МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.3

 Е. М. ЗВЕРЯЕВ

ПРИМЕР ОБОБЩЕНИЯ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА

Рассмотрена задача о нахождении напряженно-деформированного состояния длинной полосы при заданных на коротких краях перемещениях и свободных продольных краях. Решение бигармонического уравнения разыскивается методом Бубнова — Галеркина. При этом удается разделить затухающую по мере удаления от короткого края и незатухающую части напряженно-деформированного состояния. Незатухающая часть решения отделяется с помощью условий полноты разложения заданных на краю перемещений. Эти условия совпадают с условием равенства нулю работы от приложенных на коротком краю напряжений, статически эквивалентных главному вектору и главному моменту.

1. Принцип Сен-Венана был впервые сформулирован в применении к задаче о напряженном состоянии загруженного по концам стержня. Он состоит в утверждении, что статически эквивалентная нулю система сил, распределенных по малому участку поверхности упругого тела, создает лишь локальные напряжения, быстро затухающие по мере удаления от этого участка и становящиеся пренебрежимо малыми на расстояниях, достаточно больших по сравнению с его размерами. Например, напряженное состояние в длинном призматическом стержне, нагруженном только по концевым сечениям, практически не зависит от способа распределения по ним поверхностных сил и определяется на некотором расстоянии от концов их главным вектором и главным моментом.

Рассмотрим теперь задачу об установлении аналогичных условий локализации напряженного состояния в длинном призматическом стержне, на концевых сечениях которого заданы не напряжения, а перемещения. Пусть полоса, с помощью которой моделируется напряженное состояние в стержне, задана неравенствами $0 \le x \le l$, $-1 \le y \le 1$. На краях $x = 0,\ l$ заданы перемещения

$$u(l, y) = f_1(y),\ v(l, y) = f_2(y),\ u(0, y) = f_3(y),\ v(0, y) = f_4(y) \tag{1.1}$$

Края $y = \pm 1$ свободны и на них

$$\sigma_x(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \tag{1.2}$$

Решение сводится к нахождению функции Эри [1], удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2\, \partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

Напряжения через функцию Эри вычисляются по формулам $\sigma_x = \partial^2\varphi/\partial y^2$, $\tau_{xy} = -\partial^2\varphi/\partial x\partial y$, $\sigma_y = \partial^2\varphi/\partial x^2$. Деформации по напряжениям находятся с помощью соотношений упругости $\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E$, $\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E$, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$. Формулы деформации-перемещения дают возможность определить перемещения $\partial u/\partial x = \varepsilon_x$, $\partial v/\partial y = \varepsilon_y$.

Перепишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$-\partial^4\varphi/\partial x^2\partial y^2 = {}^1/_2(\partial^4\varphi/\partial x^4 + \partial^4\varphi/\partial y^4)$$

Интегрируя его дважды по x и дважды по y, получим

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \int\int\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\,dx\,dx\right) + a(y)\,x + b(y) \qquad (1.4)$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \int\int\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\,dy\,dy\right) + c(x)\,y + d(x)$$

где a, b, c, d — произвольные функции интегрирования.

Соотношения упругости и формулы деформации-перемещения с учетом (1.4) дают

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \int\int\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\,dy\,dy\right) + [c(x)\,y + d(x)\,]\,\mu \qquad (1.5)$$

$$E\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \int\int\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\,dx\,dx\right) + [a(y)\,x + b(y)\,]\,\mu$$

Положим в (1.5):

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\,Y_k(y) \qquad (1.6)$$

где функции Y_k удовлетворяют уравнению $Y_k^{\mathrm{IV}} = \varkappa_k^4 Y_k$ и условиям на концах $Y_k(\pm 1) = Y_k'(\pm 1) = 0$. В этом случае условия (1.2) выполнены, а решение уравнения (1.3) разыскивается методом Бубнова — Галеркина. Функции $X_k(x)$ содержат экспоненциальные множители, обеспечивая затухание концевого воздействия.

Подставив (1.6) в (1.5) и интегрируя соответствующим образом, получим выражения для перемещений

$$Eu = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)X_k^*\varkappa_k^2 + \frac{\mu}{2}X_k'''\frac{1}{\varkappa_k^2}\right]Y_{k2} + \mu\,[c^*(x)\,y + d^*(x)\,] + n(y) \qquad (1.7)$$

$$Ev = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)X_k''\frac{1}{\varkappa_k} + \frac{\mu}{2}X_k^{**}\varkappa_k^3\right]Y_{k3} + \mu\,[a^*(y)\,x + b^*(y)\,] + m(x)$$

Здесь m и n произвольные функции интегрирования, звездочка означает, что произведено интегрирование по соответствующей координате, т. е. $Q^*(t) = \int Q(t)dt$.

