МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.3 : 534.1

© 1993 г. И. В. АНДРИАНОВ, Е. Г. ХОЛОД

# ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ОБОЛОЧЕК

Показано, что концепции динамического краевого эффекта В. В. Болотина может трактоваться как промежуточная асимптотика. Рассмотрен пример нелинейных колебаний пологой сферической оболочки. Получено эффективное аналитическое решение.

Концепция промежуточной асимптотики, выдвинутая в [1, 2], «частично играет роль, утраченную принципом суперпозиции» [3]. Суть ее сводится к построению некоторых частных автомодельных решений нелинейных задач, являющихся асимптотиками широкого класса других решений. В статье [1] и монографии [2] приведено много примеров подобных решений. Между тем, метод динамического краевого эффекта В. В. Болотина [4] является, по сути, примером промежуточной асимптотики. Обобщение этого подхода, проведенное в [5—8], можно пояснить следующим образом. Для некоторых граничных условий могут быть построены точные частные решения задач о нелинейных колебаниях пластин и пологих оболочек (одночастотные режимы [9] или нормальные формы нелинейных колебаний [10]). Оказывается, при иных граничных условиях эти решения являются асимптотиками других решений во внутренней области, а вблизи границ образуются локализованные состояния — динамические краевые эффекты.

Ниже подобное решение построено для задачи о нелинейных колебаниях пологой сферической оболочки

1. Приближенные уравнения, описывающие нелинейные колебания пологой сферической оболочки, имеют вид [11]:

$$D\Delta^4 w - hR^{-1}\nabla^2 F - (N - N_1)\nabla^2 w + \rho h^2 \partial^2 w/\partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla^4 F + ER^{-1}\nabla^2 w = 0$$

$$N = 6D/(h^2 a_1 a_2)\int_0^{a_2}\int_0^{a_1}[(\partial w/\partial x_1)^2 + (\partial w/\partial x_2)^2]\,dx_1\,dx_2$$

$$N_1 = 12D(1+\nu)/(h^2 a_1 a_2 R)\int_0^{a_2}\int_0^{a_1} w\,dx_1\,dx_2$$

где $x_1$, $x_2$ — координаты; $u_1(u_2)$ — перемещения в направлении $x_1(x_2)$; $w$ — прогиб; $R$ — радиус оболочки; $a_1(a_2)$ — размер сферической панели в плане в направлении $x_1(x_2)$; $h$ — толщина оболочки; $E$ — модуль Юнга; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $D = 1/12\,Eh^3/(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость; $\rho$ — плотность материала оболочки; $t$ — время; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$; $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$; $F$ — функция Эри: $f$ — амплитуда $w$; $f_1(f_2)$ — амплитуда; $u_1(u_2)$; $k_1(k_2)$ — длина волны в направлении $x_1(x_2)$; $x_{10}(x_{20})$ — сдвиг по фазе в направлении $x_1(x_2)$; $\zeta_i(t)$ — временные функции ($i = 1, 2$).

Относительно перемещений систему (1.1) можно записать так

$$\partial^2 u_1/\partial x_1^2 + 0{,}5(1-\nu)\,\partial^2 u_1/\partial x_2^2 + 0{,}5(1+\nu)\,\partial^2 u_2/\partial x_1\,\partial x_2 - (1+\nu)R^{-1}\partial w/\partial x_1 = 0 \tag{1.2}$$

$$\partial^2 u_2/\partial x_2^2 + 0{,}5\,(1-\nu)\,\partial^2 u_2/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1+\nu)\,\partial^2 u_1/\partial x_1\,\partial x_2 -$$

$$-(1+\nu)\,R^{-1}\partial w/\partial x_2 = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla^4 w - D^{-1}N\nabla^2 w + D^{-1}N_1\nabla^2 w - 12h^{-2}R^{-1}(1+\nu)\,[\partial u_2/\partial x_2 + \partial u_1/\partial x_1 - 2R^{-1}w] +$$

$$+\rho h^2 D^{-1}\partial^2 w/\partial t^2 = 0 \tag{1.4}$$

Уравнения (1,1) или (1,2)—(1,4) справедливы при большой изменяемости формы по пространственным переменным, поэтому их можно использовать в методе В. В. Болотина.

