МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. КУЛИЕВ С. А.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗАМИ

Напряженное деформированное состояние многоугольной пластинки с различными дефектами (типа отверстий и трещин) при действии механических, силовых нагрузок рассмотрены в [1, 8—10, 12].

При решении этих задач были использованы теория функций комплексного переменного и конформного отображения. Поступая аналогичным образом, исследуем температурный изгиб многоугольной пластинки в случае различных тепловых воздействий на нее.

При изменении температуры в пластинке могут возникнуть так называемые температурные напряжения в результате того, что в реальном деформируемом теле не всегда расширение может происходить свободно. В общем случае неравномерного нагрева в пластинках может возникнуть как состояние изгиба, так и плоское растяжение — сжатие.

Расчет напряжений и деформаций, возникающих вследствие изменения температуры, имеет большое практическое значение, особенно в связи с потребностями энергомашиностроения, а также конструирования летательных аппаратов.

Рассмотрим многоугольную пластинку, срединная плоскость которой является двухсвязной области S, ограниченной извне правильным многоугольником L_2, изнутри эллипсом L_1 с двумя прямолинейными разрезами.

Пластинка подвержена воздействию неравномерного нагрева. Предполагаем, что температура T зависит только от координат x, y (т. е. имеет место плоское температурное поле).

В теории несвязной термоупругости использовано допущение о независимости распределения температурного поля в теле от его напряженно-деформированного состояния, а также принцип линейной суперпозиции, согласно которому упругая деформация (перемещение и напряжение) вызванная механической (силовой) нагрузкой, суммируется соответственно с температурным расширением и напряжениями.

Симметричные распределения температуры по толщине пластинки относительно срединной плоскости не приводят к состоянию изгиба, и наоборот антисимметричное по толщине температурное поле вызывает изгиб пластинки.

1. Как известно [1, 13] задача о поперечном изгибе тонкой пластинки постоянной толщины h при условии различных температурных воздействий приводится к решению неоднородного уравнения (при отсутствии поперечной нагрузки $q=0$):

$$\Delta\Delta\omega = -\frac{2\alpha_t(1-\nu)}{h}\Delta T_2^* \tag{1.1}$$

Компоненты напряжений в пластинке, обусловленных ее прогибом, имеют вид

$$\sigma_x = -\frac{E\delta}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-\frac{\alpha_t E}{1-\nu}T$$

$$\sigma_y = -\frac{E\delta}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)-\frac{\alpha_t E}{1-\nu}T$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E\delta}{1+\nu}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+\frac{\alpha_t E}{(1-\nu)h}\left(\frac{h^2}{4}-\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial x}T_2^*$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+\frac{\alpha_t E}{(1-\nu)h}\left(\frac{h^2}{4}-\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial y}T_2^* \tag{1.2}$$

Выражения для изгибающих и крутящих моментов будут

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h}T_2^*\right]$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h}T_2^*\right]$$

$$H_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$$

$$N_x = -\frac{Eh^2\alpha_t}{1-\nu}T_1^*, \qquad N_y = -\frac{Eh^2\alpha_t}{1-\nu}T_1^*$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad T_1^* = \frac{1}{h}\int T\,d\delta, \qquad T_2^* = \frac{6}{h^2}\int T\delta\,d\delta \tag{1.3}$$

В формулах (1.1) — (1.3) введены обозначения: ω — прогиб срединной плоскости, D — цилиндрическая жесткость пластинки, T_1^* и T_2^* — усредненные по толщине пластинки значения температуры T, $\delta = \pm h/2$ — расстояние от срединной плоскости (т. е. координата точки по оси z), α_t — температурный коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Общее в решении неоднородного уравнения (1.1) представляем в виде суммы общего решения однородного бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\omega = 0 \tag{1.4}$$

и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (1.11).