Функции Y_k являются собственными для задачи о собственных колебаниях защемленной по концам балки и достаточно хорошо исследованы [2]. Для симметричного по y случая они имеют вид

$$Y_k = \cos\varkappa_k\,\mathrm{ch}\,\varkappa_k y - \mathrm{ch}\,\varkappa_k\cos\varkappa_k y$$

$$Y_k' = \varkappa_k Y_{k1} = \varkappa_k(\cos\varkappa_k\,\mathrm{sh}\,\varkappa_k y + \mathrm{ch}\,\varkappa_k\sin\varkappa_k y) \qquad (1.8)$$

$$Y_k'' = \varkappa_k^2 Y_{k2} = \varkappa_k^2(\cos\varkappa_k\,\mathrm{ch}\,\varkappa_k y + \mathrm{ch}\,\varkappa_k\cos\varkappa_k y)$$

$$Y_k''' = \varkappa_k^3 Y_{k3} = \varkappa_k^3(\cos\varkappa_k\,\mathrm{sh}\,\varkappa_k y - \mathrm{ch}\,\varkappa_k\sin\varkappa_k y)$$

где $\varkappa_k$ удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\psi(\varkappa_k) = \mathrm{tg}\,\varkappa_k + \mathrm{th}\,\varkappa_k = 0 \qquad (1.9)$$

Для антисимметричного по y случая

$$Y_k = \cos\varkappa_k\,\mathrm{sh}\,\varkappa_k y - \mathrm{ch}\,\varkappa_k\sin\varkappa_k y \qquad (1.10)$$

$$Y_k' = \varkappa_k Y_{k1} = \varkappa_k (\cos \varkappa_k \operatorname{ch} \varkappa_k y - \operatorname{ch} \varkappa_k \cos \varkappa_k y)$$

$$Y_k'' = \varkappa_k^2 Y_{k2} = \varkappa_k^2 (\cos \varkappa_k \operatorname{sh} \varkappa_k y + \operatorname{ch} \varkappa_k \sin \varkappa_k y)$$

$$Y_k''' = \varkappa_k^3 Y_{k3} = \varkappa_k^3 (\cos \varkappa_k \operatorname{ch} \varkappa_k y + \operatorname{ch} \varkappa_k \cos \varkappa_k y)$$

где $\varkappa_k$ удовлетворяют трансцендентному уравнению $\psi(\varkappa_k) = \operatorname{tg} \varkappa_k - \operatorname{th} \varkappa_k = 0$.

Рассмотрим теперь возможность выполнения условий (1.1) с помощью представления перемещений в виде (1.7). На конце при $x = l$ должно быть

$$Ef_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) X_k^* \varkappa_k^2 + \frac{\mu}{2} X_k''' \frac{1}{\varkappa_k^2} \right] Y_{k2} + \mu \left[c^*(l)\, y + d^*(l)\right] + n(y)$$

$$Ef_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) X_k'' \frac{1}{\varkappa_k} + \frac{\mu}{2} X_k^{**} \varkappa_k^3 \right] Y_{k3} + \mu \left[a^*(y)\, l + b^*(y)\right] + m(l) \tag{1.11}$$

2. Определим условия, которые должны быть наложены на функции f_1 и f_2 для того, чтобы разложения (1.11) имели место. Если системы функций $\{Y_{k2}\}$ и $\{Y_{k3}\}$ полны, произволы интегрирования a^*, b^*, c^*, d^*, m, n должны быть положены нулями. Проверим полноту этих систем. Разложим некоторую симметричную по α функцию $\zeta_1(\alpha)$ на интервале (—1,1) в ряд по функциям $Y_{k2}(\varkappa_k \alpha)$ и антисимметричную функцию $\zeta_2(\alpha)$ в ряд по функциям $Y_{k3}(\varkappa_k \alpha)$. Таким образом

$$\zeta_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_{k2}(\varkappa_k \alpha), \quad \zeta_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_{k3}(\varkappa_k \alpha) \tag{2.1}$$

$$a_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta)\, Y_{k2}(\varkappa_k \beta)\, d\beta, \quad b_k = -\frac{1}{N_k} \int_{-1}^{1} \zeta_2(\beta)\, Y_{k1}(\varkappa_k \beta)\, d\beta \tag{2.2}$$

$$N_k(\varkappa_k) = \int_{-1}^{1} Y_{k2}^2(\varkappa_k \beta)\, d\beta$$

Функции Y_{k1}, Y_{k2}, Y_{k3} удовлетворяют следующим условиям ортогональности

$$\int_{-1}^{1} Y_{k2}(\varkappa_k \beta)\, Y_{n2}(\varkappa_n \beta)\, d\beta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ N_k & (n = k) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} Y_{k3}(\varkappa_k \beta)\, Y_{n1}(\varkappa_n \beta)\, d\beta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ -N_k & (n = k) \end{cases}$$

Для симметричных функций Y_{k2} будет $N_k = \operatorname{ch}^2 \varkappa_k + \cos^2 \varkappa_k$.

