

УДК 532.546

© 1993 г. О. П. АЛЕКСЕЕНКО

КВАЗИРАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

Рассматривается плоская круговая трещина в неограниченной упругой среде. Ее радиус растет при нагнетании нефилтующейся несжимаемой вязкой жидкости из точечного источника в центре трещины. Задача — одна из центральных в проблеме гидроразрыва, и она неоднократно обсуждалась [1, 2], начиная с пионерских работ [3, 4]. Ввиду ее сложности и приближенности сформулированных моделей интерес к получению строгих результатов сохранился до настоящего времени. В рамках плоской геометрии уже предпринималась попытка [5] точного анализа плавных режимов закачки. В данной работе этот подход обобщен на осесимметричный случай. Развита формализация, которая позволяет свести задачу к квазиравновесной. При этом вместо рассмотрения множества различных режимов гидроразрыва и соответствующего необозримого количества мгновенных состояний трещины описывается набор возможных равновесных состояний. Каждое из последних характеризуется двумя параметрами состояния и не зависит от предыстории. Предложены простой приближенный и уточненные алгоритмы решения.

1. Основные уравнения рассматриваемой задачи хорошо известны [1]. Пусть X обозначает радиальную координату в плоскости трещины, L_y — радиус участка, где действует давление $P(X)$ жидкости. L — радиус трещины, $W(X)$ — профиль ее раскрытия. Связь W и P дается формулой Снеддона [6]. В задачах гидроразрыва удобнее ее видоизменение, которое определяет W через распределение $P'(X)$ радиального градиента давления в зоне заполнения:

$$W(X) = -\frac{2}{\pi D} \int_0^{L_y} P'(X_1) \left\{ \sqrt{L^2 - X^2} - \int_{\max(X, X_1)}^L dX_2 \sqrt{\frac{X_2^2 - X_1^2}{X_2^2 - X^2}} \right\} dX_1 \quad (1.1)$$

Через $\max(X, X_1)$ обозначено большее из двух чисел в скобках, $D = 0, 5E(1 - \nu^2)^{-1}$ — упругая константа, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Ядро интегрального преобразования (1.1) можно интерпретировать как профиль трещины радиуса L , формирующейся под действием равномерной нагрузки единичной интенсивности, приложенной в центральном круге радиуса X_1 .

При большой глубине горизонтальной трещины гравитация моделируется обычно [6] вертикальными сжимающими силами P_g «на бесконечности». Их вклад в (1.1) учитывает величина

$$W_g = 2(\pi D)^{-1} P_g \sqrt{L^2 - X^2} \quad (1.2)$$

добавляемая к правой части со знаком минус.

Интенсивность напряжений на кромке растущей трещины характеризуется [1] постоянным коэффициентом K интенсивности напряжений, связанным с W предельным условием [6]:

$$K = (\pi/2)^{1/2} D \lim_{x \rightarrow L} \frac{W(X)}{\sqrt{L - X}} \quad (1.3)$$

Течение жидкости в узкой трещине описывается в безынерционном приближении уравнением Буссинеска [3]:

$$P'(X) = -3\mu Q(X)/(4\pi XW^3(X)) \quad (1.4)$$

Здесь μ — динамическая вязкость, $Q(X)$ — объемный расход через вертикальное сечение радиуса X . Разница между ежесекундным суммарным количеством Q_0 нагнетаемой жидкости и расходом Q определяется скоростью $\partial\Omega/\partial T$ изменения со временем T объема $\Omega(X)$ центральной части полости трещины, ограниченной упомянутым цилиндрическим сечением фиксированного радиуса X :

$$Q = Q_0 - \frac{\partial\Omega}{\partial T}, \quad \Omega(X) = 4\pi \int_0^X X_1 W(X_1) dX_1 \quad (1.5)$$

