МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 531.36

© 1993 г. Д. В. ЛЕБЕДЕВ, А. И. ТКАЧЕНКО

О «ТЕНЗОРНОМ СОГЛАСОВАНИИ» В ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Определение начальных условий для интегрирования уравнений, решаемых при функционировании прецизионных гравиинерциальных навигационных систем, и оценка коэффициентов заданной модели погрешностей чувствительных элементов требуют привлечения информации, точность которой сравнима с точностью самой гравиинерциальной системы. В качестве такой информации в публикуемой работе используются априорные сведения о тензоре вторых производных гравитационного потенциала. Сравнение представлений и инвариантов этого тензора в опорном и «приборном» базисах позволяет при выполнении соответствующих требований обусловленности оценить коэффициенты модели погрешностей чувствительных элементов и определить взаимную ориентацию упомянутых базисов.

1. О коррекции прецизионных гравиинерциальных навигационных систем. Потенциальная точность гравиинерциальных навигационных систем, в состав которых входят прецизионные градиентометры [1, 2], предполагается столь высокой, что может оказаться затруднительным отыскание эквивалентных по точности источников сторонней информации для коррекции вышеупомянутых систем и определения начальных значений параметров движения, подлежащих вычислению путем последующего интегрирования кинематических и навигационных уравнений. Это относится и к безгироскопным гравиинерциальным навигационным системам, в которых показания высокочувствительных пространственных ньютонометров используются для нахождения тензора вторых производных потенциала поля тяготения [3—5]. Получаемая таким образом градиентометрическая информация позволяет в принципе определить как ориентацию, так и скорость и местоположение объекта, на котором установлена гравиинерциальная система. Однако даже незначительные погрешности измерений существенно снижают точность нахождения кинематических и навигационных параметров.

В некоторых случаях для коррекции гравиинерциальных систем могут быть использованы априорные сведения о геопотенциале. Действительно, составляющая отображения тензора вторых производных гравитационного потенциала на опорный (например, географический) базис, соответствующая нормальному полю тяготения Земли, может быть с высокой точностью представлена в аналитическом виде и при наличии соответствующих карт и результатов съемок дополнена составляющей упомянутого отображения, связанной с локальными гравитационными аномалиями [6]. Представление же тензора вторых производных гравитационного потенциала в приборном базисе получается с помощью градиентометрических операций. Результатом сопоставления двух отображений одного и того же тензора могут быть соотношения относительно величин, подлежащих оценке в процессе коррекции гравиинерциальной системы.

В качестве примера ниже рассматривается задача определения ориентации приборного трехгранника безгироскопной гравиинерциальной системы, установленной на колеблющемся объекте.

2. Постановка задачи. Свяжем с недеформируемым объектом, совершающим сферические колебания вокруг неподвижной точки O вблизи земной поверхности, правый ортогональный трехгранник xyz. Пусть в точках M_0, M_1, M_2, M_3 объекта установлены связанные с его корпусом точечные пространственные ньютонометры, оси чувствительности которых параллельны (возможно, с точностью до малых отклонений) осям x, y, z. Точка M_0 является вершиной трехгранника xyz; точки M_i $(i = 1, 2, 3)$, по предположению, смещены относительно M_0 на расстояния ρ_i вдоль осей x, y, z соответственно. Положения же этих точек относительно точки O не известны. Введем местный опорный трехгранник $\xi\eta\zeta$ с вершиной в точке M_0. Таковым может быть, например, географический трехгранник, у которого ось ξ направлена по касательной к параллели на восток, ось η — по касательной к меридиану на север, ось ζ — по географической вертикали в зенит. Необходимо, зная координаты местоположения объекта, которые рассматриваются как координаты точки M_0, определить ориентацию трехгранника xyz относительно $\xi\eta\zeta$. Подчеркнем, что предварительное задание приближенных значений параметров взаимной ориентации упомянутых трехгранников не предусматривается.

