2/c, \quad c \neq 0 \tag{2.26}$$

$$\mathrm{r}_X = r\lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\lambda}, \quad \mathrm{v}_X = cr^{-2}\lambda \circ \mathrm{i}_1 \circ \bar{\mu}^{**} \tag{2.27}$$

Здесь кватернионы Q^*, $\bar{\mathrm{Q}}^*$, q определяются соотношениями (2.19), (2.27).

Отметим, что случай прямолинейного движения точки (когда $c = 0$) при использовании уравнений (2.22)—(2.26) должен быть исключен из рассмотрения, поскольку для него эти уравнения не определены.

Основное достоинство полученных систем уравнений (2.14)—(2.18) и (2.22)—(2.26) заключается в том, что каждое из кватернионных уравнений (2.14), (2.22) в параметрах Родрига — Гамильтона λ_j, входящих в состав этих систем, является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ (в том числе с потенциалом вида (2.1)) при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения. Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения каждое из кватернионных уравнений (2.14), (2.22) становится эквивалентным уравнению движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора, соответствующего в этом случае уравнению (2.14), равна $c/2$ и ее значение зависит от типа движения. Частота же колебаний осциллятора, соответствующего уравнению (2.22), имеет одинаковое для всех типов движения значение, равное $1/2$, что является удобным для решения ряда задач. Кватернион λ в случае невозмущенного центрального движения характеризует собой ориентацию орбиты в пространстве. Поэтому уравнение (2.14) или (2.22) является регулярным кватернионным уравнением мгновенной ориентации орбиты в пространстве для возмущенного центрального движения материальной точки (регулярным кватернионным уравнением ориентации возмущенной орбиты в пространстве).

Уравнения (2.16), (2.24) для полной энергии h^* и уравнения (2.17), (2.25) для переменной c^2 также являются регулярными для любого вида потенциала $\Pi(r)$ (при том же условии конечности возмущающих сил). Уравнения же для расстояния (2.15), (2.23) регулярны лишь для потенциала Π вида

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3} - a_4 r^{-4} \quad (a_i = \mathrm{const}) \tag{2.28}$$

Поэтому системы уравнений (2.14)—(2.18), (2.22)—(2.26) в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения в силовом поле с потенциалом (2.28). Эти уравнения сложнее уравнений в переменных Кустаанхеймо — Штифеля (2.5)—(2.7) или (2.9)—(2.11) поскольку содержат «лишнее» уравнение (2.15) или (2.23) для расстояния r (как уже отмечалось уравнения в переменных Кустаанхеймо — Штифеля могут рассматриваться независимо от уравнения для расстояния) и уравнение (2.17) или (2.25) для переменной c^2, к тому же уравнения для расстояния (2.15), (2.23) не являются линейными для невозмущенного кеплеровского движения. Однако уравнения в переменных Кустаанхеймо — Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ (при том же условии конечности возмущающих сил); кроме того, основное кватернионное уравнение (2.5) или (2.9) является нелинейным для невозмущенного движения в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$, за исключением потенциала $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$, в отличие от кватернионных уравнений (2.14), (2.22).

Отметим, что если возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^* не зависят явно от времени t, то уравнения (2.14)—(2.17) ((2.22)—(2.25)) могут рассматриваться независимо от уравнения для времени (2.18) ((2.26)). Кроме того, если $\mathbf{p} = 0$, а Π^* не зависит явно от времени t, то $h^* = \mathrm{const}$ и уравнения (2.16), (2.24) выпадают из рассмотрения.

Регулярные уравнения возмущенного центрального движения можно получить в нормальной кватернионной форме, если использовать уравнения (1.16) или (1.17). Так, переходя в уравнениях (1.16) к новой независимой переменной τ по формуле $dt = r^2 d\tau$, получаем систему уравнений возмущенного движения

$$d\mathbf{c}_Y / d\tau = -r^3 \,\mathrm{vect}\,(\mathbf{Q}^* \circ \lambda), \quad \mathbf{c}_Y = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \tag{2.29}$$

$$2 d\lambda / d\tau = \lambda \circ \mathbf{c}_Y, \quad dt/d\tau = r^2$$

а переходя к независимой переменной φ по формуле (2.20) (и полагая при этом $c \neq \mathrm{const}$), получаем уравнения

$$\frac{d\mathbf{c}_Y}{d\varphi} = -\frac{r^3}{c}\,\mathrm{vect}\,(\mathbf{Q}^* \circ \lambda), \quad c = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \tag{2.30}$$

$$2\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{1}{c}\lambda \circ \mathbf{c}_Y, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad c \neq 0$$

Систему уравнений (2.29) необходимо дополнить уравнениями (2.15), (2.16) и соотношениями (2.19), а систему уравнений (2.30) — уравнениями (2.23), (2.24) и соотношениями (2.19), (2.27). Системы уравнений (2.29), (2.15), (2.16) и (2.30), (2.23), (2.24), также как и системы уравнений (2.14)—(2.18) и (2.22)—(2.26), являются регулярными для возмущенного движения в центральном силовом поле с потенциалом вида (2.28). Однако порядок этих систем равен десяти (такой же порядок имеют системы уравнений в переменных Кустаанхеймо — Штифеля), что на три единицы меньше порядка систем уравнений (2.14)—(2.18), (2.22)—(2.26), содержащих кватернионные уравнения осцилляторного типа.