Метод функции комплексного переменного оказался эффективным средством решения задач термоупругости и температурного изгиба пластинок, как и плоские задачи с силовыми нагрузками, и задач изгиба тонких пластинок. Вводя новые переменные $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ (причем не путать с координатой z — изменяемой по толщине пластинки). Общее решение уравнения (1.1) запишем в виде

$$w = \mathrm{Re}\,[z\varphi(z) + \chi(z)] - \frac{\alpha_t(1-\nu)}{2h}\iint T_2^*\,dz\,d\bar{z} \tag{1.5}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z) = \chi'(z)$ — аналитические функции комплексного переменного. Для определения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в случае первой и второй основных задач изгиба пластинки имеем следующие граничные условия:

$$\varkappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1 + if_2 + \frac{\alpha_t E(1+\nu)}{h}\int T_2^*\,dz + iC_1 z + C_2 \text{ на } L_j\ (j = 1, 2) \tag{1.6}$$

В случае первой основной задачи технической теории изгиба пластин заданы моменты и усилия как функция дуги S:

$$M_n = m(s), \quad N_n + \partial H_n/\partial s = p(s) \tag{1.7}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = g_1 + ig_2 + \frac{\alpha_t E(1+\nu)}{h} \int T_2^* \, dz \tag{1.8}$$

В случае второй основной задачи, когда на контуре пластины заданы прогибы ω и углы поворота $\partial\omega/\partial n$. Здесь $f_1 + if_2$ и $2G(g_1 + ig_2)$ заданные на границе рассматриваемой области функции, определяемые равенствами [1, 8]:

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_{t_0}^{t} \left\{ \left[m(s) + i \int_0^s p(s)\, ds \right] dz - 2\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar z} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{1-\nu} \left[z \int_0^s \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial \bar z \partial z^2} dz - \int_0^s z \frac{\partial^3 \omega}{\partial \bar z \partial z^2} dz \right] \right\} \text{ на } L_j, \tag{1.9}$$

$$g_1 + ig_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x} + i \frac{\partial \omega}{\partial y} - 2\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar z} \text{ на } L_j \tag{1.10}$$

где $m(s)$ и $p(s)$ — известные функции дуги s контура L_j, отсчитываемой от некоторой произвольной точки t_0; $\varkappa = 3-4\nu$ — для плоской деформации; $\varkappa = -(3+\nu)/(1-\nu)$ — для плоского обобщенного напряженного состояния. В формулах (1.9) и (1.10):

$$w_1 = -\frac{\alpha_t(1-\nu)}{2h} \iint T_2^* \, dz \, d\bar z$$

частное решение уравнения (1.1). Условие (1.10) можно выразить и в другой форме

$$g_1 + ig_2 = e^{i\alpha} \left[\frac{\partial \omega}{\partial n} + i \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] - 2\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar z} \text{ на } L_j \tag{1.11}$$

Здесь α — угол между осями x, y и n, s; n — внешняя нормаль к контуру L_j; C_1 и C_2 соответственно вещественная и комплексная постоянные.

Таким образом, для решения задачи об определении температурного изгиба пластин сначала нужно найти распределение температуры T и вычислить граничную задачу (1.6) или (1.8) и найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ищем в виде [8, 9]:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{A_2}\right)^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{z}{A_2}\right)^k \tag{1.12}$$

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty}{}^{**} \beta_n d^{(n)}_{(n-k)/N}, \qquad \lambda_k = \sum_{n=k}^{\infty}{}^{**} c_n a^{(n)}_{(n-k)/N}$$

Внешность наружного контура L_2 — (правильного многоугольника) отображается на внешность единичной окружности функцией [9, 12]:

$$z = A_2 \left(\xi + \frac{m_2}{\xi^{N-1}} \right) = A_2 \xi \sum_{n=0}^{\infty} m_2^n \xi^{-nN}$$

$$A_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \qquad m_2 = \left| \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} \right| \tag{1.13}$$

где a_2 и b_2 соответственно радиусы окружностей, описанной и вписанной в многоугольнике L_2, N — число осей симметрии (число сторон) многоугольника.

Внешность внутреннего контура L_1 (эллипса с двумя разрезами) отображается на внешность единичной окружности функцией [8]:

$$z = A_1\xi \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi^{-n}, \quad A_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m = \left| \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \right| \tag{1.14}$$

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{k-1} P_{n-k}, \quad P = \sum_{n_1=0}^{n} {}^* \, m_1^{1/2(n-n_1)} \gamma_{-1}^{-n+n_1} l_n^{(n-n_1)}$$

a_1 и b_1 — полуоси эллипса L_1.