3. Градиентометрические операции и инструментальные погрешности. Введем трехмерные векторы-столбцы $\mathbf{n}_i = \rho_i^{-1}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0)$, где $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_i$ — соответственно векторные показания ньютонометров, установленных в точках M_0, M_i. Сформируем матрицу $N = [\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3] = \{n_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. На основании результатов [3]:

$$N = \Phi(\omega_E^{\boldsymbol{\cdot}}) + \Phi^2(\omega_E) - T_E + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\, c_j \tag{3.1}$$

где $\omega_E = [\omega_1\omega_2\omega_3]'$ — вектор абсолютной угловой скорости объекта, представленный своими координатами в ортонормированном базисе E системы xyz (штрих означает транспонирование); $T_E = T_E{}'$ — отображение тензора T вторых производных потенциала поля тяготения Земли на базис E, т. е. (3×3)-матрица, составленная из вторых производных упомянутых потенциала по координатам x, y, z; $\Phi(\mathbf{r})$ — кососимметрическая (3×3)-матрица, которая ставится в соответствие трехмерному вектору $\mathbf{r}$ и задает в конкретном базисе векторное произведение $\Phi(\mathbf{r})\mathbf{p} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$.

Малые коэффициенты $c_j = \mathrm{const}$ характеризуют, в соответствии с заданной моделью погрешностей ньютонометров, уровень систематических ошибок, содержащихся в разностях $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0$ вследствие таких факторов, как смещения нуля, погрешности масштабных коэффициентов, отклонения осей чувствительности от их предполагаемых направлений, смещения точек M_i относительно их заданных положений. Матрицы Q_j с размерами 3×3 в общем случае зависят известным образом от времени t и параметров движения объекта.

Найдем трехмерный вектор $\omega_*^{\boldsymbol{\cdot}}$ с помощью формулы $\Phi(\omega_*^{\boldsymbol{\cdot}}) = 1/2(N - N')$. В соответствии с (3.1):

$$\Phi(\omega_*^{\boldsymbol{\cdot}}) = \Phi(\omega_E^{\boldsymbol{\cdot}}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} (Q_j - Q_j')\, c_j \tag{3.2}$$

Пусть в начальный момент $t = t^\circ$ задан трехмерный вектор $\omega_*(t^\circ) = \omega_E(t^\circ) + \Delta\omega_0$, где $\|\Delta\omega_0\| << \|\omega_E(t^\circ)\|$, $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы. Формируя значения $\omega_*^{\boldsymbol{\cdot}}$ с тактом съема $h << 1$ и интегрируя их при $t \geq t^\circ$ посредством квадратурных формул достаточно высокого порядка с начальным условием $\omega_*(t^\circ)$, получим аппроксимацию $\omega_*(t) = [\omega_1^*\omega_2^*\omega_3^*]'$ вектора $\omega_E(t)$. На основании (3.2):

$$\Phi(\omega_*) = \Phi(\omega_E) + \Phi(\Delta\omega_0) + \sum_{j=1}^{m} R_j(t)\, c_j$$

$$R_j(t) = \tfrac{1}{2} \int_{t^\circ}^{t} (Q_j - Q_j')\, dt \tag{3.3}$$

Будем по мере необходимости находить оценку T_E^* матрицы T_E в виде

$$T_E^* = -\tfrac{1}{2}(N + N') + \Phi^2(\omega_*) \tag{3.4}$$

Матрица $\delta T = T_E^* - T_E$ определяет ошибку нахождения тензора **T** вторых производных гравитационного потенциала Земли в виде отображения на базис E, вызванную погрешностями ньютонометров и ошибкой задания начальной угловой скорости. Из (3.1), (3.3), (3.4) следует, что в первом приближении

$$\delta T = \delta T' = \Phi(\omega_*)\,\Phi(\Delta\omega_0) + \Phi(\Delta\omega_0)\,\Phi(\omega_*) + \sum_{j=1}^{m} P_j c_j \tag{3.5}$$

$$P_j = -\tfrac{1}{2}(Q_j + Q_j') + \Phi(\omega_*)\,R_j - R_j\Phi(\omega_*)$$

4. Оценка коэффициентов модели погрешностей. Отображение тензора **T** на ортонормированный базис **J** системы координат $\xi\eta\zeta$ представим в виде $T_J = T_J^\circ(\varphi, h^\circ) + U$, где T_J° (нормальная часть T_J) — симметрическая (3×3)-матрица, элементы которой выражаются функционально через координаты (в данном случае через географическую широту φ и высоту h°) точки M_0; $U = U'$ — аномальная составляющая, которую также считаем доступной определению с надлежащей точностью по известным координатам местоположения объекта.