Составим выражения для частичных сумм рядов (2.1), подставив в них коэффициенты (2.2)

$$S_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{N_k} Y_{k2}(\varkappa_k \alpha) \int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta)\, Y_{k2}(\varkappa_k \beta)\, d\beta \tag{2.3}$$

$$S_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = -\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{N_k} Y_{k3}(\varkappa_k \alpha) \int_{-1}^{1} \zeta_2(\beta)\, Y_{k1}(\varkappa_k \beta)\, d\beta$$

Следовательно задача о соответствии левых и правых частей в (2.1) сводится к нахождению пределов соответствующих сумм S_K при $K \to \infty$. Изменив порядок интегрирования и суммирования в (2.3), запишем выражения для частичных сумм в следующем виде:

$$S_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = \int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta) \sum_{k=1}^{K} \frac{Y_{k2}(\varkappa_k\alpha)\, Y_{k2}(\varkappa_k\beta)}{N_k}\, d\beta = \int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta)\, Q_K(Y_{k2}, Y_{k2})\, d\beta \tag{2.4}$$

$$S_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = -\int_{-1}^{1} \zeta_2(\beta) \sum_{k=1}^{K} \frac{Y_{k3}(\varkappa_k\alpha)\, Y_{k1}(\varkappa_k\beta)}{N_k}\, d\beta = -\int_{-1}^{1} \zeta_2(\beta)\, Q_K(Y_{k3}, Y_{k1})\, d\beta$$

Рассмотрим так же как и в [3] отвечающие (2.4) контурные интегралы

$$I_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Y_{k2}(z\alpha)\, Y_{k2}(z\beta)}{\operatorname{ch}^2 z \cos^2 z\, \psi(z)}\, dz \tag{2.5}$$

$$I_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Y_{k3}(z\alpha)\, Y_{k1}(z\beta)}{\operatorname{ch}^2 z \cos^2 z\, \psi(z)}\, dz$$

вычисленные при обходе в положительном направлении по кругу радиуса R_K, описанному из начала координат в комплексной плоскости z. Радиус R_K выбираем таким образом, чтобы внутрь окружности попали $2K$ вещественных и $2K$ мнимых корней уравнения (1.9). Контур также не проходит через точки $z_k^{(0)} = \pi(2k+1)/2$ и $z_k^{(1)} = \pi i(2k+1)/2$, являющиеся корнями уравнений $\cos z_k^{(0)} = 0$ и $\operatorname{ch} z_k^{(1)} = 0$. Тогда каждый интеграл в (2.5) равен сумме вычетов по всем особым точкам внутри круга R_K.

В соответствии со сказанным для (2.5) и с учетом того, что $N_k = \operatorname{ch}^2 z \cos^2 z\, \psi'(z)$ получаем

$$I_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = 4Q_K(Y_{k2}, Y_{k2}) - 2 \sum_{k=-K}^{K} \cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta - 2 \tag{2.6}$$

$$I_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = -4Q_K(Y_{k3}, Y_{k1}) + 2 \sum_{k=-K}^{K} \sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta$$

Последний член в первом выражении (2.6) есть вычет для подынтегрального выражения первого интеграла в (2.5). Вычет в нуле для второго интеграла равен нулю. Воспользуемся тем, что в силу леммы Жордана при $K \to \infty$ интегралы (2.5) стремятся к нулю. Из (2.6) следует, что

$$\lim_{K\to\infty} Q_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta - \frac{1}{2} \tag{2.7}$$

$$\lim_{K\to\infty} Q_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta$$

Подставив (2.7) в (2.4), получим

$$\lim_{K\to\infty} S_K(Y_{k2}, Y_{k2}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2k+1}{2}\pi\beta\, d\beta -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta)\, d\beta = \zeta_1(\alpha) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \zeta_1(\beta)\, d\beta \tag{2.8}$$

$$\lim_{K\to\infty} S_K(Y_{k3}, Y_{k1}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \zeta_2(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\frac{2k+1}{2}\pi\alpha \sin\frac{2k+1}{2}\pi\beta\, d\beta = \zeta_2(\alpha)$$

Таким образом первый ряд в (2.1) сходится к исходной функции ζ_1, если

$$\int_{-1}^{1} \zeta_1 (\beta)\, d\beta = 0 \tag{2.9}$$

Второй ряд сходится к функции ζ_2 безусловно.

