

УДК 539.3

© 1993 г. В. А. ПУХЛИЙ, В. И. ШАЛАШИЛИН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Ранее в [1] были получены уравнения относительно деформационных приращений радиальной и осевой координат срединной поверхности, при этом в уравнениях равновесия использованы радиальные и осевые усилия. Такой подход позволил тождественно выполнить условия сопряжения оболочек между собою, при этом упрощается вид интеграла уравнений равновесия, следующего из уравнений равновесия конечной отсеченной части оболочки. Эффективность полученных уравнений особенно важна в задачах, когда сложные оболочечные конструкции сопрягаются через упругие ребра (шпангоуты). В публикуемой работе приводится обобщение ранее полученных уравнений применительно к расчету оболочек вращения переменной жесткости, сопряженных через упругое кольцо.

1. Определяющие уравнения. На фиг. 1 показаны две оболочки вращения I и II, сопряженные через упругое кольцо III. Ось X направлена вдоль оси вращения, а ось Y нормально к оси X. Напряженно-деформированное состояние оболочек вращения I и II определяется следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений [1]:

$$dX/ds = (1 + \varepsilon_s) \cos \theta, \quad dY/ds = (1 + \varepsilon_s) \sin \theta \quad (1.1)$$

$$d\theta/ds = -\kappa_s + d\theta_0/ds, \quad dM_s/ds = Q_s - Y^{-1} \sin \theta (M_s - M_\alpha)$$

$$dN_s/ds = (1 + \varepsilon_s) [-Y^{-1} \sin \theta (N_s - N_\alpha) + r^{-1} Q_s - q_r]$$

$$dQ/ds = (1 + \varepsilon_s) [-r^{-1} N_s - Y^{-1} (Q_s \sin \theta + N_\alpha \cos \theta) + q_n]$$

$$\varepsilon_s = N_s/B - \nu(Y/Y_0 - 1) \quad (1.2)$$

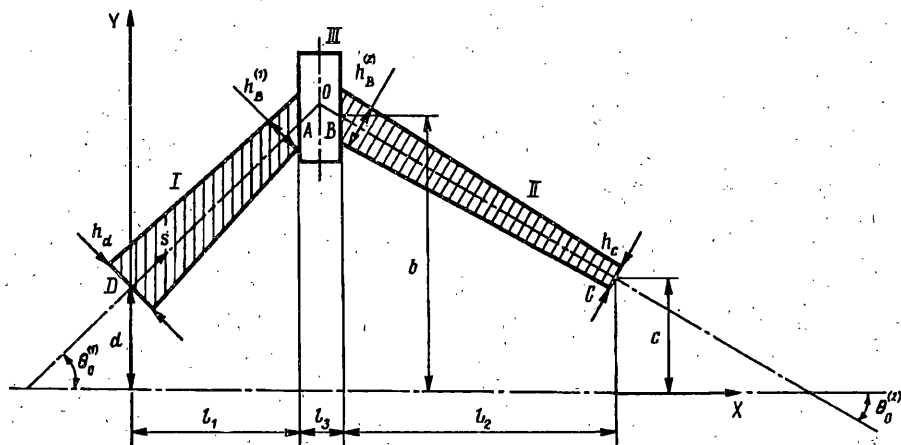
$$N_\alpha = \nu N_s + (1 - \nu^2) B (Y/Y_0 - 1)$$

$$\kappa_s = -M_s/D - \nu Y_0^{-1} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$M_\alpha = \nu M_s - (1 - \nu^2) D Y_0^{-1} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

2. Учет упругого кольца. Перейдем к рассмотрению соединения двух оболочек вращения через упругое кольцо (фиг. 2).

Знаком минус обозначены величины, относящиеся к точке A соединения левой оболочки I с кольцом, а знаком плюс — правой оболочки II (точка B). Нижний индекс (0) относится к величинам для центра тяжести сечения кольца. Далее введены следующие обозначения: P_x, P_y, M — погонные интенсивности усилий и моментов, приложенных к кольцу и сведенных к центру тяжести его сечения; ϑ — угол поворота сечения кольца; x, y — продольные и радиальные смещения; r — радиус-вектор точки относительно центра тяжести сечения; φ — полярный угол этой точки.