Функция $\xi = \chi(z)$ обратная к отображающей функции (1.13), имеет вид

$$\xi = \frac{z}{A_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{A_2}{z} \right)^n \tag{1.15}$$

функция, обратная к (1.14), имеет вид

$$\xi = \frac{z}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)} \left(\frac{A_1}{z} \right)^n \tag{1.16}$$

Величины P_n, γ_n, $l_n^{(k)}$, $a_n^{(k)}$, $M_n^{(k)}$ и так далее определяются согласно [7, 8].

Учитывая (1.12) и (1.13)—(1.16), выражения $\varphi(t)$, $\overline{t\varphi'(t)}$ и $\overline{\psi(t)}$, входящие в равенства (1.6) и (1.8), после некоторых математических преобразований получена в виде (перейдя к новой переменной τ и зная, что на единичной окружности имеет место $\tau\bar{\tau} = 1$) [7, 8]: на внешнем контуре

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} N_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k N_2(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} N_3(k) \tag{1.17}$$

$$\overline{t\varphi'(t)} = \left(\tau + \frac{m_2}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{k=2}^{\infty} \tau^k N_4(k) + \left(\tau + \frac{m_2}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} N_5(k) +$$

$$+ \left(\tau + \frac{m^2}{\tau^{N-1}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k N_6(k) \tag{1.18}$$

$$\overline{\psi(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k N_7(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} N_8(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} N_9(k) \tag{1.19}$$

и на внутреннем контуре L_1 получено

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k E_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} E_2(k) \tag{1.20}$$

$$t\,\overline{\varphi'(t)} = \tau^2 \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k E_3(k) + \tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} E_4(k) +$$

$$+ \tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} E_7(k) + \tau^3 \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} E_8(k) + \tau^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k E_9(k) \tag{1.21}$$

$$\overline{\psi(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \tau^k + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} E_{10}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k E_{11}(k) \tag{1.22}$$

Далее подставляя полученные выражения (1.17)—(1.22) соответственно в условия (1.6) или в (1.8) и зная распределение температуры T, просто решается задача о напряженно-деформированном состоянии пластинки (по известной схеме решения задачи изгиба пластинки [1, 13])

Таким образом, для решения задачи об определении температурного изгиба пластин сначала нужно найти распределение температуры T и вычислить ее усредненные значения T_1^* и T_2^*, а затем решить граничную задачу (1.6) или (1.8) и найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

В формулах (1.17)—(1.22) приняты обозначения

$$E_1(n)=\sum_{k=n}^{\infty} b_n\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{k-n}^{(k)},\quad E_2(n)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{k+n}^{(k)}$$

$$E_3(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n E(n+k),\quad E(n)=\sum_{k=0}^{n}(-k)\,\alpha_k l_{n-k}$$

$$E_4(k)=\sum_{n=k}^{\infty}\Pi_n E(n-k),\quad l_n+\sum_{n_1=1}^{n} l_{n-n_1}\varepsilon_{n_1}=0$$

$$E_5(n)=\sum_{k=n}^{\infty} kb_k\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{k-n}^{(k-1)},\quad \varepsilon_n=(1-n)\,\Pi_n$$

$$E_6(n)=\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{n+k}^{(k-1)},\quad E_7(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_k E_4(k-n),$$

$$E_8(k)=\sum_{n=k}^{\infty}\Pi_n E_5(n-k+1),\quad E_9(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n E_5(k+n+1),$$

$$E_{10}(n)=\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{k-n}^{(k)},\quad E_{11}(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k \Pi_{k+n}^{(k)}$$

$$\Pi_n^{(k)}=\sum_{n_1=0}^{n}\Pi_{n_1}^{(1)}\Pi_{n-n_1}^{(k-1)},\quad N_1(k)=\sum_{n^*}^{k}{}^{**}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^n m_2^{\frac{k-n}{N}} C_{-n}^{\frac{k-n}{N}}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu L_{n-\nu}^{\nu}$$

