

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. Н. С. АЗИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СДВИГЕ

Рассматривается устойчивость и несущая способность однородных анизотропных шарнирно опертых пластин при сдвиге. Решение осуществляется в перемещениях на основе уравнений типа Кармана при прогибе, представленном в виде двойного тригонометрического ряда. Исследование изменения полной потенциальной энергии вблизи точки бифуркации и минимизация по коэффициентам разложения позволило получить систему алгебраических уравнений, из которых определяются собственные значения и собственные функции. Собственная функция, соответствующая минимальному собственному значению, нормализуется и используется в качестве аппроксимирующей функции в задаче о закритическом деформировании. На основе принципа Лагранжа находится зависимость между действующими усилиями сдвига и амплитудой закритического прогиба. Численно исследовано влияние структурных параметров на критические нагрузки и закритическую прочность углепластиковых пластин.

1. Рассмотрим композитную прямоугольную шарнирно опертую по всем сторонам композитную пластину, нагруженную усилиями сдвига S (фиг. 1). Пластина армирована под углом φ по отношению к оси x . Запишем исходные соотношения

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0, N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \quad (1.1)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + S\kappa_{xy} = 0 \quad (1.2)$$

$$N_x = C_{11}e_x + C_{12}e_y + C_{13}e_{xy} \quad N_y = C_{21}e_x + C_{22}e_y + C_{23}e_{xy} \\ N_{xy} = C_{31}e_x + C_{32}e_y + C_{33}e_{xy} \quad M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{13}\kappa_{xy} \quad (1.3)$$

$$M_y = D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y + D_{23}\kappa_{xy} \quad M_{xy} = D_{31}\kappa_x + D_{32}\kappa_y + D_{33}\kappa_{xy} \\ e_x = \varepsilon_x + z\kappa_x, e_y = \varepsilon_y + z\kappa_y, e_{xy} = \varepsilon_{xy} + z\kappa_{xy} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} + 1/2 w_{,x}^2, \varepsilon_y = v_{,y} + 1/2 w_{,y}^2, \varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} + w_{,y}, \kappa_x = -w_{,xx}$$

$$\kappa_y = -w_{,yy}, \kappa_{xy} = -2w_{,xy}$$

$$C_{mn} = C_{nm} = B_{mn}h \quad (mn = 11, 12, 22, 13, 23, 33), D_{mn} = D_{nm} = B_{mn}h^3/12$$

$$B_{11} = \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2E_{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{12} = \bar{E}_1 \mu_{12} + (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2E_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{13} = \sin \varphi \cos \varphi (\bar{E}_1 \cos^2 \varphi - \bar{E}_2 \sin^2 \varphi - E_{12} \cos 2\varphi)$$

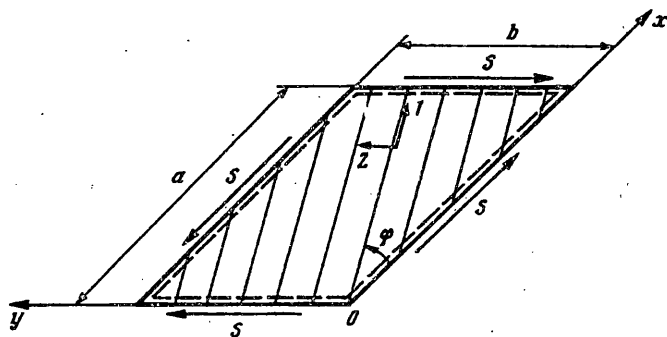
$$B_{22} = \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2E_{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{23} = \sin \varphi \cos \varphi (\bar{E}_1 \sin^2 \varphi - \bar{E}_2 \cos^2 \varphi + E_{12} \cos 2\varphi)$$

$$B_{33} = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos 2\varphi$$

$$\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})}, \quad \mu_{12}E_1 = \mu_{21}E_2, \quad E_{12} = \bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}$$