Заметим, что объем Ω_s жидкости в трещине численно совпадает с $\Omega(L_s)$. В первом уравнении (1.5) можно избавиться от времени благодаря предполагаемому квазиравновесию мгновенных состояний. В этом случае, в конечном итоге, по времени дифференцируются параметры состояния. Выберем в качестве параметров Ω_s и Q_0 . Очевидно, что $\partial\Omega_s/\partial T = Q_0$, а скорость изменения Q_0 при плавных режимах закачки будем считать малой величиной. Тогда приближенно

$$Q = Q_0 q, \quad q = 1 - \partial\Omega/\partial\Omega_s \quad (1.6)$$

2. Сформулированную систему уравнений удобнее анализировать в безразмерных переменных, что уменьшает число независимых параметров. Вместо линейных координат X , L_s вводятся соответствующие угловые переменные φ , γ по формулам $X = L \sin \varphi$, $L_s = L \sin \gamma$. Для раскрытия вводится масштаб $W_* = (3\mu Q_0 L)^{1/4} (2\pi^2 D)^{-1/4}$, зависящий от текущего радиуса. Формулы обезразмеривания имеют вид

$$W = W_* v \cos \varphi, \quad W_s = W_* v_s \cos \varphi \quad (2.1)$$

Учитывая (1.2), для v_s получим соотношение

$$v_s = 2P_g(L/D)^{3/4} (3\pi^2 \mu Q_0/2)^{-1/4} \quad (2.2)$$

Подставим (1.4) в (1.1) с добавкой (1.2). Исключив таким образом P' , обезразмерим получившееся уравнение. Обозначая $f(\varphi) = q(\varphi)\theta^{-1}(\varphi)v^{-3}(\varphi)$, $\theta(\varphi) = \sin \varphi \cos^2 \varphi$, можем записать результат в виде

$$v = -v_s + Af, \quad Af(\varphi) = \int_0^\gamma A(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \varphi \leq \pi/2 \quad (2.3)$$

$$A(\varphi, \psi) = 1 - \cos^{-1} \varphi \int_{\max(\varphi, \psi)}^{\pi/2} \sqrt{(\sin^2 \eta - \sin^2 \varphi) / (\sin^2 \eta - \sin^2 \psi)} \cos \eta d\eta \quad (2.4)$$

Здесь $A(\varphi, \psi)$ — ядро интегрального оператора A . Целью последующих преобразований (2.3) будет получение уравнения, определяющего $v(\varphi)$ на интервале $\varphi \leq \gamma$. Из дальнейшего будет ясно, что решение этого уравнения фактически равносильно решению всей задачи.

Предварительно положим $\varphi = \pi/2$ в (2.3). Учитывая, что согласно (2.4), $A(\pi/2, \psi) = 1 - \cos \psi$, и обозначая $v_l = v(\pi/2)$, можем записать

$$v_l + v_s = a(f), \quad a(f) = \int_0^\gamma (1 - \cos \psi) f(\psi) d\psi \quad (2.5)$$

С другой стороны, v_1 и v_g связаны друг с другом. Действительно, обезразмеривая предельное условие (1.3), можем выразить L через v_g :

$$L = L_l, \quad L_l = 3\mu Q_0 D^3 / (2K^4), \quad l = v_l^4 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.2), найдем связь

$$v_g = \alpha v_l^3, \quad \alpha = P_g K^{-3} \sqrt{6\mu Q_0 D^3 / \pi} \quad (2.7)$$

Подстановка первого соотношения в (2.5) дает представление

$$\alpha = [a(f) - v_l] v_l^{-3} \quad (2.8)$$

которое устанавливает зависимость между v_l и γ при заданном α , т. е. в процессе гидроразрыва. Эту зависимость можно переписать также в виде полезной формулы, удобной при расчете v_l :

$$v_l = [a_0 / (\alpha + v_l^{-2})]^{1/6}, \quad a_0 = v_l^3 a(f) \quad (2.9)$$

Вернемся к уравнению (2.3). Исключая v_g с помощью (2.5), можем переписать его в форме

$$v = v_l + Gf, \quad Gf(\varphi) = \int_0^\gamma G(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \varphi \leq \pi/2 \quad (2.10)$$

$$G(\varphi, \psi) = A(\varphi, \psi) - (1 - \cos \psi), \quad f = q\theta^{-1}v^{-3}$$