Рассмотрим случай жесткого защемления краев сферической панели

$$u_1 = u_2 = w = \partial w/\partial x_1 = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ a_1 \tag{1.5}$$

$$u_1 = u_2 = w = \partial w/\partial x_1 = 0 \text{ при } x_2 = 0,\ a_2 \tag{1.6}$$

Следуя [4], функцию $F$ и прогиб $w$ представим в виде:

$$w(x_1,\ x_2,\ t) \equiv w_0 = f_1 \cos k_1(x_1 - x_{10}) \sin k_2(x_2 - x_{20})\,\xi_1(t) \tag{1.7}$$

$$F(x_1,\ x_2,\ t) \equiv F_0 = f_2 \cos k_1(x_1 - x_{10}) \sin k_2(x_2 - x_{20})\,\xi_2(t) \tag{1.8}$$

С учетом (1,7)—(1,8) из исходных соотношений получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения временной функции $\xi_1$ и конечное соотношение, связывающее $\xi_1$ и $\xi_2$;

$$\partial^2\xi_1/\partial t^2 + \omega^2\,(1 + \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_1^2)\,\xi_1 = 0 \tag{1.9}$$

$$\xi_2 = Ef_1k_1^2\,(Rf_2)^{-1}\,(k_1^2 + k_2^2)^{-2}\xi_1 \tag{1.10}$$

$$\omega^2 = D\rho^{-1}h^{-2}\Omega,\quad \Omega = (k_1^2 + k_2^2)^2 + 12\,(1-\nu^2)\,(hR)^{-2}$$

$$\gamma_1 = -12A_3f_1\,(1+\nu)\,(\Omega Rh^2a_1a_2)^{-1}\,(k_1^2 + k_1^2),\quad \gamma_2 = 1{,}5f_1^2\,(\Omega h^2a_1a_2)^{-1}\,(k_1^2 + k_2^2)\,\times$$

$$\times[k_1^2\,(a_1 - A_1)\,(a_2 - A_2) + k_2^2\,(a_1 + A_1)\,(a_2 + A_2)],\quad A_1 = 0{,}5k_1^{-1}\,[\sin 2k_1\,(a_1 + x_{10}) +$$

$$+\sin 2k_1x_{10}],\quad A_2 = 0{,}5k_2^{-1}\,[\sin 2k_2\,(a_2 - x_{20}) + \sin 2k_2x_{20}]$$

$$A_3 = -(k_1k_2)^{-1}\,[\sin k_1\,(a_1 - x_{10}) + \sin k_1x_{10}]\,[\cos k_2\,(a_2 - x_{20}) - \cos k_2x_{20}]$$

При начальных условиях $\xi = 0$, $d\xi/dt = 1$ при $t = 0$ (либо $\xi = 1$, $d\xi/dt = 0$ при $t = 0$) решение уравнения (1.9) выражается через эллиптические функции Якоби [9]. Обозначим это решение через $\varphi(t)$. Тогда формула (1.7) примет вид

$$w_0 = f_1 \cos k_1\,(x_1 - x_{10}) \sin k_2\,(x_2 - x_{20})\,\varphi\,(t) \tag{1.11}$$

С учетом (1.11) из уравнений (1.2)—(1.3) получим асимптотические выражения для тангенциальных перемещений

$$u_{10} = f_3 \sin k_1\,(x_1 - x_{10}) \sin k_2\,(x_2 - x_{20})\,\varphi\,(t) \tag{1.12}$$

$$u_{20} = f_4 \cos k_1\,(x_1 - x_{10}) \cos k_2\,(x_2 - x_{20})\,\varphi\,(t) \tag{1.13}$$

$$f_3 = 2f_1R^{-1}\,(k_2 - k_1)^{-1}$$

$$f_4 = 4f_1R\,[\,(1+\nu)\,k_1k_2\,(k_2 - k_1)\,]^{-1}\,[k_1k_2 + 0{,}5\,(1-\nu)\,(k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2)\,]$$