$$L_n^{(k)}+\sum_{n_1=1}^{n} L_{n-n_1}^{(k)} V_{n_1}=0,\quad V_n\sum_{k=0}^{n}{}^{*}\, g_{\frac{n-k}{2}}^{(1)} H_k$$

$$H_k=\sum_{\nu=0}^{k}{}^{*}\,\delta_{\nu-1}\varkappa_{\frac{k-\nu}{2}}^{(\nu)},\quad \varkappa_n^{(k)}+\sum_{n_1=1}^{n}\varkappa_{n-n_1}^{(k)} g_{n_1}^{(k)}=0$$

$$N_2(k)=\sum_{n=k}^{\infty}{}^{**}\, b_k m_2^{\frac{n-k}{N}} C_k^{\frac{n-k}{N}},\quad N_3(k)=\sum_{n^{**}}^{\infty}{}^{**}\, b_n m_2^{\frac{k+n}{N}} C_k^{\frac{k+n}{N}}$$

$$N_4(k)=\sum_{n^*-1}^{k-1}{}^{**}\, n\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^n C_{-n-1}^{\frac{k-n-1}{N}},\quad m_2^{\frac{k-n-1}{N}}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu L_{n-\nu}^{(\nu)}$$

$$N_5(k)=\sum_{n=k-1}^{\infty}{}^{**}\, kb_k m_2^{\frac{n-1-k}{N}} C_{k-1}^{\frac{n-1-k}{N}},$$

$$N_6(k)=\sum_{n^*+1}^{\infty}{}^{**}\, kb_k m^{\frac{k+n-1}{N}} C_{k-1}^{\frac{k+n-1}{N}}\qquad (\varepsilon=0;1;\dots N-2)$$

$$N_7(k)=\sum_{n^*}^{k}{}^{**}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^n m_2^{\frac{k-n}{N}} C_{-n}^{\frac{k-n}{N}},\quad \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \overset{(\nu)}{L}_{\nu-n}$$

$$N_8(k)=\sum_{n=k}^{\infty}{}^{**}\,\lambda_n m_2^{\frac{n-k}{N}} C^{\frac{n-k}{N}},\quad N_9(k)=\sum_{n^{**}}^{\infty}{}^{**}\,\lambda_n m_2^{\frac{n+k}{N}} C_n^{\frac{k+n}{N}}$$

$$n^* = k - NE\left(\frac{k-1}{N}\right), \quad n^{**} = \frac{k+\varepsilon}{N-1} + \varepsilon$$

2. Если температура T не зависит от координат z, то такое распределение температуры называют плоским (плоское температурное поле). Это возможно в цилиндрических стержнях произвольной длины и в тонких пластинах, торцевые поверхности которых теплоизолированы.

Из формул (1.3), (1.5), (1.6) и (1.8) следует, что для определения температурных изгибающих моментов M_x, M_y, H_{xy} в пластинке необходимо знать значение температуры T_2^*.

При антисимметричном распределении температуры относительно срединной плоскости пластинки функция T_2^* в общем случае должна удовлетворять уравнению [1—6; 10; 11];

$$h^2 \Delta T_2^* - 3(1 + 2hH_0)\, T_2^* = 3hH_0 t \tag{2.1}$$

Здесь $t_* = 1/2\,(t_*^+ - t_*^-)$; t_*^+ и t_*^- — значения температуры внешней среды, омывающей поверхности пластинки, $\delta = \pm h/2$, H_0 — относительный коэффициент теплоотдачи.

Если температура не зависит от времени (установившийся стационарный характер), то уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\Delta T_2^* = 0 \tag{2.2}$$

В силу того, что функция $T(x, y)$ гармоническая в рассматриваемой области S, то ее можно представить как вещественную часть некоторой аналитической функции комплексного переменного $z = x + iy$.

При решении уравнения (2.1), учитывающего наличие теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки, необходимо также удовлетворить некоторым граничным условиям на контурах L_j.