Для доопределения уравнения (2.10) остается выразить q в безразмерных терминах. С этой целью подставим (2.6) в выражение W_* и введем новый масштаб $W_l = K^{-1}(1.5\mu Q_0 D / \pi)^{1/2}$, независимый от текущего радиуса. При этом $W_* = W_l v_l$. С помощью W_l аналогичный масштаб $\Omega_l = (\pi/2)^{1/2}(3\mu Q_0)^{5/2} K^{-9} D^{13/2}$ можно ввести для объемов

$$\Omega = \Omega_l v_l^3 \omega, \quad \Omega_s = \Omega_l v_l^3 \omega_s, \quad \omega = \int_0^\varphi v\theta d\psi, \quad \omega_s = \int_0^\gamma v\theta d\psi \quad (2.11)$$

Подставим теперь эти выражения во вторую формулу (1.6) и учтем, что Q_0 , а значит, и Ω_l , можно проносить за знак дифференцирования, имея в виду предположение о плавности изменения Q_0 . После несложных выкладок получим

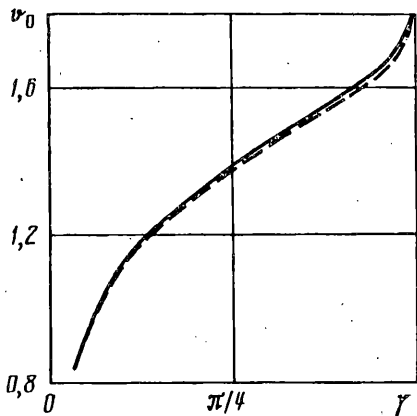
$$q = 1 - \frac{gu_l \omega + v_l \omega_{s,\gamma} - 4u_l v \sin^2 \varphi \cos \varphi}{9u_l \omega_s + v_l \omega_{s,\gamma}} \quad (2.12)$$

$$\omega_{s,\gamma} = \int_0^\gamma u\theta d\psi + v(\gamma)\theta(\gamma), \quad \omega_{,\gamma} = \int_0^\varphi u\theta d\psi$$

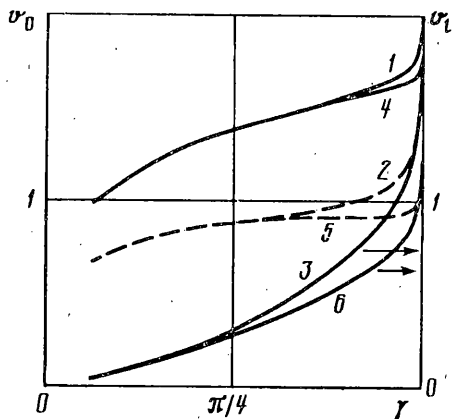
$$u = v_{,\gamma}, \quad u_l = v_{l,\gamma}$$

Индекс γ после запятой означает дифференцирование по параметру γ при фиксированном значении α . Из определений безразмерных величин, данных в (2.11) и (2.12), следует, что q зависит от v и u . Нелинейное уравнение (2.10) относительно v в результате выглядит довольно сложным, поскольку содержит не только интегральные преобразования v по переменной φ , но и дифференцирование по параметру γ . Казалось бы, возникает необходимость решать задачу Коши по переменной γ , что означает зависимость данного состояния от предистории. Но это не согласуется с представлениями о квазиравновесии состояний. Противоречие снимается, если предположить слабую зависимость q от u .

К этому же выводу можно прийти из других рассуждений. На профиль трещины влияет рост L и γ в процессе гидроразрыва. Очевидно, зависимость от



Фиг. 1



Фиг. 2

L существеннее, поскольку по сравнению со степенью заполнения радиус является быстро меняющейся переменной. Предельное условие (1.3) с учетом соображений размерности приводит к оценке $W \sim \sqrt{L}$. Частично зависимость от L содержится в масштабном множителе $W_* \sim v_i \sim L^{1/4}$, так что для безразмерного профиля v справедлива оценка $v \sim v_i \sim L^{1/4}$. В связи с этим естественно представить v в виде произведения v_i и медленно меняющейся функции γ , а при дифференцировании по γ «замораживать» второй сомножитель. При этом, в частности, $u \sim u_i v_i^{-1} v$. После подстановки v и u в таком виде в (2.12) нетрудно получить приближенное выражение для q :

$$q \approx q_0 = 1 - \omega_s^{-1}(\omega - 0,4v \sin^2 \varphi \cos \varphi) \quad (2.13)$$

которое вообще не зависит от u .

