МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 531.38

© 1993 г. Л. Ю. АНАПОЛЬСКИЙ, А. Л. ЛИТВИНОВ

О ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ УСПОКОЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для твердого тела с одной закрепленной точкой при действии лишь управляющего момента «малой» амплитуды, реализующего широтно-импульсную модуляцию по каждой компоненте его угловой скорости, решается задача успокоения, т. е. задача гашения модуля угловой скорости тела до минимально возможных значений. Специально изучается случай симметричного твердого тела.

1. Движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в проекциях на главные оси $Oxyz$ инерции тела относительно O задается [1] уравнениями Эйлера

$$J_1\omega_1^{\cdot} + (J_3 - J_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1^y \tag{1.1}$$

$$J_2\omega_2^{\cdot} + (J_1 - J_3)\,\omega_3\omega_1 = M_2^y,\quad J_3\omega_3^{\cdot} + (J_2 - J_1)\,\omega_1\omega_2 = M_3^y$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции мгновенной угловой скорости тела соответственно на оси x, y, z; J_1, J_2, J_3 — моменты инерции тела относительно этих осей; M_1^y, M_2^y, M_3^y — суммы моментов заданных сил, действующих на тело, относительно соответственно x, y, z.

Предполагается, что моменты всех заданных сил, кроме управляющих, относительно x, y, z равны нулю, а моменты управляющих сил определяются выражениями:

$$M_i^y = M_i u_i(\sigma_i(t)),\quad \sigma_i(t) = -\rho_i\omega_i(t)\quad (i = \overline{1, 3}) \tag{1.2}$$

где M_i, ρ_i — const > 0, нелинейная функция $u_i(\sigma_i(t))$ при $t \in [nT, (n+1)T)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), T — const > 0 задается соотношениями

$$u_i(\sigma_i(t)) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma_i(nT): t \in [nT, nT + \tau_i(n)) \\ 0: t \in [nT + \tau_i(n), (n+1)T) \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\sigma_i(nT)$ — значение величины $\sigma_i(t)$ при $t = nT$, $\tau_i(n) = \tau_i(\sigma_i(nT))$, а нелинейная функция $\tau_i(\sigma_i)$ является четной ($\tau_i(\sigma_i) = \tau_i(-\sigma_i)$) и

$$\tau_i(\sigma_i) = \begin{cases} 0: & |\sigma_i| < \Delta_i \\ \tau_i^{(0)}(\sigma_i): & |\sigma_i| \in [\Delta_i, T] \\ T: & |\sigma_i| \geq T \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь Δ_i – const > 0, $\tau_i^{(0)}(\sigma_i)$ — неубывающая положительная функция.

Уравнениями (1.2)—(1.4) задается функционирование i-го, $i = \overline{1, 3}$ регулятора, генерирующего M_i и осуществляющего широтно-импульсную модуляцию первого рода [2], при этом T называется периодом повторения импульсов, Δ_i — величиной зоны нечувствительности регулятора, $\tau_i(n)$, M_i — соответственно шириной и амплитудой управляющего импульса, ρ_i — параметром управления. Соотношения (1.2), (1.3) определяют прямоугольные управляющие импульсы ширины $0 \le \tau_i(n) \le T$, вырабатываемые i-м регулятором; (1.4) — закон широтно-импульсной модуляции первого рода. Предполагается, что все регуляторы синхронизированы: начальный момент времени и период повторения импульсов T одинаковы для всех регуляторов.

Согласно (1.2)—(1.4) величина M_i^y зависит лишь от переменной ω_i, поэтому система уравнений (1.1)—(1.4) замкнута и определяет закон изменения угловой скорости тела. Решается задача успокоения твердого тела, состоящая в выборе таких значений параметров управления ρ_i, при которых величина $\omega(t) = (\sum\omega_i^2(t))^{1/2}$ $(i = 1—3)$ убывает до минимально возможных значений, где $\omega_i(t)$ — некоторые указанные ниже решения системы (1.1)—(1.4).

2. Пусть для определенности $J_3 > J_1 > J_2$ и пусть величина $\varepsilon = \max M_i/J_i << 1$ — малый параметр, что означает малость относительной амплитуды управляющего импульса и реализуется в ряде задач управления движением летательных аппаратов. Для анализа системы (1.1)—(1.4) в указанном случае используется следующий вариант схемы метода малого параметра.

Вводя векторно-матричные обозначения $\theta = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $N = \operatorname{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $0 < k_i \le 1$, k_i – const, $i = \overline{1, 3}$, $u(\sigma(t)) = u_1(\sigma_1(t))$, $u_2(\sigma_2(t))$, $u_3(\sigma_3(t))$, уравнение (1.1) перепишем в виде

$$\omega^{\boldsymbol{\cdot}} + \theta^{-1}\omega \times \theta\omega = \varepsilon N u(\sigma(t)) \tag{2.1}$$

где ($\times$) — символ векторного произведения векторов. Пусть $n \ge 0$ — произвольное целое число, известны величины $\omega_i(nT)$, согласно (1.2)—(1.4) находятся $\sigma_i(nT)$, $\tau_i(n)$. Тогда для $t \in [nT, (n+1)T)$ решение уравнения (2.1) ищется в виде

$$\omega(t) = \omega^{(0)}(t) + \varepsilon\omega^{(1)}(t) + \ldots \tag{2.2}$$

где $\omega^{(k)}(t)$, $k \ge 0$ — подлежащие определению функции t.