Краевые условия (1.5)—(1.6) пока не выполнены. Поэтому будем рассматривать выражения (1.11)—(1.13) как решение задачи в области, удаленной от границ. Это решение принято называть основным состоянием. В зонах, прилегающих непосредственно к краям оболочки, построим состояния (быстро затухающие при удалении во внутреннюю область) типа динамических краевых эффектов. Использование этих корректирующих решений даст возможность удовлетворить заданным граничным условиям и доопределить основное состояние (найти значения параметров $k_1$, $k_2$, $x_{10}$, $x_{20}$)

2. Перемещения оболочки представим следующим образом

$$u_1 = u_{10} + u_{1k}, \quad u_2 = u_{20} + u_{2k}, \quad w = w_0 + w_k \tag{2.1}$$

После подстановки (2.1) в исходные соотношения (1.2)—(1.4), имеем

$$\partial^2 (u_{10} + u_{1k})/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1 - \nu)\,\partial^2 (u_{10} + u_{1k})/\partial x_2^2 + 0{,}5\,(1 + \nu)\,\partial^2 (u_{20} + u_{2k})/$$
$$/\partial x_1\,\partial x_2 - (1 + \nu)\,R^{-1}\partial\,(w_0 + w_k)/\partial x_1 = 0$$
$$\partial^2(u_{20} + u_{2k})/\partial x_2^2 + 0{,}5(1 - \nu)\partial^2 (u_{20} + u_{2k})/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1 + \nu)\,\partial^2 (u_{10} + u_{1k})/\partial x_1\,\partial x_2 -$$
$$- (1 + \nu)\,R^{-1}\partial\,(w_0 + w_k)/\partial x_2 = 0 \tag{2.2}$$
$$\nabla^4 (w_0 + w_k) - (6/h^2 a_1 a_2)\Big\{ \nabla^2 (w_0 + w_k) \int_0^{a_2}\int_0^{a_1} [\,(\partial\,(w_0 + w_k)/\partial x_1)^2 +$$
$$+ (\partial\,(w_0 + w_k)/\partial x_2)^2\,]\,dx_1\,dx_2 - 2R^{-1}\,(1 + \nu)\nabla^2 (w_0 + w_k) \int_0^{a_2}\int_0^{a_1} (w_0 + w_k)\,dx_1\,dx_2\Big\} -$$
$$-12h^{-2}R^{-1}\,(1 + \nu)\,[\partial\,(u_{10} + u_{1k})/\partial x_1 + \partial\,(u_{20} + u_{2k})/\partial x_2 - 2R^{-1}\,(w_0 + w_k)\,] +$$
$$+ \rho h^2 D^{-1}\partial^2 (w_0 + w_k)/\partial t^2 = 0$$

В уравнениях (2.2) оценим порядки интегральных слагаемых по отношению к $k_1 \sim k_2 >> 1$ (на основе соображений, выдвинутых в [5—6]). После отбрасывания второстепенных слагаемых придем к таким приближенным соотношениям:

$$\partial^2 u_{1k}/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1 - \nu)\partial^2 u_{1k}/\partial x_2^2 + 0{,}5\,(1 + \nu)\,\partial^2 u_{2k}/\partial x_1\,\partial x_2 - (1 + \nu)R^{-1}\partial w_k/\partial x_1 = 0 \tag{2.3}$$

$$\partial^2 u_{2k}/\partial x_2^2 + 0{,}5\,(1 - \nu)\,\partial^2 u_{2k}/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1 + \nu)\,\partial^2 u_{1k}/\partial x_1\,\partial x_2 -$$
$$- (1 + \nu)\,R^{-1}\partial w_k/\partial x_2 = 0 \tag{2.4}$$
$$\nabla^4 w_k - \Omega\nabla^2 w_k\,(k_1^2 + k_2^2)^{-1}\varphi(t)\,[\gamma_2\varphi\,(t) - \gamma_1] - 12h^{-2}R^{-1}(1 + \nu)\,[\partial u_{1k}/\partial x_1 + \partial u_{2k}/\partial x_2 -$$
$$- 2R^{-1} w_k] + \rho h^2 D^{-1}\partial^2 w_k/\partial t^2 = 0 \tag{2.5}$$