Фиг. 1

Так как оболочки присоединены к кольцу жестко, то они и кольцо поворачивают на одинаковый угол

$$\vartheta^- = \vartheta^+ = \vartheta_0 \quad (2.1)$$

Если x_0 продольное смещение центра тяжести кольца, то смещения точек A и B с учетом поворота сечения на угол ϑ_0 равны

$$x^- = x_0 - r^+ (\sin \varphi^+) \vartheta_0, \quad x^+ = x_0 - r^- (\sin \varphi^-) \vartheta_0$$

Отсюда, исключая x_0 , получаем

$$x^+ - x^- = - (r^+ \sin \varphi^+ - r^- \sin \varphi^-) \vartheta_0 \quad (2.2)$$

Точно так же для радиальных смещений

$$y^+ = y_0 + r^+ \cos \varphi^+ \vartheta_0, \quad y^- = y_0 + r^- \cos \varphi^- \vartheta_0 \quad (2.3)$$

Отсюда

$$y^+ - y^- = (r^+ \cos \varphi^+ - r^- \cos \varphi^-) \vartheta_0 \quad (2.4)$$

Рассмотрим статические соотношения. Условие равновесия кольца $\sum P_x = 0$ записывается в виде (фиг. 2):

$$T_x^+ Y^+ - T_x^- Y^- + P_x Y_0 = 0 \quad (2.5)$$

Условие равновесия полукольца (фиг. 3, а) имеет вид

$$T_y^+ Y^+ + P_y Y_0 - T_y^- Y^- - N_0 = 0 \quad (2.6)$$

Продольное усилие N_0 , возникающее в кольце, связано с его удлинением ϵ и радиальным смещением y_0 соотношением закона Гука

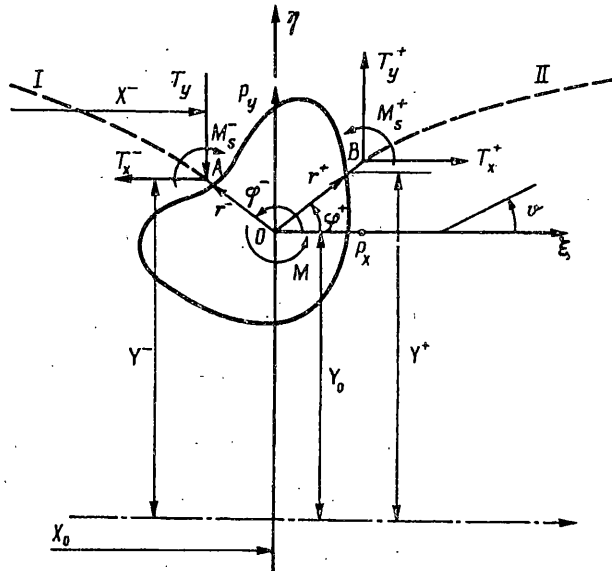
$$N_0 = EF\epsilon = EFy_0/Y_0 \quad (2.7)$$

Но, учитывая (2.3), получаем

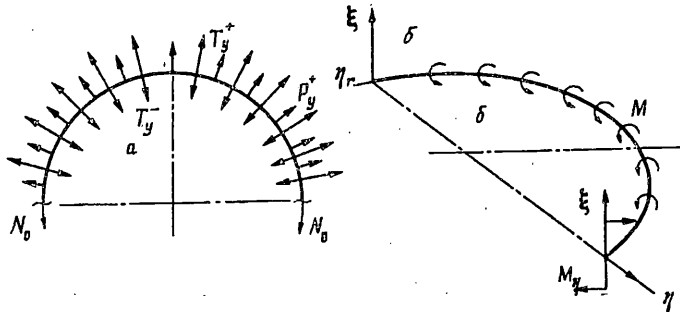
$$y_0 = y^- - r^- \cos \varphi^- \vartheta_0 \quad (2.8)$$

С учетом (2.7), (2.8) уравнение (2.6) сводится к виду

$$T_y^+ Y^+ - T_y^- Y^- - EF (y^- - r^- \cos \varphi^- \vartheta_0)/Y_0 + P_y Y_0 = 0 \quad (2.9)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассматривая моментные равновесия полукольца (на фиг. 3, а усилия T_x^\pm , T_y^\pm и моменты M_s^\pm условно не показаны), получаем

$$Y_0 M + M^+ Y^+ - M^- Y^- + T_y^+ Y^+ r^+ \cos \varphi^+ - T_x^+ Y^+ r^+ \sin \varphi^+ + T_y^- Y^- r^- \cos \varphi^- + T_x^- Y^- r^- \sin \varphi^- - M_\eta = 0 \quad (2.10)$$