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и сравнивая в полученных соотношениях члены одинакового порядка по ε, для отыскания $\omega^{(0)}(t)$ при $t \in [nT, (n+1)T)$ получается уравнение

$$\omega^{\boldsymbol{\cdot}(0)} + \theta^{-1}\omega^{(0)} \times \theta\omega^{(0)} = 0 \tag{2.3}$$

при начальных условиях $\omega^{(0)}(nT) = \omega(nT)$. Функция $\omega^{(1)}(t)$ при $t \in [nT, (n+1)T)$ определяется из уравнения

$$\omega^{\boldsymbol{\cdot}(1)} + \theta^{-1}[\omega^{(0)}(t) \times \theta\omega^{(1)} + \omega^{(1)} \times \theta\omega^{(0)}(t)] = Nu(\sigma(t)) \tag{2.4}$$

при начальных условиях $\omega^{(1)}(nT) = 0$, в котором $\omega^{(0)}(t)$ — указанное решение уравнения (2.3), а $u(\sigma(t)) = u(\sigma(nT))$ определяется соотношениями (1.2)—(1.4). Функции $\omega^{(k)}(t)$, $k \ge 2$ находятся как решения линейного уравнения

$$\omega^{\boldsymbol{\cdot}(k)} + \theta^{-1}[w^{(0)}(t) \times \theta\omega^{(k)} + \omega^{(k)} \times \theta\omega^{(0)}(t)] = \Phi^{(k)}(t) \tag{2.5}$$

при начальных условиях $\omega^{(k)}(nT) = 0$, где $\Phi^{(k)}(t)$, $k \ge 2$ — известные целые рациональные функции от $\omega^{(m)}(t)$ с постоянными коэффициентами, зависящие от тех $\omega^{(m)}(t)$, для которых $m < k$.

Уравнение (2.3) определяет движение твердого тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера и точно интегрируется в эллиптических функциях Якоби [1]. В результате единственным образом находится функция $\omega^{(0)}(t)$ при $t \in [nT, (n+1)T)$. Если $\omega^{(0)}(t)$ (соответственно $\omega^{(m)}(t)$, $0 < m \le k-1$) при $t \in [nT, (n+1)T)$ известны, то функция $\omega^{(1)}(t)$ (соответственно $\omega^{(k)}(t)$, $k \ge 2$) находится как единственное решение линейного неоднородного уравнения (2.4) (соответственно (2.5)) с периодическими коэффициентами при $t \in [nT, (n+1)T)$. Тем самым ряд (2.2) формально удовлетворяет системе (2.1), (1.2)—(1.4) при $t \in [nT, (n+1)T)$. Рассуждая известным образом, например, как в [3], доказывается утверждение.

Утверждение 1. Существует такая постоянная $\varepsilon_n > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n]$ решение для $t \in [nT, (n+1)T)$ системы (2.1), (1.2)—(1.4) представляется в виде абсолютно сходящегося при всех $t \in [nT, (n+1)T)$ ряда (2.2), члены которого определяются последовательно из уравнений (2.3)—(2.5).

Проводя доопределение

$$\omega((n+1)T) = \lim_{t \to (n+1)T-} \omega(t) \tag{2.6}$$

присущее «непрерывному припасовыванию», получается решение системы (2.1). (1.2)—(1.4) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n]$, $t \in [nT, (n+1)T]$. Выполнив для промежутка времени $[(n+1)T, (n+2)T]$ построения, аналогичные изложенным, можно при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n+1}]$, ε_{n+1} – const > 0 сконструировать решение (2.2) системы (2.1), (1.2)—(1.4) для всех $t \in [(n+1)T, (n+2)T]$ и т. д. Таким образом, при достаточно малых ε строится решение (2.2) системы (2.1), (1.2)—(1.4) для любого конечного промежутка времени $[nT, (n+m)T]$, $m \geq 1$, где функции $\omega^{(k)}(t)$, $k \geq 0$ определяются излагаемым выше способом.

Уравнение (2.3) при $t \in [nT, (n+1)T)$ интегрируется [1] так, что

$$\omega^{(0)}(t) = Q(t)\lambda_n, \quad \lambda_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \tag{2.7}$$

причем для полодий, охватывающих вершину оси y:

$$Q(t) = \operatorname{diag}(\operatorname{sn}[\sigma_n(t - nT) + \delta_n],\ \operatorname{dn}[\sigma_n(t - nI) + \delta_n],\ \operatorname{cn}[\sigma_n(t - nT) + \delta_n]) \tag{2.8}$$

$$\alpha_n = [J_3(J_3 - J_2)/J_1(J_1 - J_2)]^{1/2}\gamma_n \tag{2.9}$$

$$\sigma_n = [(J_3 - J_2)(J_1 - J_2)/J_1J_3]^{1/2}|\beta_n|, \quad k_n^2 = J_1(J_3 - J_1)\alpha_n^2/[J_2(J_3 - J_2)\beta_n^2]$$

$$\omega_1(nT) = \alpha_n \operatorname{sn}\delta_n, \quad \omega_2(nT) = \beta_n \operatorname{dn}\delta_n, \quad \omega_3(nT) = \gamma_n \operatorname{cn}\delta_n$$

$$\gamma_n^2 = [J_1(J_1 - J_2)/J_3(J_3 - J_2)]\omega_1^2(nT) + \omega_3^2(nT)$$

$$\beta_n^2 = \omega_2^2(nT) + [J_1(J_3 - J_1)/J_2(J_3 - J_2)]\omega_1^2(nT), \quad \beta_n < 0$$