Здесь C_{mn} — мембранные жесткости, D_{mn} — изгибные жесткости, h — толщина пластины, B_{mn} — обобщенные жесткости в координатах 1,2 (фиг. 1) [1], E_1, E_2 —



Фиг. 1

модули упругости при нагружении вдоль и поперек волокон, G_{12} — модуль сдвига, μ_{12} , μ_{21} — коэффициенты Пуассона. Полная потенциальная энергия пластины

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) dx dy - S \int_0^a \int_0^b (u_{,y} + v_{,x}) dx dy \quad (1.5)$$

Для оценки прочности возникающие в пластине усилия и деформации необходимо связать с напряжениями и деформациями в координатах 1,2. Выразим деформации e_1 , e_2 , e_{12} через деформации e_x , e_y , e_{xy} [1]:

$$e_1 = e_x \cos^2 \varphi + e_y \sin^2 \varphi + e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$e_2 = e_x \sin^2 \varphi + e_y \cos^2 \varphi - e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$e_{12} = (e_y - e_x) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi$$

По известным e_1 , e_2 , e_{12} остается найти напряжения $\sigma_1 = \bar{E}_1(e_1 + \mu_{12}e_2)$, $\sigma_2 = \bar{E}_2(e_2 + \mu_{21}e_1)$, $\tau_{12} = G_{12}e_{12}$ и сравнить их с разрушающими напряжениями $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\tau}_{12}$ с помощью выбранного критерия прочности. При анализе несущей способности пластины после потери устойчивости будет использован следующий критерий прочности:

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} + \left(\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{12}} \right)^2 \leq 1 \quad (1.6)$$

2. Представим прогиб пластины в виде двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \quad (2.1)$$

Найдем из первых двух уравнений равновесия (1.1), записанных в перемещениях с учетом (2.1), перемещения срединной поверхности

$$u = C_1 x + C_2 y + \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (A_{mn} \bar{u}_1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{lj} \bar{u}_2) \quad (2.2)$$

$$v = C_3 x + C_4 y + \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (A_{mn} \bar{v}_1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{lj} \bar{v}_2)$$

$$\bar{u}_1 = \lambda_m \left(-1 + \frac{\lambda_n^2 C_{12} C_{33} - C_{13} C_{23}}{\lambda_m^2 C_{11} C_{33} - C_{13}^2} \right) \sin 2\lambda_m x + \frac{\lambda_m^2 C_{22} C_{13} - C_{12} C_{23}}{\lambda_n C_{22} C_{33} - C_{23}^2} \sin 2\lambda_n y +$$

$$+ \lambda_m r_1 \sin 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y + \lambda_n r_2 \cos 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y$$

$$\bar{u}_2 = \lambda_m (r_3 f_3 f_3 + r_3 f_3 f_4 + r_3 f_3 f_4 + r_3 f_3 f_3) + \lambda_n (r_4 f_1 f_7 + r_4 f_2 f_8 + r_4 f_1 f_8 + r_{10} f_2 f_7)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m} \left(\frac{C_{11}C_{23} - C_{12}C_{13}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \right) \sin 2\lambda_m x + \lambda_n \left(-1 + \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{22}C_{33} - C_{23}^2} \right) \sin 2\lambda_n y + \\ &+ \lambda_m r_{11} \cos 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y + \lambda_n r_{12} \sin 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y \\ \bar{v}_2 &= \lambda_m (r_{13}f_7 + r_{15}f_2 + r_{17}f_8 + r_{19}f_7) + \lambda_n (r_{14}f_3 + r_{16}f_6 + r_{18}f_5 + r_{20}f_6) \\ f_1 &= \cos (\lambda_m - \lambda_n) x, \quad f_2 = \cos (\lambda_m + \lambda_n) x, \quad f_3 = \cos (\lambda_n - \lambda_m) y \\ f_4 &= \cos (\lambda_n + \lambda_m) y, \quad f_5 = \sin (\lambda_m - \lambda_n) x, \quad f_6 = \sin (\lambda_m + \lambda_n) x \\ f_7 &= \sin (\lambda_n - \lambda_m) y, \quad f_8 = \sin (\lambda_n + \lambda_m) y.\end{aligned}$$