Таким образом, динамический краевой эффект приближенно описывается линейными уравнениями с переменными коэффициентами (2.3)—(2.5). Временная и пространственные переменные в этих уравнениях точно не разделяются. Будем исследовать одночастотные режимы движения [9] (нормальные формы нелинейных колебаний [10]). В соответствии с этим перемещения краевого эффекта приближенно представим в виде:

$$u_{1k}\,(x_1, x_2, t) \approx U_1\,(x_1, x_2)\,\varphi\,(t) \tag{2.6}$$
$$u_{2k}\,(x_1, x_2, t) \approx U_2\,(x_1, x_2)\,\varphi\,(t), \quad w_k\,(x_1, x_2, t) \approx W\,(x_1, x_2)\,\varphi\,(t)$$

Пользуясь (2.6), исключим время $t$ из уравнений (2.3)—(2.5) методом Л. В. Канторовича [12]. В результате получим уравнения с постоянными коэффициентами:

$$d_{11}U_1 + d_{12}U_2 + d_{13}W = 0, \quad d_{21}U_1 + d_{22}U_2 + d_{23}W = 0 \tag{2.7}$$
$$d_{31}U_1 + d_{32}U_2 + d_{33}W = 0$$

$$d_{11} = \partial^2/\partial x_1^2 + 0{,}5\,(1-\nu)\,\partial^2/\partial x_2^2;\quad d_{12} = d_{21} = 0{,}5\,(1+\nu)\,\partial^2/\partial x_1\,\partial x_2$$

$$d_{13} = -(1+\nu)\,R^{-1}\partial/\partial x_1;\quad d_{22} = \partial^2/\partial x_2^2 + 0{,}5\,(1-\nu)\,\partial^2/\partial x_1^2$$

$$d_{23} = -(1+\nu)\,R^{-1}\partial/\partial x_2;\ d_{31} = -12\,(1+\nu)\,R^{-1}\partial/\partial x_1;\ d_{32} = -12\,(1+\nu)\,R^{-1}\partial/\partial x_2$$

$$d_{33} = h^2\nabla^4 - \Omega\,(k_1^2 + k_2^2)^{-1}\lambda h^2\,(\gamma_2 c_1 + \gamma_1 c_2)\,\nabla^2 + 24\,(1+\nu)\,R^{-2} + \rho h^2 D^{-1}\lambda c_3$$

$$c_1 = \int_0^\tau \varphi^3(t)\,dt;\quad c_2 = \int_0^\tau \varphi^2(t)\,dt;\quad c_3 = \int_0^\tau (d^2\varphi/dt^2)\,dt,\quad \lambda^{-1} = \int_0^\tau \varphi\,dt$$

Система уравнений (2.7) операторным методом сводится к одному разрешающему уравнению относительно некоторой функции $\Phi$:

$$D^*\Phi = 0 \tag{2.8}$$

где $D^*$ — определитель системы (2.7).

Каждому решению уравнения (2.8) соответствует следующий интеграл системы (2.7):

$$U_1 = 0{,}5\,(1-\nu)\,D_{13}^*\Phi \tag{2.9}$$

$$U_2 = 0{,}5\,(1-\nu)\,D_{23}^*\Phi,\quad W = 0{,}5\,(1-\nu)\,D_{33}^*\Phi$$

где $D_{i3}^*$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — миноры определителя $D^*$.