Как известно [1, 9, 10, 13], обычно различают три вида граничных условий, которым должна удовлетворить функция $T(x, y)$:

1. Граничное условие первого рода: когда на границе L_j известна температура T: $T = f_1(t)$; $t \in L_j$.

При выполнении на контурах L_j этого условия для функции $F(t) = f[\omega(\xi)]$ имеем следующие граничные условия (зная, что $t = \omega(\xi)$):

$$2T_j = F(\xi) + \overline{F(\xi)} \quad \text{на } L_j \tag{2.3}$$

где T_j — заданные температуры на контурах L_j, например, если на одном из контуров L_j поддерживается нулевая температура, то имеем

$$\operatorname{Re} F(\xi) = 0 \tag{2.4}$$

2. Граничное условие второго рода. Если на контуре L_j известна плотность теплового потока, то имеем условие (n — внешняя нормаль к области S):

$$dT/dn = f_2[\omega(\xi)] \tag{2.5}$$

Если контур L_j теплоизолирован (т. е. плотность теплового потока равна нулю), то для функции $F(\xi) = f[\omega(\xi)]$ имеем следующее условие:

$$\frac{dT}{dn} = \frac{d}{ds}\,[\operatorname{Im} F(\xi)] = \operatorname{Im} F(\xi) = 0 \tag{2.6}$$

3. Граничное условие третьего ряда

$$\partial T/\partial n + H_0(T - T_*) = 0 \tag{2.7}$$

Это такой случай, когда на поверхности тела известна температура окружающей среды T_*, теплообмен с которой совершается по закону Ньютона; H_0 — относительный коэффициент теплоотдачи.

С учетом $2T = f(\xi) + \overline{f(\xi)}$ это условие приводится к виду

$$\operatorname{Re}\,[\xi F(\xi)] + H_0\omega'(\xi)\operatorname{Re} f(\xi) = H_0\omega'(\xi)T_* \tag{2.8}$$

Если в точке $z = z_0$ действует точечный источник тепла, мощностью g, то для определения температурного поля в пластинке нужно проинтегрировать уравнение теплопроводности

$$\Delta T + g\delta(x - c)\delta(y - d)/\lambda = 0 \tag{2.9}$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, λ — коэффициент теплопроводности; $\delta(x - c)$ и $\delta(y - d)$ — дельта функции Дирака; c и d — координаты точки z_0 (т. е. $z_0 = c + id$). Так как функция $T(x, y)$ — гармоническая в рассматриваемой области S, то общее решение уравнения (2.9) можно выразить с помощью аналитической функции $F(z)$ комплексного переменного z в виде [1; 2; 13]:

$$T = 2\operatorname{Re} F(z) = F(z) + \overline{F(z)} \tag{2.10}$$

Для рассматриваемой пластинки функцию $F(z)$ представим в следующей форме (представление для функции $F(z)$ и методы ее определения зависит от конкретных задач):

$$F(z) = A\ln(z - z_0) + B\ln z + F_*(z) \tag{2.11}$$

$$A = -g/(2\pi\lambda\delta)$$

Поменяв в этой формуле g на ($-g$), получим функцию $F(z)$ при действии в точке $z = z_0$ стока тепла мощностью g. Функцию $F_*(z)$ регулярную в области S согласно [7; 8; 12] имеем в виде:

$$F_*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\xi^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(1)} \left(\frac{z}{A_2}\right)^k$$

$$\lambda_k^{(1)} = \sum_{n=k}^{\infty}{}^{**}\, \eta_k a^{(n)}_{\frac{n-k}{N}} \tag{2.12}$$

С учетом отображающих функций (1.12) и (1.14) равенства (2.11) после некоторых математических преобразований принимают следующий вид (помня, что на единичной окружности $\tau\bar{\tau} = 1$):

$$F(t_1) = A\left[\ln z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k V_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_2(k)\right] +$$

$$+ B\left[\ln A_1\Pi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} V_3(k)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} h_k\tau^{-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k V_4(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_5(k) \tag{2.13}$$