для полодий, охватывающих вершину оси z:

$$Q(t) = \operatorname{diag}(\operatorname{sn}[\sigma_n(t - nT) + \delta_n],\ \operatorname{cn}[\sigma_n(t - nT) + \delta_n],\ \operatorname{dn}[\sigma_n(t - nT) + \delta_n]) \tag{2.10}$$

$$\beta_n = [J_1(J_3 - J_1)/J_2(J_3 - J_2)]^{1/2}\alpha_n, \quad \sigma_n = [(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)/J_1J_2]^{1/2}|\gamma_n|$$

$$k_n^2 = J_1(J_1 - J_2)\alpha_n^2/[J_3(J_3 - J_2)\gamma_n^2]$$

$$\omega_1(nT) = \alpha_n \operatorname{sn}\delta_n, \quad \omega_2(nT) = \beta_n \operatorname{cn}\delta_n, \quad \omega_3(nT) = \gamma_n \operatorname{dn}\delta_n$$

$$\alpha_n^2 = \omega_1^2(nT) + [J_2(J_3 - J_2)/J_1(J_3 - J_1)]\omega_2^2(nT) \tag{2.11}$$

$$\gamma_n^2 = \omega_3^2(nT) + [J_1(J_1 - J_2)/J_3(J_3 - J_2)]\omega_1^2(nT), \quad \gamma_n < 0$$

а для разделяющих полодий

$$Q(t) = \operatorname{diag}(\operatorname{th}[(t - nT) + \delta_n],\ \operatorname{ch}^{-1}[(t - nT) + \delta_n],\ \operatorname{ch}^{-1}[(t - nT) + \delta_n]) \tag{2.12}$$

$$\alpha_n = 2\,[J_2 J_3/\,(J_1 - J_2)\,(J_3 - J_1)\,]^{1/2},\quad \beta_n = [J_1 J_3\,/\,(J_3 - J_2)\,(J_1 - J_2)\,]^{1/2}$$

$$\gamma_n = -\,[J_1 J_2/\,(J_3 - J_2)\,(J_3 - J_1)\,]^{1/2}$$

где cn, sn, dn — эллиптические функции Якоби [4], а th, ch — гиперболические функции. При этом, очевидно, удовлетворяется начальное условие $\omega^{(0)}(nT) = \omega(nT)$.

Для $t \in [nT, (n+1)T)$ (2.4) — линейное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами, решение которого при начальном условии $\omega^{(1)}(nT) = 0$ представляется в виде

$$\omega^{(1)}(t) = W(t) \int\limits_0^{t-nT} W^{-1}(nT + t_1)\, Nu\,(\sigma\,(nT + t_1)\,)\, dt_1 \tag{2.13}$$

$W(t)$ — нормированная в точке $t = nT$ фундаментальная матрица решений уравнения (2.4) при $N = 0$, которая для случаев (2.8), (2.10), (2.12) находится явным образом. Аналогично (2.13) записывается решение каждого уравнения (2.5) для $t \in [nT, (n+1)T)$, $\omega^{(k)}(nT) = 0$, $k \geq 2$, причем, очевидно, так полученные функции $\omega^{(k)}(t)$, $k \geq 1$ являются гладкими функциями при всех $t \in [nT, (n+1)T)$. Доопределяя $\omega^{(k)}(t)$, $k \geq 0$ по правилу (2.6) согласно утверждению 1 получается решение (2.2) при всех $t \in [nT, (n+1)T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n]$. Следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n]$ имеем

$$\omega^{(0)}(\,(n+1)\,T) = Q\,(\,(n+1)\,T)\,\lambda_n \tag{2.14}$$

$$\omega^{(1)}(\,(n+1)\,T) = W(\,(n+1)\,T) \int\limits_0^T W^{-1}(nT + t_1)\, Nu\,(\sigma\,(nT + t_1)\,)\, dt_1$$

$$\omega^{(k)}(\,(n+1)\,T) = W(\,(n+1)\,T) \int\limits_0^T W^{-1}(nT + t_1)\, \Phi^{(k)}(nT + t_1)\, dt_1 \quad (k \geq 2)$$

и тем самым, по крайней мере в принципе, выводимо разностное уравнение

$$\omega((n+1)T) = F(\varepsilon, \omega(nT)) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2.15}$$

определяющее при достаточно малом ε динамику системы (2.1), (1.2)—(1.4), где функция F конструируется на основе (2.2) и (2.14).

3. В фазовом пространстве системы (2.1), (1.2)—(1.4) вводится множество «консервативных движений»

$$\Omega_* \doteq \{\omega \in R^3 : |\omega_i| < \Delta_i |\rho_i, i = \overline{1, 3}\} \tag{3.1}$$

(постоянные Δ_i, ρ_i определяются в (1.2), (1.4)), в котором $\tau_i(\sigma_i) = 0$, $M_i^y = 0$ и, следовательно, уравнения (1.1) имеют вид (2.3). Пусть M_* — наибольшее инвариантное подмножество системы (1.1)—(1.4), содержащееся в Ω_*, т. е. M_* — наибольшее подмножество Ω_*, такое, что если $\omega(0) \in M_*$, то $\omega(nT, \omega(0)) = \omega^{(0)}(nT, \omega(0)) \in M_*$ для всех $n \geq 0$, где $\omega(t, \omega(0))$ — решение системы (1.1)—(1.4), совпадающее при $\omega(0) \in M_*$ с решением $\omega^{(0)}(t, \omega(0))$ уравнения (2.3).