Но момент M_η связан с углом поворота сечения кольца ϑ_0 известным соотношением

$$M_\eta = -EJ_\eta \vartheta_0 / Y_0 \quad (2.11)$$

В итоге соотношение (2.10) окончательно запишется в форме

$$Y_0 M + M_s^+ Y^+ - M_s^- Y^- + T_y^+ Y^+ r^+ \cos \varphi - T_x^+ Y^+ r^+ \sin \varphi + T_y^- Y^- r^- \cos \varphi + T_x^- Y^- r^- \sin \varphi + EJ_\eta \vartheta_0 / Y_0 = 0 \quad (2.12)$$

Соотношения (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), (2.9), (2.12) связывают основные неизвестные до и после кольца (в точках А и В оболочек). При использовании прогонки на прямом ходе нужно выразить неизвестные в точке В через неизвестные в точке А. Связывающие их соотношения будут

$$x^+ = x^- - (r^+ \sin \varphi^+ - r^- \sin \varphi^-) \vartheta^- \quad (2.13)$$

$$y^+ = y^- + (r^+ \cos \varphi^+ - r^- \cos \varphi^-) \vartheta^-$$

$$\vartheta^+ = \vartheta^-, \quad T_x = Y^- T_x^- / Y^+ - Y_0 P_x / Y^+$$

$$T_y^+ = E F y^- / (Y_0 Y^+) - E F r^- (\cos \varphi^-) \vartheta^- / (Y_0 Y^+) - Y_0 P_y / Y^+ \quad (2.13)$$

$$M_s^+ = - E F r^+ (\cos \varphi^+) y^- / (Y_0 Y^+) + (E F r^+ r^- \cos \varphi^+ \times$$

$$\times \cos \varphi^- / (Y_0 Y^+) - E J_{\eta} / (Y_0 Y^+)) \vartheta^- - Y^- (r^+ \sin \varphi^+ + r^- \sin \varphi^-) T_x^- / Y^+ -$$

$$- Y^- (r^+ \cos \varphi^+ + r^- \cos \varphi^-) T_y^- / Y^+ + Y^- M_s^- / Y^+ + Y_0 r^+ \sin \varphi^+ \times$$

$$\times P_x / Y^+ + Y_0 r^+ \cos \varphi^+ P_y / Y^+ - Y_0 M / Y^+$$

Последнее соотношение получено из уравнения (2.12) после исключения из него T_x^+ и T_y^+ с помощью соотношений (2.5), (2.9). Формулы перехода представлены так, чтобы их можно было записать в матричной форме

$$Z^+ = AZ^- + BP$$

$$Z = [x, y, \vartheta, T_x, T_y, M_s]^T, \quad P = [P_x, P_y, M]^T$$

где Z, P — вектора, а матрицы A и B записываются на основании выражений (2.13).

3. Решение краевой задачи. К решению краевой задачи для системы уравнений (1.1), (1.2) применим модифицированный метод последовательных приближений [2], в котором для ускорения сходимости решения используется метод телескопического сдвига степенного ряда Ланцоша [3].

Исходную систему уравнений (1.1) представим в нормальной форме Коши

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v + f_m \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (3.1)$$

В соответствии с методом переменные коэффициенты $B_{v,m}$ и свободные члены f_m представлены через смещенные полиномы Чебышева

$$B_{v,m} = \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} d_r^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi), \quad f_m = \sum_{r=0}^q f_{m,r} (d_r r!)^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi) \quad (3.2)$$

Здесь q — степень интерполяционного полинома, a_k — коэффициенты разложения ξ^r в ряд по многочленам Чебышева. В выражениях (3.2) $d_r = 1$ для $r = 0$ и $d_r = 2^{2^{r-1}}$ для остальных r .

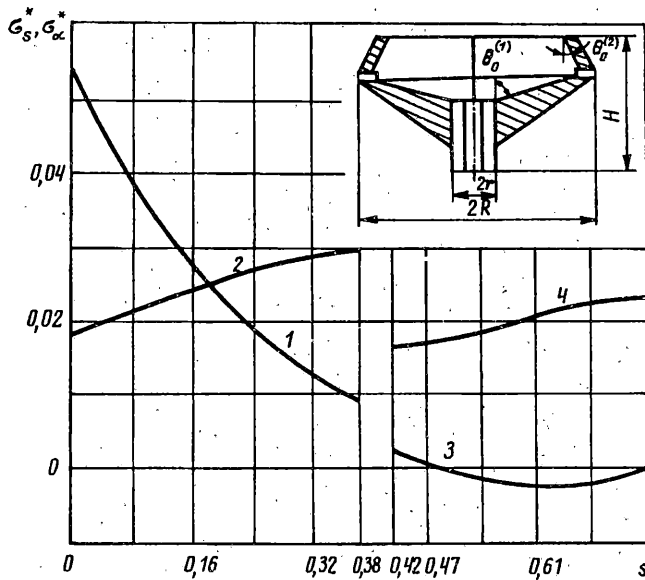
Общее решение системы уравнений (3.1) имеет вид