Так как T_E и T_J — представления одного и того же тензора в различных ортонормированных базисах, то инварианты этого тензора, выраженные через элементы матриц T_E и T_J, должны совпадать. Выразим инварианты I_1, I_2, I_3 тензора **T** через элементы матрицы T_J, обозначив последние $T_{\xi\xi}, T_{\xi\eta}, \ldots, T_{\zeta\zeta}$:

$$\begin{aligned} I_1 &= -(T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta} + T_{\zeta\zeta}) = 0 \\ I_2 &= T_{\xi\xi}T_{\eta\eta} + T_{\xi\xi}T_{\zeta\zeta} + T_{\eta\eta}T_{\zeta\zeta} - T_{\xi\eta}^2 - T_{\xi\zeta}^2 - T_{\eta\zeta}^2 \\ I_3 &= -\det T_J \end{aligned} \tag{4.1}$$

В первом соотношении (4.1) учтено уравнение Лапласа $\operatorname{tr} T_J = 0$. Аппроксимируем инварианты тензора **T** значениями I_1^*, I_2^*, I_3^*, выраженными через элементы матрицы T_E^* (3.4) по аналогии с (4.1). В первом приближении

$$\begin{aligned} &\delta T_{11} + \delta T_{22} + \delta T_{33} = -I_1^* \\ &\sum_{i=1}^{3} T_{ii}^* \delta T_{ii} + 2 \sum_{i<j} T_{ij}^* \delta T_{ij} = I_2 - I_2^* \\ &\sum_{i=1}^{3} A_{ii} \delta T_{ii} + 2 \sum_{i<j} A_{ij} \delta T_{ij} = I_3 - I_3^* \end{aligned} \tag{4.2}$$

где T_{ij}^*, δT_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ — элементы матриц T_E^*, δT; A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы T_E^*.

Подставляя в равенства (4.2), сформированные в дискретные моменты времени t_k, соответствующие выражения (3.5), получим систему линейных уравнений относительно величин $\Delta\omega_0$, c_j. На практике правые части уравнений (4.2) содержат невязки в виде нелинейных членов относительно $\Delta\omega_0$, c_j, а также возмущения, вызванные случайными составляющими погрешностей ньютонометров. Пусть сформирована избыточная система уравнений (4.2), не являющаяся плохо обусловленной [7]. Решив ее, например, методом наименьших квадратов, получим предварительную оценку величин $\Delta\omega_0$, c_j. После этого можно ввести коррекцию в значение ω_* и показания ньютонометров и, формируя и решая систему уравнений вида (4.2) на последующем промежутке измерений, уточнить искомые оценки за счет уменьшения влияния нелинейных членов.

5. Оценка параметров ориентации. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — упорядоченные некоторым образом собственные числа тензора T, которые вне полюсов несферической Земли различны. Существуют ортогональные матрицы V и W, такие, что [8]:

$$VT_JV' = WT_EW' = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},\ \det V = \det W = 1 \tag{5.1}$$

Столбцами матриц V' и W' являются представленные соответственно в базисах J и E ортонормированные собственные векторы тензора T, упорядоченные аналогично собственным значениям. Если C — ортогональная матрица направляющих косинусов, задающая преобразование координат из базиса E в базис J, то из (5.1) и зависимости $T_J = CT_EC'$ следует

$$C = V'W \tag{5.2}$$

Таким образом, для нахождения ориентации объекта (трехгранника xyz) относительно опорного трехгранника $\xi\eta\zeta$ надлежит, используя значение $T_J = \mathrm{const}$ и вычисляя текущие значения T_E^* по показаниям ньютонометров, оценить величины $\Delta\omega_0$, c_j путем решения системы уравнений (4.2), затем, внеся поправку в очередное или заново вычисленное значение T_E^*, найти упорядоченные одинаковым образом ортонормированные собственные векторы матриц T_J, T_E и воспользоваться формулой (5.2).