Исходная задача успокоения твердого тела теперь уточняется следующим образом: найти параметры управления ρ_i так, чтобы при достаточно малом ε решения $\omega(t)$ системы (2.1), (1.2)—(1.4) с начальными данными из некоторой области с ростом времени стремились к M_*.

Утверждение 2. Если Ω — ограниченное инвариантное множество относительно разностного уравнения

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ f\colon R^n \to R^n \tag{3.2}$$

ω — предельное множество каждого ограниченного решения которого инвариантно, $0 \in \Omega$ и существует непрерывная функция $V: R^n \to R^1$ такая, что

а) $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, $V(0) = 0$;

б) $\Delta^2 V(x) = V(f^2(x)) - V(x) < 0$ при $x \in H_l \backslash \Omega$; $H_l = \{x \in R^n : V(x) < l\} \supset \Omega$,

l — const > 0, $\Delta^2 V(x) = 0$ при $x \in \Omega$

в) $V(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$

Тогда каждое решение $x(n, x_0)$ уравнения (3.2) при $x_0 \in H_l$ с ростом n стремится к множеству Ω.

Доказательство. Пусть $x(n, x_0)$ — любое решение уравнения (3.2), проходящее при $n = 0$ через точку $x_0 \in H_l \backslash \Omega$. Это решение ограничено при всех $n \geq 0$, поскольку в силу условий б), в) утверждения $l > V(x_0) > V(x(2, x_0)) > \ldots$. Более того, функция $V(x(n+2, x_0))$ ограничена при $n \geq 0$ и согласно условию б) не возрастает по n, поэтому существует конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} V(x(n+2, x_0)) = a(x_0) \tag{3.3}$$

Пусть x^* — ω — предельная точка траектории $\bigcup\limits_{n \geq 0} x(n, x_0)$. По условию утверждения каждая точка траектории $\bigcup\limits_{n \geq 0} x(n, x^*)$ является ω — предельной точкой $\bigcup\limits_{n \geq 0} x(n, x_0)$, поэтому в силу (3.3) для любого $n \geq 0$ $V(x(n+2, x^*)) = a(x_0)$, т. е. $x(n, x_0)$ с ростом n стремится к множеству Ω. Что и требовалось.

Используем данное утверждение для системы (2.15), полагая, $\Omega = M_*$ и введя в рассмотрение функцию

$$V(\omega) = 0{,}5\omega^{\tau}\theta\omega = 0{,}5\,(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) \tag{3.4}$$

которая, очевидно, удовлетворяет его условиям а) и в); τ — символ транспонирования. Так как в ограниченном инвариантном относительно (2.1), (1.2)—(1.4) множестве M_* уравнение (2.1) принимает вид (2.3), а функция (3.4) — первый интеграл уравнения (2.3), то при $\omega \in M_*$ $\Delta^2 V(\omega) = 0$. Далее устанавливаются соотношения, при которых выполняется условие б) утверждения 2.

Выражение для $\Delta^2 V(\omega(nT)) = \omega^{\tau}((n+2)T)\,\theta\omega((n+2)T) - \omega^{\tau}(nT)\,\theta\omega(nT)$ переписывается следующим образом

$$\Delta^2 V(\omega(nT)) = \int\limits_{nT}^{(n+1)T} \frac{dV}{d\xi}\,d\xi + \int\limits_{(n+1)T}^{(n+2)T} \frac{dV}{d\xi}\,d\xi \tag{3.5}$$

где $dV/dt = \varepsilon\omega^{\tau}\theta N u(\sigma(t))$ — производная по времени функции $V(\omega)$ в силу уравнения (2.1). Используя выражения для ε и N, введенные перед (2.1), имеем $dV/dt = \Sigma M_i \omega_i u_i(\sigma_i(t))$ $(i = \overline{1, 3})$. С учетом последнего, а также (2.2), (1.2)—(1.4) выражение (3.5) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ переписывается следующим образом

$$\Delta^2 V(\omega(nT)) = -V_1(\omega(nT)) = o(\varepsilon) \tag{3.6}$$

$$V_1(\omega(nT)) = \sum_{i=1}^{3} M_i \operatorname{sign} \omega_i^{(0)}(nT) \int\limits_{nT}^{nT+\tau_i(n)} \omega_i^{(0)}(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} M_i \operatorname{sign} \omega_i^{(0)}((n+1)T) \int\limits_{(n+1)T}^{(n+1)T+\tau_i(n+1)} \omega_i^{(0)}(\xi)\,d\xi \tag{3.7}$$

$$\tau_i(k) = \tau_i(\sigma_i^{(0)}(kT)), \quad \sigma_i^{(0)}(kT) = \sigma_i(kT), \quad k = n, n+1$$