Здесь i, j — числа полуволн ($i \neq m, j \neq n$), $r_1, r_2, \dots, r_{20}$ образуют группы взаимосвязанных коэффициентов: $\{R_1\} = \{r_1, r_2, r_{11}, r_{12}\}^T$, $\{R_2\} = \{r_3, r_4, r_{13}, r_{14}\}^T$, $\{R_3\} = \{r_5, r_6, r_{15}, r_{16}\}^T$, $\{R_4\} = \{r_7, r_8, r_{17}, r_{18}\}^T$, $\{R_5\} = \{r_9, r_{10}, r_{19}, r_{20}\}^T$. Они находятся из систем линейных алгебраических уравнений 4-й степени $[L]\{R\} = \{B\}$, где L — квадратная матрица 4×4 , B — вектор-столбец правых частей. Элементы L и B для коэффициентов $\{R_i\}$ равны

$$L = \begin{vmatrix} C_{11}\lambda_m^2 + C_{33}\lambda_n^2 & 2C_{13}\lambda_n^2 & (C_{12} + C_{33})\lambda_m\lambda_n & (C_{13}\lambda_m^2 + C_{23}\lambda_n^2)\lambda_n/\lambda_m \\ 2C_{13}\lambda_m^2 & C_{11}\lambda_m^2 + C_{33}\lambda_n^2 & (C_{13}\lambda_m^2 + C_{23}\lambda_n^2)\lambda_m/\lambda_n & (C_{12} + C_{33})\lambda_m\lambda_n \\ C_{13}\lambda_m^2 + C_{23}\lambda_n^2 & (C_{12} + C_{33})\lambda_n^2 & 2C_{23}\lambda_m\lambda_n & (C_{33}\lambda_m^2 + C_{22}\lambda_n^2)\lambda_n/\lambda_m \\ (C_{12} + C_{33})\lambda_m^2 & C_{13}\lambda_m^2 + C_{23}\lambda_n^2 & (C_{33}\lambda_m^2 + C_{22}\lambda_n^2)\lambda_m/\lambda_n & 2C_{23}\lambda_m\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$B = \{ [C_{11}\lambda_m^2 + (C_{12} + 2C_{33})\lambda_n^2], (3C_{13}\lambda_m^2 + C_{23}\lambda_n^2), (C_{13}\lambda_m^2 + 3C_{23}\lambda_n^2), [(C_{12} + 2C_{33})\lambda_m^2 + C_{22}\lambda_n^2] \}^T$$

Для групп $\{R_2\} - \{R_5\}$ элементы матрицы L и вектора B равны

$$L = \begin{vmatrix} C_{11}T_1^2 + C_{33}T_2^2 & 2C_{13}T_1T_2\lambda_n/\lambda_m & (C_{12} + C_{33})T_1T_2 & (C_{13}T_1^2 + C_{23}T_2^2)\lambda_n/\lambda_m \\ 2C_{13}T_1T_2 & (C_{11}T_1^2 + C_{33}T_2^2)\lambda_m/\lambda_n & C_{13}T_1^2 + C_{23}T_2^2 & (C_{12} + C_{33})T_1T_2\lambda_n/\lambda_m \\ C_{13}T_1^2 + C_{23}T_2^2 & (C_{12} + C_{33})T_1T_2\lambda_n/\lambda_m & 2C_{23}T_1T_2 & (C_{33}T_1^2 + C_{22}T_2^2)\lambda_n/\lambda_m \\ (C_{12} + C_{33})T_1T_2 & (C_{13}T_1^2 + C_{23}T_2^2)\lambda_m/\lambda_n & C_{33}T_1^2 + C_{22}T_2^2 & 2C_{23}T_1T_2\lambda_n/\lambda_m \end{vmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{aligned} &(C_{11}\lambda\delta_1 + C_{12}\lambda_n\lambda\delta_2/\lambda_m)T_1 + 2C_{33}\lambda T_2\delta_2 \\ &2C_{13}\lambda T_1\delta_2 + (C_{13}\lambda\delta_1 + C_{23}\lambda_n\lambda\delta_2/\lambda_m)T_2 \\ &(C_{13}\lambda\delta_1 + C_{23}\lambda_n\lambda\delta_2/\lambda_m)T_1 + 2C_{23}\lambda T_2\delta_2 \\ &2C_{33}\lambda T_1\delta_2 + (C_{22}\lambda\delta_1/\lambda_m + C_{12}\lambda\delta_2)T_2 \end{aligned} \right\}$$