Матрица W играет роль преобразования C в случае, когда в качестве $\xi\eta\zeta$ выбран «гравитационный» трехгранник с осью ζ, совпадающей с направлением напряженности поля тяготения в точке M_0.

Случайные возмущения, присутствующие в показаниях ньютонометров, могут вызвать значительные ошибки при определении C по отдельно взятому значению T_E^*. Поэтому целесообразно оценивать C, используя значения T_E^* в дискретные моменты времени $t_l \in [t_*, t_f]$, где t_* — конечный момент промежутка оценивания $\Delta\omega_0$, c_j. Представим $C(t)$ в виде

$$C(t) = F'(t, t_*)\, C_* \Psi(t, t_*),\quad C_* = C(t_*) \tag{5.3}$$

где F, Ψ — ортогональные (3×3)-матрицы, вычисляемые путем интегрирования уравнений

$$F^{\cdot}(t, t_*) = F(t, t_*)\, \Phi(\mathrm{u}_J),\quad F(t_*, t_*)\, E_3 \tag{5.4}$$

$$\Psi^{\circ}(t, t_*) = \Psi(t, t_*)\, \Phi(\omega_E),\quad \Psi(t_*, t_*) = E_3 \tag{5.5}$$

где E_3 — единичная матрица третьего порядка, u_J — угловая скорость суточного вращения Земли, представленная в базисе J. Можно рассматривать равенства (5.3), относящиеся к различным моментам t_l, как систему линейных уравнений относительно C_*. Ввиду ортогональности матриц F, Ψ решение указанной системы методом наименьших квадратов сводится к осреднению значений соответствующих элементов матриц $C_{*l} = F(t_l, t_*)C(t_l)\Psi'(t_l, t_*)$, причем $C(t_l)$ находятся по формуле (5.2). Значение $C(t_l)$, относящееся к концу промежутка оценивания, вычисляется по формуле (5.3).

6. Интегрирование кинематических уравнений. Для обеспечения высокой точности определения ориентации трехгранника xyz необходима соответствующая точность численного интегрирования уравнения (5.5) на промежутке $[t_*, t_f]$ (уравнение (5.4) решается аналитически). В рассматриваемой задаче информация для интегрирования уравнения (5.5) имеет нетрадиционный вид значений $\omega_E^{\cdot}$, определяемых по показаниям ньютонометров на основании формул (3.1), (3.2). Укажем возможную последовательность операций при интегрировании уравнения (5.5) или эквивалентных ему кинематических уравнений сферического движения твердого тела с шагом $H = 2sh$ $(h = \text{const}, s = 1, 2, \ldots)$.

Пусть получены значения $\omega_k^{\cdot} = \omega_E(t_k)$ вектора $\omega_E^{\cdot}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2s;$ $t_k = t_{k-1} + h)$ и, кроме того, известен вектор $\omega_0 = \omega_E(t_0)$. Необходимо, зная решение уравнения (5.5) при $t = t_0$, найти значение этого решения в момент $t_{2s} = t_0 + H$. Выполнив интегрирование функции $\omega_E^{\cdot}(t)$ с помощью соответствующей формулы Ньютона — Котеса [9], найдем $\omega_{2s} = \omega_E(t_{2s})$ с ошибкой на шаге порядка h^{2s+3}. Вычислим также значение $\omega_s = \omega_E(t_s)$ с локальной ошибкой порядка h^{2s+2}, а значения $\omega_s^{\cdot\cdot}h, \ldots, \omega_s^{(2s+1)}h^{2s}$ с ошибками не ниже чем $(2s+1)$-го порядка относительно h. Так, при $s = 2$ имеем

$$\omega_2^{\cdot\cdot}h = 2/3\,(\omega_3^{\cdot} - \omega_1^{\cdot}) - 1/2\,(\omega_4^{\cdot} - \omega_0^{\cdot}) + O\,(h^5)$$

. . . .

$$\omega_2^{(5)}h^4 = \omega_4^{\cdot} + \omega_0^{\cdot} + 6\omega_2^{\cdot} - 4\,(\omega_3^{\cdot} + \omega_1^{\cdot}) + O\,(h^6)$$

$$\omega_2 = 1/2\,(\omega_0 + \omega_4) - h\,(2\omega_2^{\cdot\cdot}h + 2/3\,\omega_2^{(4)}h^3) + O\,(h^6)$$