Из (3.6) вытекает, что при достаточно малых ε знак $\Delta^2 V(\omega(nT))$ определяется знаком $V_1(\omega(nT))$, который необходимо установить для различных видов полодий (2.7), (2.8), (2.10), (2.12). Для полодий (2.7), (2.12) знак $V_1(\omega(nT))$ определяется просто. В самом деле, пусть, например, $|\omega_1^{(0)}(nT)| = |\alpha_n \operatorname{th} \delta_n| \geq \Delta_1 / \rho_1$, $|\omega_2^{(0)}(nT)| = |\beta_n \operatorname{ch}^{-1} \delta_n| \geq \Delta_2/\rho_2$, $|\omega_3^{(0)}(nT)| = |\gamma_n \operatorname{ch}^{-1} \delta_n| \geq \Delta_3/\rho_3$. Тогда на основании свойств гиперболических функций первая сумма в правой части (3.7) записывается в виде

$$I = M_1|\alpha_n| \int\limits_{nT}^{nT+\tau_1(n)} \operatorname{th}\eta\, d\eta + M_2|\beta_n| \int\limits_{nT}^{nT+\tau_2(n)} \operatorname{ch}^{-1}\eta\, d\eta + M_3|\gamma_n| \int\limits_{nT}^{nT+\tau_3(n)} \operatorname{ch}^{-1}\eta\, d\eta$$

и, очевидно, допускает следующую оценку:

$$I \geq \sum_{i=1}^{3} M_i |\omega_i^{(0)}(nT)| \tau_i(n)| \geq \sum_{i=1}^{3} M_i |\omega_i^{(0)}(nT)| \Delta_i > 0$$

Подобная оценка имеет место и при других возможных реализациях условия $\omega^{(0)}(nT) \notin M_*$. Аналогичное заключение верно и для второй суммы в правой части (3.7). Если же $\omega^{(0)}(nT) \in M_*$, то, очевидно, $V_1(\omega(nT)) = \Delta^2 V(\omega(nT)) = 0$. Итак, для полодий (2.7), (2.12) при достаточно малом ε $\Delta^2 V(\omega(nT)) < 0$ при $\omega^{(0)}(nT) \notin M_*$ и $\Delta^2 V(\omega(nT)) = 0$ при $\omega^{(0)}(nT) \in M_*$.

Для полодий (2.7), (2.8) и (2.7), (2.10) рассуждения аналогичны. Оценим величину $V_1(\omega(nT))$, например, для полодий (2.7), (2.10), предполагая, что выполняется условие

$$T < T_0^{(n)} \tag{3.8}$$

где $4T_0^{(n)}$ — период знакопеременных эллиптических функций sn, cn в (3.7) при $t \in [nT, (n+2)T)$. Слагаемые с $i = 3$ в правой части (3.7) в силу свойств положительной эллиптической функции dn допускают оценку

$$\sum_{k=n}^{n+1} M_3 \operatorname{sign} \omega_3^{(0)}(kT) \int\limits_{kT}^{kT+\tau_3(k)} \omega_3^{(0)}(\xi)\, d\xi \geq M_3 \sum_{k=n}^{n+1} |\omega_3^{(0)}(kT)| \tau_3(k) \tag{3.9}$$

и, значит, если $|\omega_3^{(0)}(kT)| \geq \Delta_3/\rho_3$, то $\tau_3(k) \geq \Delta_3$; если же $|\omega_3^{(0)}(kT)| < \Delta_3/\rho_3$, то $\tau_3(k) = 0$, $k = n$, $n+1$.

Покажем, что при условии (3.8) слагаемые в (3.7) с $i = 1, 2$ каждое в отдельности положительны, т. е.

$$I_i = \sum_{k=n}^{n+1} M_i \operatorname{sign} \omega_i^{(0)}(kT) \int\limits_{kT}^{kT+\tau_i(k)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi > 0 \tag{3.10}$$

если $|\omega_i^{(0)}(kT)| \geq \Delta_i/\rho_i$, $k = n$, $n+1$; при $|\omega_i^{(0)}(kT)| < \Delta_i/\rho_i$, $k = n$, $n+1$, $\tau_i(k) = 0$ и соответствующий интегральный член в (3.10) равен нулю. Пусть, например, реализуется следующая ситуация:

$$|\omega_i^{(0)}(kT)| \geq \Delta_i/\rho_i, \quad k = n, n+1 \quad (i = 1, 2) \tag{3.11}$$

$\operatorname{sign} \omega_i^{(0)}(nT) \int\limits_{nT}^{nT+\tau_i(n)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi < 0$ для какого-либо i, где $\omega_i^{(0)}(t)$ — знакопеременная эллиптическая функция Якоби, задаваемая соотношениями (2.7), (2.10), (2.11). Тогда (3.11) имеет место, если функция $\omega_i^{(0)}(t)$ меняет знак на отрезке

$[nT, nT + \tau_i(n))$ и, следовательно, существует момент времени $\zeta \in [nT, nT + \tau_i(n))$ такой, что $\omega_i^{(0)}(\zeta) = 0$. Из (3.11) и свойств знакопеременных эллиптических функций при условии (3.8) имеем $|\omega_i^{(0)}((n + 1)T)| \geq \geq |\omega_i^{(0)}(nT + \tau_i(n))| \geq |\omega_i^{(0)}(nT)|$ и, следовательно, $\tau_i(n + 1) \geq \tau_i(n)$ и

$$0 < -\operatorname{sign}\omega_i^{(0)}(nT) \int\limits_{nT}^{nT+\tau_i(n)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi < -\operatorname{sign}\omega_i^{(0)}(nT) \int\limits_{\zeta}^{nT+\tau_i(n)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi$$

$$0 < \operatorname{sign}\omega_i^{(0)}((n + 1)T) \int\limits_{(n+1)T}^{(n+1)T+\tau_i(n)-\zeta+nT} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi <$$

$$< \operatorname{sign}\omega_i^{(0)}((n + 1)T) \int\limits_{(n+1)T}^{(n+1)T+\tau_i(n+1)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi$$

$$-\operatorname{sign}\omega_i^{(0)}(nT) \int\limits_{\zeta}^{nT+\tau_i(n)} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi < \operatorname{sign}\omega_i^{(0)}((n + 1)T) \int\limits_{(n+1)T}^{(n+1)T+\tau_i(n)-\zeta+nT} \omega_i^{(0)}(\xi)\, d\xi$$