$$X_m = \sum_{\mu=1}^s C_{\mu} [d_0 a_0 T_0^*(\xi) \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n}] + \sum_{j=0}^q t_{m,j,0} [d_{j+1} (j+1)!]^{-1} \times \\ \times \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n} \quad (3.3)$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j=r$, μ — номер фундаментальной функции, C_{μ} — постоянные интегрирования.

В решении (3.3) $\delta = 1$, если $m = \mu$ и $\delta = 0$ для остальных μ . Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения $d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta$ в правую часть однородной системы уравнений

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v \quad (v = 1, \dots, S)$$



Фиг. 4

Последующие приближения осуществляются по формулам

$$X_{m, \mu, n} = \sum_{j=1}^{\beta} T_{m, \mu, n, j} [d_{n+j-1} (n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi) \quad (3.4)$$

$$X_{m, n} = \sum_{j=1}^{\beta} t_{m, n, j} [d_{n+j-1} (n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi), \quad \beta = n(q+3) - 2$$

Коэффициенты $t_{m, \mu, n, j}$ и $t_{m, n, j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам

$$t_{m, \mu, n, j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v, m} t_{v, \mu, n-1, j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma)$$

$$t_{m, n, j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v, m} t_{v, n-1, j-r} (n+j)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-\gamma)$$

Постоянные интегрирования C_{μ} , входящие в общее решение системы уравнений (3.3) находятся из граничных условий.

В соответствии с изложенным алгоритмом проводился расчет камеры пневмопрядильной машины (фиг. 4). Исходные данные для расчета $b=R=3$ см, $\theta_0^{(1)}=75^\circ$, $\theta_0^{(2)}=30^\circ$.

Для оболочки I: $h=h_0(1-s)$, $h_0=0,3$ см, $s_1=1,20$ см, $0 \leq s \leq 0,38$.

Для оболочки II: $h=\delta=0,18$ см, $s_2=2,25$ см, $0,42 \leq s \leq 0,75$.

Для кольца: $0,38 \leq s \leq 0,42$, $h=0,4$ см.

Материал камеры: дюралюминий марки Д16Т; $n=45000$ мин⁻¹. Нормальная и тангенциальная составляющие центробежной нагрузки определяются по формулам

$$\bar{q}_n = (1-v^2) R^2 / (E\delta^2) \begin{cases} q(s) \cos \theta_0^{(1)} & (0 \leq s \leq s_1) \\ q(s) \cos \theta_0^{(2)} & (s_1 \leq s \leq s_2) \end{cases}$$

$$\bar{q}_\tau = (1-v^2) R^2 / (E\delta^2) \begin{cases} q(s) \sin \theta_0^{(1)} & (0 \leq s \leq s_1) \\ q(s) \sin \theta_0^{(2)} & (s_1 \leq s \leq s_2) \end{cases}$$

Выражение для $q(s) = \rho h(s) \omega^2 Y_0(s) = \rho \delta \bar{h}(s) \omega^2 R \bar{Y}_0$, где $\rho = \gamma/g$ — массовая плотность материала, $\omega = 2\pi n$, n — обороты (с).

На фиг. 4 показаны эпюры распределения безразмерных продольных и окружных напряжений $\sigma_s^* = \sigma_s R(1 - \nu^2)/(E\delta)$, $\sigma_\alpha^* = \sigma_\alpha R(1 - \nu^2)/(E\delta)$. Кривые 1—4 соответствуют $\sigma_s^{*(1)}$, $\sigma_\alpha^{*(1)}$, $\sigma_s^{*(2)}$, $\sigma_\alpha^{*(2)}$. Как следует из данных расчета, наибольшие продольные напряжения возникают в месте заделки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухлий В. А., Шалашилин В. И. Об одной задаче для сопряженных оболочек вращения переменной жесткости//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 146—152.
2. Пухлий В. А. Решение задачи об изгибе косоугольной в плане цилиндрической трехслойной панели модифицированным методом последовательных приближений//Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 10. С. 62—67.
3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство: М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.I.1991