Далее возможны следующие варианты алгоритма вычислений:

1. Найдем значения $\omega_n = \omega_E(t_n)$ $(n = 1, \ldots, 2s - 1)$ вектора ω_E с ошибкой порядка h^{2s+2}, аппроксимируя их отрезками рядов Тейлора в окрестности $t = t_s$. Эти значения можно использовать в формулах интегрирования кинематических уравнений сферического движения, допускающих на шаге $H = 2sh$ ошибку порядка h^{2s+3}.

2. Выразим через $\omega_s, \omega_s^{\cdot}, \ldots, \omega_s^{(2s)}h^{2s-1}$ с ошибками порядка h^{2s+2} приращения θ_i интегралов от $\omega_E(t)$ на каждом из $2s$ тактов съема $[t_i - h, t_i]$ $(i = 1, \ldots, 2s)$, образующих шаг интегрирования $[t_0, t_{2s}]$. Так при $s = 2$:

$$\theta_1 = \omega_2 h + h^2\,(-3/2\,\omega_2^{\cdot} + 7/6\,\omega_2^{\cdot\cdot}h - 5/8\,\omega_2^{\cdot\cdot\cdot}h^2 + 31/120\,\omega_2^{(4)}h^3) + O\,(h^6)$$

$$\theta_2 = \omega_2 h + h^2\,(-1/2\,\omega_2^{\cdot} + 1/6\,\omega_2^{\cdot\cdot}h - 1/24\,\omega_2^{\cdot\cdot\cdot}h^2 + 1/120\,\omega_2^{(4)}h^3) + O\,(h^6)$$

. . . .

Такая точность вычисления θ_i достаточна для интегрирования кинематических уравнений с помощью известных алгоритмов [10] с ошибкой на шаге порядка h^{2s+3}.

3. Решение кинематических уравнений сферического движения на шаге $H = 2sh$ можно с ошибкой порядка h^{2s+3} выразить непосредственно через значения $\omega_s, \omega_s^{\cdot}, \ldots, \omega_s^{(2s)}h^{2s-1}$ [11]. Так, при $s = 2$ векторная часть f кватерниона, определяющего решение уравнения (5.5) на шаге $[t_0, t_4]$, формируется в виде

$$\mathrm{f} = (1/2 - 1/48\,\|\mathrm{f}_1\|^2 + 1/3840\,\|\mathrm{f}_1\|^4)\,\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_3 + \mathrm{f}_4 + O\,(h^7)$$

$$\mathrm{f}_1 = 4\omega_2 h + 8/3\,\omega_2^{\cdot\cdot}h^3 + 8/15\,\omega_2^{(4)}h^5$$

$$\mathbf{f}_2 = 8/3\, h^3 \omega_2 \times \omega_2^{\boldsymbol{\cdot}} - 16/15\, h^5 \omega_2^{\boldsymbol{\cdot}} \times \omega_2^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + 8/15\, h^5 \omega_2 \times \omega_2^{\boldsymbol{\cdot\cdot\cdot}}$$

$$\mathbf{f}_3 = 32/45\, h^5\, [\omega_2 \times (\omega_2 \times \omega_2^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}) - 3\omega_2^{\boldsymbol{\cdot}} \times (\omega_2 \times \omega_2^{\boldsymbol{\cdot}})\,]$$

$$\mathbf{f}_4 = 1/15\, h^3 \|\mathbf{f}_1\|^2\, \omega_2^{\boldsymbol{\cdot}} \times \omega_2$$

Скалярная часть этого кватерниона находится из условия нормировки.