тем самым выполняется (3.10). Более того, в рассматриваемом случае

$$I_l \geq M_l \operatorname{sign}\omega_l^{(0)}(nT) \int\limits_{nT}^{\zeta} \omega_l^{(0)}(\xi)\, d\xi = M_l \int\limits_{nT}^{\zeta} |\omega_l^{(0)}(\xi)|\, d\xi$$

Из формулы конечных приращений имеем $\omega_l^{(0)}(\zeta) - \omega_l^{(0)}(nT) = \omega_i^{\cdot(0)}(\lambda)(\zeta - - nT)$ $\lambda \in [nT, \zeta]$ и, поскольку $\omega_l^{(0)}(\zeta) = 0$, $|\omega_l^{(0)}(nT)| \geq \Delta_l/\rho_l$, $\omega_i^{\cdot(0)}(\lambda) \leq \leq |\omega_j^{(0)}(\lambda)\, \omega_k^{(0)}(\lambda)| \leq 0{,}5\,[(\omega_i^{(0)}(\lambda))^2 + (\omega_j^{(0)}(\lambda))^2 + (\omega_k^{(0)}(\lambda))^2] \leq V(\omega(nT))\,/\,J_2$ (при $i \neq j \neq k$; см. (2.3)), то $\zeta - nT \geq (\Delta_l J_2)/(\rho_l V(\omega(nT)))$ и, следовательно, справедлива оценка

$$I_l \geq 0{,}5 M_l (\Delta_l/\rho_l)^2 J_2/V(\omega(nT))$$

Для других возможных ситуаций, для которых $|\omega_l^{(0)}(nT)| \geq \Delta_l/\rho_l$ можно показать, что

$$I_l \geq 0{,}5 M_l \frac{\Delta_l}{\rho_l} \min\left\{\frac{J_2\Delta_l}{\rho_l V(\omega(nT))},\ \Delta_l,\ T - \Delta_l\right\}$$

Таким образом, показано, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и условии (3.8) из $\omega(nT) \in M_*$ следует $V_1(\omega(nT)) \geq \mathrm{const} > 0$, $\Delta^2 V(\omega(nT)) < 0$ и $V_1(\omega(nT)) = = \Delta^2 V(\omega(nT)) = 0$ при $\omega(nT) \in M_*$. Выясним ограничение на параметры системы (2.1), (1.2)—(1.4), определяемые условием (3.8). Период $4T_0^{(n)}$ знакопеременных эллиптических функций Якоби (2.7), (2.8) или (2.10) задается [1] соотношением

$$4T_0^{(n)} = \frac{4K_n}{\sigma_n}, \quad K_n = \int\limits_n^1 \frac{ds}{[(1 - s^2)(1 - k_n^2 s^2)]^{1/2}}$$

Величина K_n при условии $0 \leq |k_n| \leq 1$ оценивается снизу

$$K_n \geq \int\limits_0^1 \frac{ds}{(1 - s^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

поэтому условие $T < \pi/(2\sigma_n)$ достаточно для выполнения неравенства (3.8). Из последнего неравенства имеем $\sigma_n < \pi/(2T)$, поэтому на основании формул (2.9) и (2.11) получаем неравенства

$$k_1\,[\omega_2^2 + k_3\omega_1^2]^{1/2} < \pi/(2T), \quad k_2\,[\omega_3^2 + k_4\omega_1^2]^{1/2} < \pi/(2T) \tag{3.12}$$

$$k_1 = [(J_3 - J_2) (J_1 - J_2)/J_1J_3]^{1/2}, \quad k_2 = [(J_3 - J_1) (J_3 - J_2)/J_1J_2]^{1/2}$$

$$k_3 = [J_1 (J_1 - J_2)] / [J_3 (J_3 - J_2)], \quad k_4 = [J_2 (J_3 - J_2)] / [J_1 (J_3 - J_1)]$$

Объединяя сказанное выше и используя Утверждение 2, выводится следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть в системе (2.1), (1.2)—(1.4) параметр ε достаточно мал, множество $H_l = \{\omega : V(\omega) < l\}$ (l — const > 0) таково, что эллипсоид $V(\omega) = l$ вписан в множество (3.12), а параметры управления ρ_i выбраны так, что множество консервативных движений (3.1) $\Omega_* \subset H_l$. Тогда при $\omega(0) = \omega_0 \in H_l$ решение $\omega(t, \omega_0)$ системы (2.1), (1.2)—(1.4) с ростом t стремится к множеству $M_* \subset \Omega_*$.

Доказательство. С учетом приведенных ранее соображений доказательство утверждения уже выполнено, если принять во внимание, что при $\omega_0 \in H_l \backslash M_*$ решение $\omega(t, \omega_0)$ системы (2.1), (1.2)—(1.4) ограничено, с ростом $t = nT$ стремится к инвариантному множеству M_*, где $\Delta^2 V(\omega) = 0$, и тем самым ω — предельное множество решения $\omega(nT, \omega_0)$ инвариантно.