3. Уравнения возмущенного центрального движения, содержащие обобщенное уравнение Бинэ. Системы уравнений (2.14)—(2.18), (2.22)—(2.26), как уже отмечалось, имеют общий недостаток: входящее в эти системы уравнение для расстояния r (2.15) или (2.23) не является линейным ни в общем случае невозмущенного центрального движения, ни в важном частном случае невозмущенного кеплеровского движения, что затрудняет их непосредственное использование в аналитических исследованиях. Этот недостаток для кеплеровского движения может быть устранен за счет введения вместо расстояния r новой переменной $\rho = 1/r$, что предполагает исключение из рассмотрения тех движений точки, при которых происходит соударение с центральной массой.

Переходя в уравнениях (2.22)—(2.27), (2.19) к новой переменной $\rho = 1/r$, получаем систему

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{dc^2}{d\varphi}\frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{1}{\rho^3}(\overline{\mathbf{Q}}^* - \mathrm{sqal}\,(\lambda \circ \mathbf{Q}^*)\,\lambda)\right] \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho + \frac{1}{mc^2}\frac{d\Pi\,(1/\rho)}{d\rho} = -\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\frac{dc^2}{d\varphi}\frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{sqal}\,(\lambda \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\,(1/\rho)}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$\frac{dc^2}{d\varphi} = \frac{4}{\rho^3}\,\mathrm{sqal}\left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \circ \mathbf{Q}^*\right) \tag{3.3}$$

$$dt/d\varphi = 1/(c\,\rho^2), \quad c \neq 0, \quad \rho = 1/r \tag{3.4}$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q} - \frac{\rho}{2m}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\overline{\lambda}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i}_1 \circ \overline{\lambda} \circ \mathbf{p}_X \tag{3.5}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{p}_X = \mathbf{p}_X(t, \mathbf{r}_X, \mathbf{v}_X)$$

$$\mathbf{r}_X = \rho^{-1}\lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\lambda}, \quad \mathbf{v}_X = c\lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ (2\rho\,(d\overline{\lambda}/d\varphi) - \overline{\lambda}\,(d\rho/d\varphi))$$

Эта система, содержащая обобщенное уравнение Бинэ (3.2), проще системы (2.22)—(2.26), поскольку в нее не входит уравнение для полной энергии h^*. К тому же уравнение (3.2) в случае невозмущенного кеплеровского движения, когда $\Pi = -a_1\,\rho$, принимает вид уравнения движения гармонического осциллятора, в то время как уравнение (2.23) для расстояния r в этом случае остается существенно нелинейным. Поэтому в ряде случаев аналитического и численного исследования возмущенного движения система (3.1)—(3.4) предпочтительнее системы (2.22)—(2.26).

Отметим также следующие положительные свойства системы (3.1)—(3.5).

В случае невозмущенного кеплеровского движения аналитическое универсальное решение этой системы уравнений (т. е. решение, форма которого не зависит от типа движения) строится в элементарных (тригонометрических) функциях, в то время как для построения универсального решения системы уравнений Кустаанхеймо — Штифеля (2.5)—(2.7) в этом случае приходится вводить специальные функции Штумпфа [4]. Это обстоятельство является немаловажным при аналитическом и численном исследовании возмущенных движений, так как тип орбиты может меняться под влиянием возмущающих сил, действующих в течение конечного промежутка времени. Кроме того, система (3.1)—(3.5) позволяет получить уравнения возмущенного движения в медленно изменяющихся (оскулирующих) кватернионных элементах, которые не содержат тригонометрических функций от медленных переменных, снижающих эффективность использования ЭВМ, не имеют связанных с ними особенностей и пригодны для исследования любого возмущенного центрального движения, в то время как область применения уравнений возмущенного движения в оскулирующих кватернионных элементах, получаемых из уравнений (2.5)—(2.7), ограничивается областью возмущенного эллиптического кеплеровского движения (когда $h < 0$).

Указанные свойства уравнений (3.1)—(3.5) обусловливаются тем, что кватернионное уравнение (3.1) для параметров Родрига — Гамильтона и уравнение (3.2) для расстояния эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов для всех типов невозмущенного кеплеровского движения: эллиптического, параболического, гиперболического. Более того, уравнение (3.1) эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора для произвольного невозмущенного центрального движения. Уравнения же Кустаанхеймо — Штифеля (2.5), (2.6) эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов лишь для эллиптического движения, когда $h < 0$ (для параболического движения $h = 0$, а для гиперболического $h > 0$).

К недостаткам системы (3.1)—(3.5) следует отнести то, что она, в отличие от систем, рассмотренных в п. 2, не является регулярной и не пригодна для исследования движения в окрестности начала координат. При этом следует иметь в виду, что эта нерегулярность обусловливается уравнением (3.2) для переменной ρ. Уравнения же (3.1), (3.3) являются регулярными для любого возмущенного центрального движения.

Отметим, что переход к новой переменной $\rho = 1/r$ в системе (2.30), (2.23), (2.24) приводит к системе уравнений, содержащей кватернионные уравнения в нормальной форме и обобщенное уравнение Бинэ. Эта система имеет такие же достоинства и недостатки по сравнению с системой (2.30), (2.23), (2.24) как и система (3.1)—(3.5) по сравнению с системой (2.22)—(2.26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1.//Изв. РАН. МТТ. 1993. №. 1. С. 20—30.

2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

3. *Беленький И. М.* Об одном методе униформизации решений в задачах центрального движения//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 34—41.

4. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin: Springer, 1971. 301 p.

Саратов

Поступила в редакцию
31.I.1991