где $T_1, T_2, \delta_1, \delta_2$ принимают следующие значения: для $\{R_2\}$ $T_1 = \lambda_m - \lambda_n, T_2 = \lambda_n - \lambda_m, \delta_1 = \delta_2 = 1$; для $\{R_3\}$ $T_1 = \lambda_m + \lambda_n, T_2 = \lambda_n + \lambda_m, \delta_1 = \delta_2 = -1$; для $\{R_4\}$ $T_1 = \lambda_m - \lambda_n, T_2 = \lambda_n + \lambda_m, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$; для $\{R_5\}$ $T_1 = \lambda_m + \lambda_n, T_2 = \lambda_n - \lambda_m, \delta_1 = 1, \delta_2 = -1$. Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 найдем из статических граничных условий

$$\begin{aligned}\int_0^a N_{xy} dx &= Sa, \quad \int_0^b N_x dy = 0, \quad \text{при } x = 0, a \\ \int_0^b N_{xy} dy &= Sb, \quad \int_0^a N_y dx = 0 \quad \text{при } y = 0, b\end{aligned}$$

После подстановки усилий, выраженных через перемещения (2.1) и (2.2), и интегрирования получим

$$C_1 = -(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})S/C - \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \lambda_m^2 / 8$$

$$C_2 = C_3 = \frac{1}{2C} (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)S, \quad C_4 = -\frac{1}{C} (C_{23}C_{11} - C_{12}C_{13})S - \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \lambda_n^2$$

$$C = C_{33} (C_{11}C_{22} - C_{12}^2) + 2 C_{12}C_{13}C_{23} - C_{11}C_{23}^2 - C_{22}C_{13}^2$$

С учетом последних равенств определим деформации, усилия и моменты в пластине при сдвиге