Замечание. Утверждением 3 решена исходная задача успокоения твердого тела, при этом $\rho_i > 0$ таковы, что $\Omega_* \subset H_l$. Довольно большой произвол в выборе ρ_i можно использовать либо для расширения допустимых значений ε, либо для улучшения качества успокоения, что является, однако, предметом исследования новых задач.

4. Изучается система (1.1)—(1.4) в симметричном случае

$$J_1 = J_3 > J_2 \tag{4.1}$$

При этом второе уравнение системы (1.1) отделяется от остальных ее уравнений и может быть исследовано изолированно, т. е. $\omega_2(t)$ находится из системы, состоящей из уравнения

$$\omega_2^{\circ} = qu_2 (\sigma_2 (t)), \quad \sigma_2 = -\rho_2\omega_2 \quad (q = M_2/J_2) \tag{4.2}$$

и уравнений (1.3), (1.4) при $i = 2$. Эта система имеет множество положений равновесия — отрезок покоя —

$$\Lambda_2 = \{\omega_2 : -\Delta_2/\rho_2 < \omega_2 < \Delta_2/\rho_2\} \tag{4.3}$$

свойства притяжения к которому устанавливает приведенное ниже утверждение.

Утверждение 4. Для того, чтобы отрезок покоя Λ_2 системы (4.2), (1.3), (1.4), $i = 2$ при $M_2, J_2, T, \Delta_2, \rho_2$ – const > 0 обладал свойством притяжения в конечный момент времени, т. е. для любых $\omega_2(0)$ существует $a \in (0, \infty)$ такое, что решение $\omega_2(t)$ при $t \geq a$ удовлетворяет условию $\omega_2(t) = \omega_2(a) \in \Lambda_2$, достаточно выполнения условия

$$\forall x \in \left[\frac{\Delta_2}{\rho_2}, \frac{I}{\rho_2} \right] \; \left| 1 - \frac{q\tau_2^{(0)} (\rho_2 x)}{x} \right| \leq \lambda < 1 \tag{4.4}$$

Доказательство. Оно состоит в построении на основе (4.2), (1.3), (1.4) точечного отображения

$$\overline{\omega}_2 = \omega_2 - q\tau_2^{(0)} (\rho_2\omega_2) \operatorname{sign} \omega_2$$

которое при условии (4.4) является сжимающим.

Пусть имеют место условия утверждения 4. Величины ω_1, ω_3 при выполнении (4.1) удовлетворяют уравнениям

$$J_1\omega_1^{\bullet} + (J_1 - J_2)\,\omega_2(t)\,\omega_3 = M_1^y,\quad J_1\omega_3^{\bullet} + (J_2 - J_1)\,\omega_2(t)\,\omega_1 = M_3^y \tag{4.5}$$

и (1.2)—(1.4), $i=1, 3$, в которых $\omega_2(t)$ — произвольное решение системы (4.2), (1.3), (1.4), $i=2$. Поскольку выполняются условия утверждения 4, то каждая траектория системы (4.5), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ при $t \geq a$, a – const $< \infty$ совпадает с некоторой траекторией предельной системы:

$$J_1\omega_1^{\bullet} + (J_1 - J_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1^y,\quad J_1\omega_3^{\bullet} + (J_2 - J_1)\,\omega_2\omega_1 = M_3^y \tag{4.6}$$

дополненной уравнениями (1.2)—(1.4), $i=1, 3$, где ω_2 — такая постоянная, что $\omega_2 \in \Lambda_2$. Поэтому в дальнейшем исследуется динамика системы (4.6), (1.2)—(1.4), $i=1,3$ $(\omega_2 \neq 0) \in \Lambda_2$. Если $\omega_2 = 0$, то система (4.6), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ распадается на две изолированные подсистемы вида (4.2), (1.3), (1.4), $i=2$, которые уже изучены. Вводя малый параметр $\varepsilon = \max M_i/J_1$ и полагая

$$(J_1 - J_2)/J_1 = a,\quad k_i = M_i/(\max M_i),\quad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -a\omega_2 \\ a\omega_2 & 0 \end{pmatrix},\quad K = \operatorname{diag}(k_1, k_3),\quad u(\sigma(t)) = (u_1(\sigma_1(t)), u_3(\sigma_3(t)))$$

(4.6) переписывается так

$$\omega^{\bullet} = J\omega + \varepsilon K u(\sigma(t)) \tag{4.7}$$

Интегрируя (4.7), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ для $t \geq nT$, $n \geq 0$ имеем для любого $\varepsilon > 0$:

$$\omega(t) = \omega^{(0)}(t) + \varepsilon\omega^{(1)}(t),\quad \omega^{(0)}(t) = \exp[J(t - nT)]\,\omega(nT)$$

$$\omega^{(1)}(t) = \int\limits_{nT}^{t} \exp[J(t-\tau)]\,Ku(\sigma(\tau))\,d\tau,\quad \exp[Jt] = \begin{pmatrix} \cos a|\omega_2|t & -\sin a|\omega_2|t \\ \sin a|\omega_2|t & \cos a|\omega_2|t \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

В фазовом пространстве системы (4.7), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ вводится множество консервативных движений $\Omega_* = \{(\omega_1, \omega_3) : |\omega_i| < \Delta_i/\rho_i,\ i = 1, 3\}$, в котором $\tau_i(\sigma_i) = 0$, $u_i(\sigma_i(t)) = 0$ и, следовательно, (4.7) имеет вид $\omega^{\bullet} = J\omega$. Пусть $M_* \subset \Omega_*$ — наибольшее инвариантное подмножество Ω_* такое, что если $\omega(0) \in M_*$, то $\omega(nT, \omega(0)) = \omega^{(0)}(nT, \omega(0)) \in M_*$ для всех $n \geq 0$, где $\omega(t, \omega(0))$ — решение (4.7), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$, совпадающее при $\omega(0) \in M_*$ с решением уравнения $\omega^{\bullet} = J\omega$.