Функции $U_1$, $U_2$, $W$, соответствующие краевому эффекту, локализованному в окрестности границы $x_1 = 0$, представим следующим образом:

$$U_1 = \vartheta_1(x_1)\sin k_2(x_2 - x_{20}) \tag{2.10}$$

$$U_2 = \vartheta_2(x_1)\cos k_2(x_2 - x_{20}),\quad W = \vartheta(x_1)\sin k_2(x_2 - x_{20})$$

Для нахождения $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.7) (где $\partial/\partial x_2 \to k_2$, $\partial^2/\partial x_2^2 \to k_2^2$).

Характеристическое уравнение, соответствующее разрешающему уравнению (2.8), записанному вблизи края $x_1 = 0$, таково

$$(p^2 + k_1^2)\,(h^2p^6 + a_{11}p^4 + a_{12}p^2 + a_{13}) = 0 \tag{2.11}$$

Два корня уравнения (2.11) $p_7 = +ik_1$ и $p_8 = -ik_1$ $(i^2 = -1)$ соответствуют основному состоянию и исключаются из рассмотрения при построении краевого эффекта. Отвечающие краевому эффекту действительные корни уравнения (2.11):

$$p_{4,1} = \pm\,[-2r\cos(\omega_1/3) + a_{11}/3]^{0,5}$$

$$p_{5,2} = \pm\,[2r\cos((\pi - \omega_1)/3) + a_{11}/3]^{0,5} \tag{2.12}$$

$$p_{6,3} = \pm\,[2r\cos((\pi + \omega_1)/3) + a_{11}/3]^{0,5}$$

$$\omega_1 = \arccos(qr^{-3});\quad q = a_{11}^3/27 - a_{11}a_{12}/6 + a_{13}/2$$

$$r = \operatorname{sign}(q)\,(3a_{12} - a_{11}^2)^{0,5}/3$$

С учетом (2.12) решение уравнения (2.11) вблизи рассматриваемого края оболочки запишется так

$$\Phi = \sum_{j=1}^{6} C_{1j}\exp(p_j x_1) \tag{2.13}$$

В формуле (2.13) $C_{1j}$ $(j = 1 — 6)$ — подлежащие определению постоянные интегрирования.

Имея решение (2.13) и используя формулы (2.10), (2.9) и (2.6), получим следующие выражения для перемещений краевого эффекта в рассматриваемой области

$$u_{1k}^{(1)} = c_0 R \left[ \sum_{j=1}^{6} C_{1j} p_j^2 (\nu p_j + k_2^2) \exp(p_j x_1) \right] \sin k_2 (x_2 - x_{20}) \varphi(t)$$

$$u_{2k}^{(1)} = c_0 R k_2 \left[ \sum_{j=1}^{6} C_{1j} (k_2^2 - (2 + \nu) p_j^2] \exp(p_j x_1) \right] \sin k_2 (x_2 - x_{20}) \varphi(t)$$

$$w_k^{(1)} = \left[ \sum_{j=1}^{6} C_{1j} (p_j^2 - k_2^2)^2 \exp(p_j x_1) \right] \sin k_2 (x_2 - x_{20}) \varphi(t)$$

Аналогично строится корректирующее решение вблизи границы $x_2 = 0$ (компонентам этого состояния ниже соответствует верхний индекс (2)).

3. В соответствии с введенными обозначениями запишем граничные условия (1.5)—(1.6) так

при $x_1 = 0$ $u_{10} + u_{1k}^{(1)} = 0$:

$$u_{20} + u_{2k}^{(1)} = 0, \quad w_0 + w_k^{(1)} = 0 \tag{3.1}$$

$$\partial w_0 / \partial x_1 + \partial w_k^{(1)} / \partial x_1 = 0 \tag{3.2}$$

при $x_2 = 0$ $u_{10} + u_{1k}^{(2)} = 0$:

$$u_{20} + u_{2k}^{(2)} = 0, \quad w_0 + w_k^{(2)} = 0 \tag{3.3}$$

$$\partial w_0 / \partial x_2 + \partial w_k^{(2)} / \partial x_2 = 0 \tag{3.4}$$