на внутреннем контуре L_1:

$$F(t_2) = A\left[\ln A_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-kN}(-1)^{k-1}\frac{m_2^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_6(k) +\right.$$

$$+ B\left[\ln A_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-kN}(-1)^{k-1}\frac{m_2^k}{k}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\tau^{-k}V_7(k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\tau^{k}V_8(k) + \sum_{k=1}^{\infty}\tau^{-k}V_9(k) \tag{2.14}$$

на внешнем контуре L_2. В формулах (2.13) и (2.14) приняты обозначения

$$V_1(k) = \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{A_1^n}{nz_0^n}\Pi_{n-k}^{(n)}, \quad V_2(k) = \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{A_1^n}{nz_0^n}\Pi_{n+k}^{(n)}$$

$$g_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^{n} g_n^{(1)}g_{n-n_1}^{(k-1)}, \quad V_3(k) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{g_k^{(n)}}{n}; \quad g_n^{(1)} = \frac{\Pi_n}{\Pi_0}$$

$$V_4(k)\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n^{(1)}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^n\Pi_{n-k}^{(n)}, \quad V_5(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(1)}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^n\Pi_{n+k}^{(n)}$$

$$V_6(k) = \sum_{n=0}^{k}(-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{nA_2^n}m_2^{\frac{k-n}{N}}C_n^{\frac{k-n}{N}}, \quad V_7(k) = \sum_{n*}^{k}{}^{**}H(n)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^k m^{\frac{k-n}{N}}C_{-n}^{\frac{k-n}{N}},$$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n}(-k)h_k l_{n-k}, \quad l_n + \sum_{n_1=1}^{n} l_{n-n_1}g = 0$$

$$V_8(k) = \sum_{n=k}^{\infty}{}^{**}\lambda_n^{(1)}m_2^{\frac{n-k}{N}}C_k^{\frac{n-k}{N}}, \quad V_9(k) = \sum_{n^{**}}^{\infty}{}^{**}\lambda_n^{(1)}m^{\frac{n+k}{N}}C_k^{\frac{n+k}{N}}, \quad (\varepsilon = 0; 1; \ldots, N-2)$$

Далее, учитывая граничное значение функций $F(z)$, т. е. формулы (2.13) и (2.14) в (2.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (по два из каждого условия на контурах L_j) относительно неизвестных коэффициентов B, η_0, h_k и η_k

$$2A\left[\ln z_0 + V_1(0)\right] + 2B\left[\ln A_1\Pi_0 + V_3(0)\right] + 2\eta_0 = T_1 \tag{2.15}$$

$$A\ln A_2^2 + B\ln A_2^2 + 2\eta_0 = T_2 \tag{2.16}$$

$$V_4(k) + BV_3(k) + h_k + V_5(k) = A\left[V_1(k) + V_2(k)\right] \tag{2.17}$$

$$B(-1)^{k-1}\frac{m_2^k}{k}\varepsilon_1' + V_7(k) + V_8(k) + V_9(k) = -A\left[(-1)^{k-1}\frac{m_2^k}{k}\varepsilon_1' + V_6(k)\right] \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_1' = 0 \ \text{при} \ k \neq N,\ 2N; \quad \varepsilon_1' = 1 \ \text{при} \ k = N,\ 2N$$

Если на поверхностях пластины $z - \pm h/2$ устанавливаются различные уровни температуры T_1 и T_2, то через некоторый промежуток времени возникнет стационарное состояние теплового потока и температурное поле будет определяться равенством [1; 2; 11]:

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{\delta}{h}(T_1 - T_2) \tag{2.19}$$

Не ограничиваясь в общности, можно принять, что $T_1 = -T_2$ и рассмотрев второй член в распределении температуры (2.19), придем к изучению задач изгиба пластинки. Тогда

$$T = 2\delta T_1/h \tag{2.20}$$

где $2T_1$ — разность температур верхней и нижней поверхностей пластинки. Учитывая (2.20) в выражениях T_1^* и T_2^*, получим:

$$T_1^* = 0,\ T_2^* = T_1 \qquad (2.21)$$

причем $T_1 = \mathrm{const}$, т. е. от координат x и y не зависит. В этих условиях, когда распределение температуры по толщине пластинки известно, довольно просто решается задача о температурном изгибе пластинки.