Для решения задачи успокоения системы (4.7), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ снова используется утверждение 2, в котором полагается $\Omega = M_*$, $V(\omega) = 0{,}5\omega^{\mathsf T}\omega$. При этом удовлетворяются условия а) и в) утверждения 2 и, очевидно, $\Delta^2 V(\omega) = 0$ при $\omega \in M_*$, поскольку $V(\omega)$ — первый интеграл уравнения $\omega^{\bullet} = J\omega$. Имеем $dV/dt = \omega^{\mathsf T}\omega^{\bullet} = \varepsilon\omega^{\mathsf T} K u(\sigma(t))$, а в соответствии с (3.5) и (4.7):

$$\Delta^2 V(\omega(nT)) = -\varepsilon V_1(\omega(nT)) + \varepsilon^2 \int\limits_{nT}^{(n+2)T} \omega^{(1)T}(\tau)\,Ku(\sigma(\tau))\,d\tau \tag{4.9}$$

$$V_1(\omega(nT)) = -\int\limits_{nT}^{(n+2)T} \omega^{(0)T}(\tau)\, Ku(\sigma(\tau))\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{nT}^{(n+2)T} \omega^T(nT) \exp[J^T(\tau - nT)]\, Ku(\sigma(\tau))\, d\tau$$

а учитывая (1.2), (1.3) и (4.8) при

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\Delta_1}{\rho_1}, \frac{\Delta_3}{\rho_3}\right\} [T(k_1 + k_3)]^{-1} \tag{4.10}$$

имеем

$$V_1(\omega(nT)) = \sum_{k=n}^{n+1} k_1 \operatorname{sign} \omega_1^{(0)}(kT) \int\limits_{kT}^{kT+\tau_1(k)} \omega_1^{(0)}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{k=n}^{n+1} k_3 \operatorname{sign} \omega_3^{(0)}(kT) \int\limits_{kT}^{kT+\tau_3(k)} \omega_3^{(0)}(\xi)\, d\xi$$

где $\tau_i(k) = \tau_i(\sigma_i^{(0)}(kT)) = \tau_i(\sigma_i(kT))$, $k = n, n+1$ $(i = 1,\ 3)$, а $\omega_i^{(0)}(t)$ — компоненты вектора $\omega^{(0)}(t)$, задаваемого (4.8), при этом $\omega_i^{(0)}(t)$, $i = 1,\ 3$ — круговые функции частоты $a|\omega_2|$, $\omega_2 \neq 0$.

Пусть для всех $\omega_2 \in \Lambda_2$, $\omega_2 \neq 0$ выполняется условие

$$T < \pi/(2a|\omega_2|) \tag{4.11}$$

аналог условия (3.8) или (3.12). Рассуждая как в предыдущем параграфе, можно показать, что

$$V_1(\omega(nT)) \geq c_1 \min\{J_2\Delta_i/(\rho_i V(\omega(nT))),\ \Delta_i,\ T - \Delta_i\} = c_1 c_2$$

где c_1, c_2 – const > 0. Из (4.8) выводится оценка $|\omega_i^{(1)}(t)| \leq (k_1 + k_3)(t - nT)$, $i = 1,\ 3$, поэтому

$$\left| \int\limits_{nT}^{(n+2)T} \omega^{(1)T}(\tau)\, Ku(\sigma(\tau))\, d\tau \right| \leq 2T^2 (k_1 + k_3)^2$$

и для величины $\Delta^2 V(\omega(nT))$ из (4.9) имеем

$$\Delta^2 V(\omega(nT)) \leq -\varepsilon c_1 c_2 + \varepsilon^2 2T^2 (k_1 + k_3)^2$$

Поэтому, если кроме ограничения (4.10) параметр ε удовлетворяет также неравенству $\varepsilon < c_1 c_2 / [2T^2(k_1 + k_3)^2]$, то функция $V(\omega) = 0{,}5\omega^{\tau}\omega$ удовлетворяет всем условиям утверждения 2 для системы разностных уравнений

$$\omega((n+1)T) = \exp(JT)\omega(nT) + \varepsilon\omega^{(1)}((n+1)T) \tag{4.12}$$

В результате получается утверждение.

Утверждение 5. Пусть для системы (1.1)—(1.4) при условии (4.1) имеют место неравенства (4.4), (4.10), (4.11). Тогда для любого $l > 0$ такого, что множество $H_l = \{\omega : 0{,}5\omega^{\tau}\omega < l\} \supset \Omega_*$, любого $0 < \varepsilon < c_1 c_2 / [2T^2(k_1 + k_3)^2]$, где

$c_2 = \min\{J_2\Delta_l/(\rho_l l), \Delta_l, T - \Delta_l\}$, и любого $\omega(0) = \omega_0 \in H_l$ решение $\omega(nT, \omega_0)$ системы (4.12), (1.2)—(1.4), $i=1, 3$ с ростом n стремится к множеству $M_* \subset \Omega_*$.

Тот же вывод справедлив и для решений системы (4.5), (1.2)—(1.4) и тем самым решена задача успокоения твердого тела в симметричном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 192 с.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964, 560 с.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
28.VIII.1990