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{S}{C} (C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}) + \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} (A_{mn} \bar{\varepsilon}_x^{(1)} + \sum_l \sum_j A_{lj} \bar{\varepsilon}_x^{(2)}) \\ \varepsilon_y &= \frac{S}{C} (C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23}) + \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} (A_{mn} \bar{\varepsilon}_y^{(1)} + \sum_l \sum_j A_{lj} \bar{\varepsilon}_y^{(2)}) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{S}{C} (C_{11}C_{22} - C_{12}^2) + \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} (A_{mn} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(1)} + \sum_l \sum_j A_{lj} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} [A_{mn} (C_{11} \bar{\varepsilon}_x^{(1)} + C_{12} \bar{\varepsilon}_y^{(1)} + C_{13} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(1)}) + \sum_l \sum_j A_{lj} (C_{11} \bar{\varepsilon}_x^{(2)} + C_{12} \bar{\varepsilon}_y^{(2)} + C_{13} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(2)})] \\ N_y &= \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} [A_{mn} (C_{21} \bar{\varepsilon}_x^{(1)} + C_{22} \bar{\varepsilon}_y^{(1)} + C_{23} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(1)}) + \sum_l \sum_j A_{lj} (C_{21} \bar{\varepsilon}_x^{(2)} + C_{22} \bar{\varepsilon}_y^{(2)} + C_{23} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(2)})] \\ N_{xy} &= \frac{1}{8} \sum_m \sum_n A_{mn} [A_{mn} (C_{31} \bar{\varepsilon}_x^{(1)} + C_{32} \bar{\varepsilon}_y^{(1)} + C_{33} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(1)}) + \\ &+ \sum_l \sum_j A_{lj} (C_{31} \bar{\varepsilon}_x^{(2)} + C_{32} \bar{\varepsilon}_y^{(2)} + C_{33} \bar{\varepsilon}_{xy}^{(2)})] + S \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_m \sum_n A_{mn} [(D_{11} \lambda_m^2 + D_{12} \lambda_n^2) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - 2 \lambda_m \lambda_n D_{13} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y] \\ M_y &= \sum_m \sum_n A_{mn} [(D_{21} \lambda_m^2 + D_{22} \lambda_n^2) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - 2 \lambda_m \lambda_n D_{23} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y] \\ M_{xy} &= \sum_m \sum_n A_{mn} [(D_{31} \lambda_m^2 + D_{32} \lambda_n^2) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - 2 \lambda_m \lambda_n D_{33} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x^{(1)} &= -\lambda_m^2 \cos 2\lambda_n y + \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \lambda_m^2 \cos 2\lambda_m x + \lambda_m^2 (r_1 - 1) \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - \\ &- \lambda_m \lambda_n r_2 \sin 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x^{(2)} &= \lambda_m [\lambda_1 + r_3 (\lambda_m - \lambda_j)] f_3 f_3 - (\lambda_m - \lambda_j) r_4 \lambda_n f_3 f_7 + \lambda_m [-\lambda_1 + r_5 (\lambda_m + \lambda_j)] f_3 f_4 - \\ &- (\lambda_m + \lambda_j) r_6 \lambda_n f_3 f_8 + \lambda_m [-\lambda_1 + r_7 (\lambda_m - \lambda_j)] f_3 f_4 - (\lambda_m - \lambda_j) r_8 \lambda_n f_3 f_8 + \\ &+ \lambda_m [\lambda_1 + r_9 (\lambda_m + \lambda_j)] f_3 f_3 - (\lambda_m + \lambda_j) r_{10} \lambda_n f_3 f_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_y^{(1)} &= -\lambda_n^2 \cos 2\lambda_m x + \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{22}C_{33} - C_{23}^2} \lambda_m^2 \cos 2\lambda_n y + (r_{11} \lambda_m \lambda_n - \lambda_n^2) \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y - \\ &- \lambda_n^2 r_{12} \sin 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_y^{(2)} &= [\lambda_n \lambda_j + r_{13} (\lambda_n - \lambda_j) \lambda_m] f_3 f_3 - (\lambda_n - \lambda_j) r_{14} \lambda_n f_3 f_7 + [-\lambda_n \lambda_j + r_{15} (\lambda_n + \lambda_j) \lambda_m] f_3 f_4 - \\ &- (\lambda_n + \lambda_j) r_{16} \lambda_n f_3 f_8 + [\lambda_n \lambda_j + r_{17} (\lambda_n + \lambda_j) \lambda_m] f_3 f_4 - (\lambda_n + \lambda_j) r_{18} \lambda_n f_3 f_8 + \\ &+ [-\lambda_n \lambda_j + r_{19} (\lambda_n - \lambda_j) \lambda_m] f_3 f_3 - (\lambda_n - \lambda_j) r_{20} \lambda_n f_3 f_7 \end{aligned}$$

$$\bar{e}_{xy}^{(1)} = \frac{C_{22}C_{13} - C_{12}C_{23}}{C_{22}C_{33} - C_{23}^2} \lambda_m^2 \cos 2\lambda_m x + \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}C_{13}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \lambda_n^2 \cos 2\lambda_n x + \lambda_m \lambda_n (2 - r_1 - r_{11} \frac{\lambda_m}{\lambda_n}) \sin 2\lambda_m x \sin 2\lambda_n y + (r_2 \lambda_n^2 + r_{12} \lambda_m \lambda_n) \cos 2\lambda_m x \cos 2\lambda_n y$$