Рассмотрим теперь случай разложения антисимметричной по α функции $\zeta_3(\alpha)$ на интервале (—1,1) в ряд по антисимметричным функциям $Y_{k2}(\varkappa_k\alpha)$ и симметричную функцию $\zeta_4(\alpha)$ в ряд по функциям $Y_{k3}(\varkappa_k\alpha)$ из (1.10). Поступая аналогичным образом, получим для соответствующих контурных интегралов выражения

$$I_K (Y_{k2}, Y_{k2}) = -4Q_K (Y_{k2}, Y_{k2}) + 2 \sum_{k=-K}^{K} \sin \frac{2k+1}{2} \pi\alpha \sin \frac{2k+1}{2} \pi\beta - 6\alpha\beta$$

$$I_K (Y_{k3}, Y_{k1}) = -4Q_K (Y_{k3}, Y_{k1}) + 2 \sum_{k=-K}^{K} \cos \frac{2k+1}{2} \pi\alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi\beta - 3 (1 - \beta^2) \tag{2.10}$$

В обоих выражениях в (2.10) последние слагаемые являются вычетами в точке $z=0$. Перейдя в (2.10) к пределу при $K \to \infty$, получим для частичных сумм

$$\lim_{K\to\infty} S_K (Y_{k2}, Y_{k2}) = \zeta_3 (\alpha) - \frac{3}{2} \alpha \int_{-1}^{1} \zeta_3 (\beta)\, \beta\, d\beta$$

$$\lim_{K\to\infty} S_K (Y_{k3}, Y_{k1}) = \zeta_4 (\alpha) - \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} \zeta_4 (\beta) (1 - \beta^2)\, d\beta \tag{2.11}$$

Т. е. первый ряд в (2.11) сходится к исходной функции ζ_3, а второй ряд к функции ζ_4, если

$$\int_{-1}^{1} \zeta_3 (\beta)\, \beta\, d\beta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \zeta_4 (\beta) (1 - \beta^2)\, d\beta = 0 \tag{2.12}$$

3. Рассмотрим задачу для консоли единичной толщины, длиной l и высотой равной двум. В этом случае в условиях (1.1) надо положить $f_3 = f_4 = 0$. При $x = l$ заданы ненулевые первые два перемещения (1.1). Отбросим задающие эти перемещения связи и заменим их нормальной (растягивающей) силой N, поперечной силой P и изгибающим моментом M, статически эквивалентными незатухающим по мере удаления от края $x = l$ напряжениям

$$\sigma_x = \tfrac{1}{2} N + \tfrac{3}{2} My + \tfrac{3}{2} P (l - x)\, y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tfrac{3}{4} P (1 - y^2) \tag{3.1}$$

Подсчитаем работу, совершаемую незатухающими напряжениями (3.1) на перемещениях (1.1) конца $x = l$:

$$U = \int_{-1}^{1} [\sigma_x f_1 (y) + \tau_{xy} f_2 (y)]\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{N}{2} + \frac{3}{2} My\right) f_1 (y) + \frac{3}{4} P (1 - y^2) f_2 (y) \right] dy$$

Потребовав, чтобы возникающие в полосе незатухающие напряжения не совершали работу на заданных перемещениях конца, получим в силу независимости величин N, P, M следующие выражения:

$$\int_{-1}^{1} f_1 (y)\, dy = 0, \quad \int_{-1}^{1} f_1 (y)\, y\, dy = 0, \quad \int_{-1}^{1} f_2 (y) (1 - y^2)\, dy = 0 \tag{3.2}$$

совпадающие с условиями (2.9), (2.12), где функции $\zeta_1 + \zeta_3$ и ζ_4 совпадают по смыслу с f_1 и f_2 соответственно.

По-видимому, по аналогии с известным принципом Сен-Венана, сформулированным для случая заданных на малом участке напряжений [1], можно дать формулировку локальности напряженно-деформированного состояния, вызванного в упругом теле заданными на малом участке его поверхности перемещениями.

Заданные на малом участке поверхности упругого тела перемещения создают лишь локальное напряженно-деформированное состояние, быстро затухающее по мере удаления от этого участка и становящееся пренебрежимо малым на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами участка, если главный вектор и главный момент, статически эквивалентные возникающим на этом участке напряжениям, не совершают работу на заданных перемещениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
3. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях//ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211—228.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1991