7. **Модельный пример.** Примем, что аномальная составляющая U тензора T в точке M_0 пренебрежимо мала. Координаты тензора $T_J{}^\circ$ в географическом базисе представим, пренебрегая величинами выше первого порядка малости относительно сжатия нормального эллипсоида:

$$T_{\xi\xi}{}^\circ = (-g_e/a)\,[1 - e^2 \sin^2 \varphi + q\,(1 + 5/2 \sin^2 \varphi) - 3h^\circ/a] \tag{7.1}$$

$$T_{\eta\eta}{}^\circ = (-g_e/a)\,[1 + e^2 - 2e^2 \sin^2 \varphi + 7/2 q \sin^2 \varphi - 3h^\circ/a]$$

$$T_{\zeta\zeta}{}^\circ = (g_e/a)\,[2 + e^2\,(1 - 3 \sin^2 \varphi) + q\,(1 + 6 \sin^2 \varphi) - 6h^\circ/a]$$

$$T_{\eta\zeta}{}^\circ = (g_e/a)\,(1/2 e^2 - 2q) \sin 2\varphi, \quad T_{\xi\eta}{}^\circ = T_{\xi\zeta}{}^\circ = 0$$

где φ — географическая широта места нахождения объекта; h° — высота точки M_0 над уровнем моря; a, e^2 — большая полуось и квадрат эксцентриситета нормального эллипсоида; g_e — величина ускорения силы тяжести на экваторе; $q = ua^2/g_e$; u — величина угловой скорости суточного вращения Земли. При получении выражений (7.1) использованы формулы (2.117) из [12].

Пусть единственным источником систематических ошибок в (3.1) является задание вместо величины ρ_i их приближенных значений ρ_i^*. Вызванные этим фактором ошибки определения элементов T_E^* по формуле (3.4) в первом приближении имеют вид

$$\delta T_{11} = (n_{11} - \omega_2^* s_{31} + \omega_3^* s_{21})\, d_1 - \omega_3^* s_{12} d_2 + \omega_2^* s_{13} d_3$$

$$\delta T_{12} = 1/2\,[\,(n_{21} + \omega_1^* s_{31})\, d_1 + (n_{12} - \omega_2^* s_{32})\, d_2 + (\omega_2^* s_{23} - \omega_1^* s_{13})\, d_3\,] \tag{7.2}$$

. . . .

где $d_i = \rho_i^{-1} - \rho_i^{*-1}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$; S_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ — приращения интегралов от элементов n_{ij} матрицы N на промежутке $[t^\circ, t]$, которые могут быть вычислены с достаточной точностью посредством формулы прямоугольников с шагом h. Малые величины d_i вместе с $\Delta\omega_0$ подлежат оценке путем решения уравнений (4.2).

При моделировании этой задачи имитировался следующий закон изменения $\omega_E : \omega_i = \alpha_i \sin \nu_i t$ $(i = 1, 2, 3)$, $\nu_1 = 1\ \text{с}^{-1}$, $\nu_2 = \nu_3 = 0{,}31\ \text{с}^{-1}$, $\alpha_1 = 0{,}3\, e^{-1}$, $\alpha_2 = 0{,}03\ \text{с}^{-1}$, $\alpha_3 = 0{,}015\ \text{с}^{-1}$. Начальное положение трехгранника xyz относительно $\xi\eta\zeta$ при $t^\circ = 0$ задавалось как поворот вокруг вертикали на 60° с последующим поворотом вокруг оси y на угол 5°.

Матрица T_J находилась по формулам (7.1) при $\varphi = 0{,}825$, $h^\circ = 5$ м. Полагалось $\rho_i = 1$ м, $\rho_i^* - \rho_i = 10^{-3}$ м $(i = 1, 2, 3)$; значения элементов вектора $\Delta\omega_0$ задавались в пределах $5 \cdot 10^{-8}\ \text{с}^{-1}$—$5 \cdot 10^{-7}\ \text{с}^{-1}$. Сигналы ньютонометров формировались с тактом съема $h = 0{,}01$ с; в каждую из трех компонент векторов $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_i$ вводилась нормально распределенная аддитивная случайная ошибка с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 10^{-10} м/с^2. Квадратуры от $\omega_*^{\boldsymbol{\cdot}}$ находились по формулам порядка 6 или 8. Формирование уравнений (4.2) относительно d_i, $\Delta\omega_0$ и обновление соответствующей системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов выполнялись через каждые 0,12 с. Весь процесс оценивания величин $\Delta\omega_0$, ρ_i с повторными уточнениями, как указано в п. 4, занимал 120—130 с, причем элементы вектора $\Delta\omega_0$ оценивались с остаточными ошибками порядка 10^{-10} c^{-1}, а значения ρ_i — с ошибками порядка 10^{-8} м. После этого выполнялось оценивание параметров ориентации объекта на основании (5.2), (5.3) с нахождением значений $C(t_l)$, C_{*l} через каждые 0,12 с, причем для интегрирования кинематических уравнений использовались формулы порядка 6. В результате осреднения на промежутке 10—20 с положение вертикали определялось с точностью порядка 1$''$, ошибки же в азимуте имели порядок единиц угловых минут, в то время как отдельно взятым значениям $C(t_l)$ соответствовали ошибки в азимуте порядка единиц градусов. Заметим, что нескомпенсированные ошибки задания величин ρ_i порядка 10^{-6} м и постоянные ошибки задания угловой скорости порядка 10^{-8} c^{-1} приводили к ошибкам определения вертикали порядка угловых минут и ошибкам в азимуте порядка единиц и десятков градусов.