Присоединим к последним условиям затухания краевых эффектов при удалении от края во внутреннюю область

$$u_{1k}^{(1)}, u_{2k}^{(1)}, w_k^{(1)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to \infty \tag{3.5}$$

$$u_{1k}^{(2)}, u_{2k}^{(2)}, w_k^{(2)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \infty$$

Условия (3.1), (3.3) и (3.5) служат для определения постоянных интегрирования в полученных асимптотических оценках для компонент динамических краевых эффектов. Из соотношений (3.2), (3.4) имеем

$$x_{10} = k_1^{-1} \operatorname{arctg} \left\{ - \sum_{j=1}^{3} C_{1j} p_j (p_j^2 - k_2^2)^2 \left[ k_1 \sum_{j=1}^{3} C_{1j} (p_j^2 - k_2^2)^2 \right]^{-1} \right\}$$

$$x_{20} = k_2^{-1} \operatorname{arctg} \left\{ k_2 \sum_{j=1}^{3} C_{2j} (s_j^2 - k_1^2)^2 \left[ \sum_{j=1}^{3} C_{2j} s_j (s_j^2 - k_1^2)^2 \right]^{-1} \right\} \tag{3.6}$$

Разделим формы колебаний оболочки по типам симметрии относительно центральных прямых $x_1 = 0{,}5a_1$ и $x_2 = 0{,}5a_2$. Для симметричной в обоих направлениях формы выполняются условия:

$$\partial w_0 / \partial x_1 = u_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0{,}5a_1 \tag{3.7}$$

$$\partial w_0 / \partial x_2 = u_{20} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0{,}5a_2$$

Для кососимметричной в обоих направлениях формы справедливо

$$w_0 = u_{20} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0{,}5a_1 \tag{3.8}$$

$$w_0 = u_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0{,}5a_2$$

С учетом асимптотических выражений (1.7), (1.12)—(1.13) из (3.7)—(3.8) получим трансцендентные уравнения

$$k_1 (a_1 - 2x_{10}) = m\pi \tag{3.9}$$

$$k_2 (a_2 - 2x_{20}) = n\pi, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $m$ и $n$ — параметры волнообразования в направлениях $x_1$ и $x_2$ соответственно (комбинации четных значений $m$ с нечетными значениями $n$ соответствуют антисимметричным в обоих направлениях формам, а четных $n$ с нечетными $m$ — симметричным).

Уравнения (3.6) и (3.9) служат для определения постоянных $k_1$, $k_2$, $x_{10}$ и $x_{20}$. Эти уравнения могут быть решены численно с высокой степенью точности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике//Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. N 2. С. 115—129.
2. *Баренблатт Г. И. Подобие*, автомодельность и промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
3. *Зельдович Я. Б.* Предисловие к [2]. С. 5—10.
4. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
5. *Андрианов И. В., Маневич Л. И., Холод Е. Г.* О нелинейных колебаниях прямоугольных пластин//Строит. механика и расчет соор. 1979. N 5. С. 38— 51.
6. *Андрианов И. В., Холод Е. Г.* Собственные нелинейные колебания пологих оболочек//Строит. механика и расчет соор. 1985. N 4. С. 51—54.
7. *Жинжер Н. И., Денисов В. Н.* Асимптотические методы в задачах о нелинейных колебаниях оболочек//Проблемы прочности. 1983. N 9. С. 27—30.
8. *Жинжер Н. И., Хроматов В. Е.* Применение асимптотического метода к исследованию колебаний оболочек при конечных амплитудах//Прикладная механика. 1990. Т. 26. N 11. С. 93—99.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
10. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
11. *Андрианов И. В.* Построение упрощенных уравнений нелинейной динамики пластин и пологих оболочек на основе метода осреднения//Прикл. матем. и механика. 1986. Т. 50. N 1. С. 171—175.
12. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.


Днепропетровск

Поступила в редакцию
26.IX.1991