$$\bar{e}_{xy}^{(2)} = [r_4 (\lambda_n - \lambda_y) + r_{14} (\lambda_m - \lambda_y)] \lambda_n f_3 f_3 - [r_3 (\lambda_n - \lambda_y) + r_{13} (\lambda_m - \lambda_y) + 2\lambda_y] \lambda_m f_3 f_7 + [r_6 (\lambda_n + \lambda_y) + r_{16} (\lambda_m + \lambda_y)] \lambda_n f_2 f_4 - [r_5 (\lambda_n + \lambda_y) + r_{15} (\lambda_m + \lambda_y) - 2\lambda_y] \lambda_m f_2 f_8 + [r_8 (\lambda_n + \lambda_y) + r_{18} (\lambda_m - \lambda_y)] \lambda_n f_1 f_4 - [r_7 (\lambda_n + \lambda_y) + r_{17} (\lambda_m - \lambda_y) + 2\lambda_y] \lambda_m f_1 f_8 + [r_{10} (\lambda_n - \lambda_y) + r_{20} (\lambda_m + \lambda_y)] \lambda_n f_2 f_3 - [r_9 (\lambda_n - \lambda_y) + r_{19} (\lambda_m + \lambda_y) - 2\lambda_y] \lambda_m f_2 f_7$$

Соотношения (2.4), (2.5), естественно, не удовлетворяют уравнению равновесия (1.2). Для построения приближенной зависимости нагрузка-прогиб воспользуемся условием стационарности полной энергии пластины. Выразим полную энергию (1.5) через соотношения (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5):

$$\Pi = -\frac{ab}{2} \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{c} S^2 + \frac{\pi^2}{8} \frac{a}{b} \left[\sum_m \sum_n A_{mn}^2 (D_{11}D_{22})^{\frac{1}{2}} \bar{N}_{mn} \frac{\pi^2}{b^2} + \right. \\ \left. + \frac{32}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_m \sum_n A_{mn} \sum_p \sum_q A_{pq} (S - 2D_{13}\lambda_m^2) - 2D_{23}\lambda_n^2 \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} \right] + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{1}{128} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_m \sum_n A_{mn} \sum_l \sum_j \bar{e} \right\} \cdot \left\{ \sum_m \sum_n A_{mn} \sum_l \sum_j A_{lj} \bar{N} \right\} dx dy$$

$$\bar{N}_{mn} = m^4 \alpha + 2m^2 n^2 \eta + n^4 / \alpha$$

$$\alpha = \left(\frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/2} \frac{b^2}{a^2}, \quad \eta = \frac{D_{12} + 2D_{33}}{(D_{11}D_{22})^{1/2}}$$

$$(m \pm p) = 1, 3, 5, 7, \dots, (n \pm q) = 1, 3, 5, \dots; \bar{e} = \{ \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_{xy} \}$$

$$\bar{N} = \{ \bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy} \} = \{ C_{11}\bar{e}_x + C_{12}\bar{e}_y + C_{13}\bar{e}_{xy}, C_{21}\bar{e}_x + C_{22}\bar{e}_y + C_{23}\bar{e}_{xy}, C_{31}\bar{e}_x + C_{32}\bar{e}_y + C_{33}\bar{e}_{xy} \}$$

Исследуем поведение функционала (2.6) вблизи точки бифуркации. Пусть S_k — критическое усилие сдвига, а действующее усилие S равно $S = S_k + \Delta S$ ($\Delta S \rightarrow 0$). В этом случае прогиб пластины будет величиной малой, следовательно, последнее слагаемое в (2.6) будет величиной второго порядка малости по сравнению с двумя другими, и этим слагаемым можно пренебречь. Минимизируем полную энергию по A_{mn} . В результате получим

$$\frac{\pi^2}{b^2} (D_{11}D_{22})^{1/2} \bar{N}_{mn} A_{mn} + \frac{32}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_p \sum_q A_{pq} [S - 2(D_{13}\lambda_m^2 + D_{23}\lambda_n^2)] \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} = 0$$