Локальные гравитационные аномалии и малые ошибки задания координат точки M_0 порождают не зависящие от t составляющие невязок во втором и третьем уравнениях (4.2). Эти составляющие в общем случае недоступны оценке совместно с $\Delta\omega_0$, c_j. Однако их влияние можно учесть, увеличив число неизвестных в уравнениях (4.2) на 2 и введя во второе и третье уравнения соответствующие члены с постоянными коэффициентами, в выборе которых допустим определенный произвол. Это позволяет сохранить точность оценивания $\Delta\omega_0$, c_j при надлежащей обусловленности решаемой системы уравнений.

В ряде вариантов моделирования рассматриваемой задачи элементы матрицы U задавались с учетом симметрии и уравнения Лапласа как значения случайной величины, равномерно распределенной в промежутке $[-3\cdot10^{-10}$ c^{-2}, $3\cdot10^{-10}$ $c^{-2}]$. При этом ошибки оценивания величин $\Delta\omega_0$, ρ_i и ошибки определения вертикали возрастали в среднем на порядок, а ошибки в азимуте — в 2—3 раза по сравнению с соответствующими ошибками при $U=0$. При учете влияния гравитационных аномалий путем ввода двух дополнительных неизвестных в (4.2) точность оценок повышалась практически до уровня, имевшего место при $U=0$.

Результаты, подобные приведенным, были получены и в случае, когда в качестве источника систематических ошибок измерений вводились постоянные смещения нуля ньютонометров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moody M. V., Chan H. A., Paik H. J.* Superconducting gravity gradiometer for space and terrestrial applications//J. Appl. Phys. 1986. V. 60. No. 12. P. 4308—4315.
2. *Chan H. A., Paik H. J.* Superconducting gravity gradiometer for sensitive gravity measurements. I. Theory//Phys. Review, D. Particles and Fields. 1987. V. 35. No. 12. P. 3551—3571.
3. *Андреев В. Д., Девянин Е. А., Демьяновский А. П.* К теории инерциальных систем, не содержащих гироскопических чувствительных элементов//Инж. журнал. МТТ. 1966. № 1. С. 14—19.
4. *Васин М. Г.* Об одном способе представления основного уравнения инерциальной навигации при использовании градиентометрических измерений//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 9—18.
5. *Голиков В. В.* Общий метод определения характеристик гравитационного поля Земли с помощью гравиинерциальных измерений, проводимых на КА//Космич. исследования. 1990. Т. 28. Вып. 5. С. 676—684.
6. *Жбанов Ю. К., Климов Д. М., Урюпин М. А.* Математическое моделирование работы инерциальной навигационной системы в аномальном гравитационном поле//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 13—16.
7. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
9. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. М.: Наука, 1976. 304 с.

10. *Панов А. П.* Методы шестого порядка точности для вычисления координат вектора ориентации по квазикоординатам//Кибернетика и вычислительная техника. 1986. Вып. 69. С. 47—52.

11. *Панов А. П.* Синтез методов вычислений координат вектора ориентации//Кибернетика и вычислительная техника. 1979. Вып. 43. С. 122—129.

12. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 580 с.

Киев

Поступила в редакцию
28.VI.1991