Причем на контуре L_j имеем (согласно (1.3) и $T_2^* = T_1$):

$$M_n = -D\frac{2\alpha_t(1+\nu)T_1}{h}, \quad H_{nt} = 0 \qquad (2.22)$$

Поскольку рассматриваемая пластинка по условию задачи свободна от внешних нагрузок, для компенсирования воздействия температурных членов, следует положить

$$m(s) = -M_n,\ p(s) = 0 \qquad (2.23)$$

Таким образом, при $T_2^* = T_1$ получаем задачу об изгибе тонкой пластинки с криволинейным отверстием и прямолинейным разрезом, по контуру L_1 которого приложена нагрузка (2.23). Не трудно заметить, что такая задача эквивалентная задаче о напряженно-деформированном состоянии пластинки, изгибаемой равномерно-распределенными (по внутреннему контуру L_1) моментами интенсивности $(-M_n)$, которая решена в работе [8]. При этом правая часть граничного условия на внутреннем контуре L_1 будет иметь вид (с учетом отображающей функции (1.14)) и приложенную нагрузку $(-M_n)$:

$$f_1 + if_2 = -\frac{M_n}{D(1-\nu)}A_1\tau\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n\tau^{-n} \qquad (2.24)$$

Выражение для коэффициентов интенсивности напряжения возле симметричных остроконечных дефектов (трещин) в случае температурного изгиба пластинки имеет согласно [1—8] следующий вид:

$$K = -\frac{12D}{h^2}(3+\nu)\frac{\varphi'(\xi_0)}{e^{i\theta}\omega^{II}(\xi_0)^{1/2}} \qquad (2.25)$$

где ξ_0 — точка единичной окружности в плоскости ξ, соответствующей вершинам угловой точки, рассматриваемой в плоскости z, θ — угол между полярной осью локальной системы координат (r, β), началом в вершине трещин и осью $0x$.

Приняв в (1.14) $b_1 = 0$, имеем $m = 1$ и $z = {}^1/_2 a(\xi + \xi^{-1})$. В этом случае внутренний контур L_1 переходит в прямолинейный разрез длиной $2l$. При отношении $A_2/l \geq 5$ рассматриваемую пластинку можно принять за бесконечную [1; 8].

Для такой пластинки с прямолинейной трещиной длины $2l$ формула (2.25) при температурном изгибе (как и для всестороннего чистого изгиба) получена в виде [1—8, 13]:

$$K = \frac{\alpha_t E}{1-\nu}T_1\sqrt{l}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.

2. *Гайвась И. В.* Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений//Прикл. механика. 1966. Т. 2. Вып. 2. С. 81—90.

3. *Грилицкий Д. В., Осив И. Н.* Термоупругая задача для пластинки с криволинейным отверстием//Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 11. С. 27—34.
4. *Каминский А. А., Саилов Н. С.* О влиянии теплового потока на развитие системы поверхностных трещин вблизи отверстия//Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 8. С. 67—74.
5. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев; Донецк: Вища шк., 1983. 160 с.
6. *Кит Г. С.* О влиянии однородного теплового потока на предельную нагрузку для пластины с трещиной//Физ.-хим. механика материалов. 1969. Т. 5. № 1. С. 114—115.
7. *Кулиев С. А.* К решению задач теории упругости методом аналитических функций//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 852—856.
8. *Кулиев С. А.* Изгиб многоугольной пластинки с центральным круглым отверстием и двумя прямолинейными разрезами различной длины//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 173—179.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. *Прусов И. А.* Некоторые задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та. 1972. 198 с.
11. *Тимошенко С. П., Гурьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
12. *Шерман Д. И.* О напряжениях в скручиваемом круговом брусе, ослабленном призматической полостью//Изв. АН СССР. ОТН. 1951. № 7. С. 969—995.
13. *Швец Р. Н.* Применение теории функций комплексного переменного к решению температурной задачи изгиба тонких пластинок//Прикл. механика. 1968. Т. 4. Вып. 6. С. 23—28.

Баку

Поступила в редакцию
10.VI.1991