(2.7)

Однородная система линейных алгебраических уравнений (2.7) является разрешающей системой для определения собственных значений и собственных функций. Система (2.7) имеет ненулевое решение, если определитель равен нулю. Обозначим через $\{\lambda\}$ вектор собственных значений, а минимальное собственное значение через S_k : $\min\{\lambda\} = S_k$. Известно, что для ортотропных пластин S_k не зависит от направления действия усилия сдвига. Для анизотропных пластин величины S_k зависят от направления действия S . Изменим на фиг. 1 направление

действия усилий на противоположное. Тогда однородная система линейных алгебраических уравнений (2.7) примет вид

$$\frac{\pi^2}{b^2}(D_{11}D_{22})^{1/2} \bar{N}_{mn} A_{mn} - \frac{32}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_p \sum_q A_{pq} [S + 2(D_{13}\lambda_m^2 + D_{23}\lambda_n^2)] \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} = 0 \quad (2.8)$$

Чем выше значения жесткостей D_{13} и D_{23} , тем больше разница между критическими усилиями, найденными соответственно из (2.7) и (2.8).

Численные результаты получены для композитных пластин из углепластика с размерами сторон $a = (0,4; 1,2)$ м, $b = 0,4$ м и толщиной $h = 10^{-3}$ м. Физико-механические характеристики материала принимались равными $E_1 = 180$ ГПа, $E_2 = 6,2$ ГПа, $G_{12} = 5,0$ ГПа, $\mu_{21} = 0,26$; $\bar{\tau}_1 = (+1000, 0; -400)$ МПа; $\bar{\tau}_2 = (+33; -100)$ МПа; $\bar{\tau}_{12} = 30$ МПа. На фиг. 2 показано влияние угла армирования φ на величины критических усилий S_k . Кривые 1, 2, 3 относятся к квадратной пластине. Кривая 1 соответствует изменению критического усилия сдвига при изменении угла φ от 0 до 90°, когда волокна материала сжаты; 2 — когда волокна материала растягиваются; 3 — когда пакет пластины состоит из симметрично уложенных под углами $\pm\varphi$ слоев. Аналогичные результаты для прямоугольной пластины показаны кривыми 4, 5, 6. Из графика следует, что при угле армирования $\varphi = 45^\circ$ значение S_k для квадратной пластины, в которой волокна сжаты, превосходит значение S_k пластины, в которой волокна растянуты, и значение S_k пластины, состоящей из симметрично уложенных под углами $\pm 45^\circ$ слоев, соответственно в 7,5 и 1,8 раза.

3. Рассмотрим закритическое поведение пластины. Минимальному собственному значению S_k , найденному из системы уравнений (2.7), соответствует собственный вектор $\{A\} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{mn}, \dots\}^T$. Найдем норму $\|A\|_\infty$ и нормированный вектор $(\|A\|_\infty)^{-1} \{A\} = \{q_{11}, \dots, q_{mn}, \dots\}^T$, после чего представим вектор $\{A\}$ в виде произведения неизвестной амплитуды прогиба A_0 и нормированного вектора $\{q\}$: $\{A\} = A_0 \{q_{11}, \dots, q_{mn}, \dots\}^T$. Проведенные ранее исследования [2] показали правомерность использования собственной формы при анализе закритического поведения сжатых композитных панелей. Используем этот же подход к исследованию закритического деформирования композитных пластин при сдвиге и представим прогиб в виде

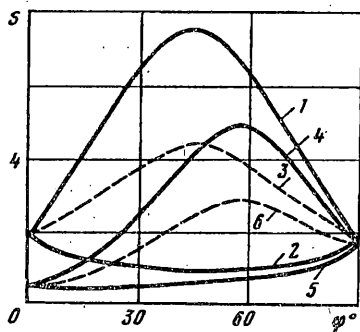
$$w = A_0 \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (3.1)$$

т. е. аппроксимируем функцию прогиба при закритическом деформировании функцией в форме произведения амплитуды A_0 и собственной формы. Преобразуем с учетом (3.1) найденные ранее зависимости (2.2) — (2.5) заменив в них суммирование по A_{mn} на суммирование по коэффициентам собственной формы q_{mn} , домноженным на неизвестную амплитуду A_0 . Например, для перемещения u будем иметь следующее равенство:

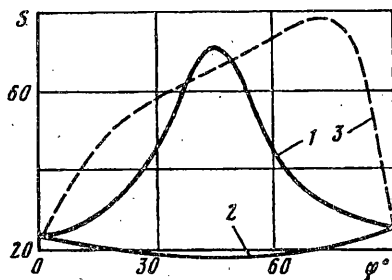
$$u = \left(-\frac{C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}}{C} S - \frac{A_0^2}{8} \sum_m \sum_n q_{mn}^2 \lambda_m^2 \right) x + \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{2C} S y + \\ + \frac{A_0^2}{16} \sum_m \sum_n q_{mn} (q_{mn} \bar{u}_1 + 2 \sum_l \sum_j q_{lj} \bar{u}_2)$$

Разрешающее уравнение задачи найдем из условия минимума полной энергии по A_0 :

$$-\frac{A_0}{4} \pi^2 \frac{a}{b} (\alpha_{xy} S - N^*) + \frac{A_0^3}{32} \frac{\pi^4}{ab} F = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\alpha_{xy} = -\frac{32}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_m \sum_n q_{mn} \sum_p \sum_q q_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)}$$

$$N^* = \frac{\pi^2}{b^2} (D_{11} D_{22})^{1/2} \sum_m \sum_n q_{mn}^2 \bar{N}_{mn} - \frac{64}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_m \sum_n q_{mn} (D_{13} \lambda_m^2 +$$

$$+ D_{23} \lambda_n^2) \sum_p \sum_q q_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)}$$

$$F = \frac{ab}{\pi^4} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_m \sum_n q_{mn} \sum_l \sum_j q_{lj} \bar{E} \right\} \left\{ \sum_m \sum_n q_{mn} \sum_l \sum_j q_{lj} \bar{N} \right\} dx dy$$

Уравнение (3.2) имеет три корня, один из которых ($A_0 = 0$) соответствует плоской форме равновесия пластины, а два других корня $A_0 = \pm 2 \frac{b}{\pi} \left[\frac{2(\alpha_{xy} S - N^*)}{F} \right]^{1/2}$ соответствуют изгибной форме равновесия пластины при сдвиге. При $S < S_k$ пластина может иметь только плоскую форму равновесия, поскольку два последних корня мнимые. При $S > S_k$ пластина наряду с плоской формой равновесия обладает изгибной формой равновесия. В точке бифуркации справедливо равенство $S = S_k$ или $S = N^*/\alpha_{xy}$.

Определив амплитуду $A_0 = f(S)$ из (3.2), далее можно найти деформации пластины, деформации e_1 , e_2 , e_{12} и напряжения σ_1 , σ_2 , τ_{12} и определить эквивалентные напряжения (1.6). Равенство $\sigma_* = 1$ дает возможность вычисления предельного усилия сдвига S , при котором произойдет разрушение наиболее нагруженного слоя.

Исследование несущей способности квадратной пластины отражено на фиг. 3. Кривая 1 относится к пластине, в которой волокна композита сжаты; 2 — к пластине, в которой волокна растягиваются; 3 — к пластине, пакет которой состоит из симметрично уложенных слоев с углами армирования $\pm \varphi$. Как видно из фиг. 3, при закритическом деформировании анизотропных пластин важным является направление сдвига. В тех случаях, когда при сдвиге волокна сжаты, несущая способность пластин выше несущей способности пластин с растягиваемыми волокнами более чем в 3,5 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
2. Азиков Н. С., Васильев В. В. Устойчивость и закритическое поведение сжатых композитных панелей // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 152—158.