Следует отметить, что при определенных условиях медленно меняющаяся часть v может оказаться константой. В частности, можно показать, что в режиме $Q_0 = \kappa L$ ($\kappa = \text{const}$) и при $\alpha = 0$ выражение (2.13) становится точным, причем γ оказывается инвариантом процесса гидроразрыва.

Подставляя (2.13) в (2.10) и рассматривая $\varphi \leq \gamma$, получаем одномерное нелинейное интегральное уравнение относительно функции $v(\varphi)$ в зоне заполнения. Полагая $f = q_0 \theta^{-1} v^{-3}$, запишем уравнение в форме, обеспечивающей сходимость последовательных приближений

$$v = (v_i v^3 + G_0)^{1/4}, \quad G_0 = v^3(\varphi) \int_0^\gamma G(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi \quad (2.14)$$

Существенным моментом такой записи является компенсация степеней v в G_0 , т. е. $G_0(bv) = G_0(v)$ при $b = \text{const}$. Для рассматриваемого класса интегральных уравнений со степенной нелинейностью это приводит к эффективности стандартной итерационной схемы [5, 7].

Чтобы выбрать определенное решение уравнения (2.14), достаточно задать пару формальных параметров γ и v_i . Если рассматривать последовательность состояний, соответствующих некоторому процессу гидроразрыва, предпочтительнее параметры γ и α . В этом случае (2.14) нужно рассматривать совместно с (2.9), находя v и v_i одновременно методом последовательных приближений. Эффективность итераций обеспечивается подобием структур a_0 и G_0 .

3. Последующие расчеты показали, что приближение $q \approx q_0$ достаточно, чтобы находить v с максимальной погрешностью, не превышающей 3%. На фиг. 1 для $\alpha = 0$ представлены приближенная (штриховая) и уточненная зависимости раскрытия ψ в центре от степени заполнения γ .

Укажем теперь возможные способы учета зависимости q от u без решения задачи Коши. Самый прямой путь заключается в численном дифференцировании по γ получаемого из (2.14) приближенного значения v (ψ, γ, α). Затем величины v, u, v_i и u_i подставляются в исходное выражение (2.12) для q , а результат — в основное уравнение (2.14) вместо q_0 . Процесс можно повторять. Сходимость согласуется с предположением о равновесности состояний.

Другой способ расчета, свободный от ограничений на точность, которые обусловлены численным дифференцированием, состоит в получении дополнительных уравнений для u . Продифференцируем с этой целью обе части уравнения (2.10) по γ , зафиксировав γ и α . Обозначив $G_{\gamma f} = G(\psi, \gamma)f(\gamma)$ производную по верхнему пределу от Gf , результат дифференцирования представим в виде

$$u = u_i - 3G(fuv^{-1}) + G(q_{,\gamma}\theta^{-1}v^{-3}) + G_{\gamma f} \quad (3.1)$$

Входящая сюда величина u_i находится дифференцированием по γ соотношения (2.8):

$$u_i = c[-3a(fuv^{-1}) + a(q_{,\gamma}\theta^{-1}v^{-3}) + a_{\gamma}(f)] \quad (3.2)$$

$$c = [3a(f)v_i^{-1} - 2]^{-1}, \quad a_{\gamma}(f) = (1 - \cos \gamma)f(\gamma)$$

Чтобы избавиться от старших производных по γ , воспользуемся приближенным равенством $q_{,\gamma} \approx q_{0,\gamma}$. В развернутой форме оно имеет вид

$$q_{,\gamma} \approx q_{0,\gamma} = \omega_s^{-2} [\omega_{s,\gamma}\omega - \omega_s\omega_{,\gamma} - 0.4(\omega_{s,\gamma}v - \omega_s u) \sin^2 \psi \cos \psi] \quad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в (3.1) и (3.2) величины u и v можно рассматривать как независимые переменные, причем в терминах u и v в этих уравнениях не будет никаких операций по γ .

Для сходимости последовательных приближений уравнения (3.1) и (3.2) следует переписать в видоизмененной форме

$$u - \frac{1}{4}u_i = \frac{1}{4}[3(u - G(fuv^{-1})) + G(q_{0,\gamma}\theta^{-1}v^{-3}) + G_{\gamma f}] \quad (3.4)$$

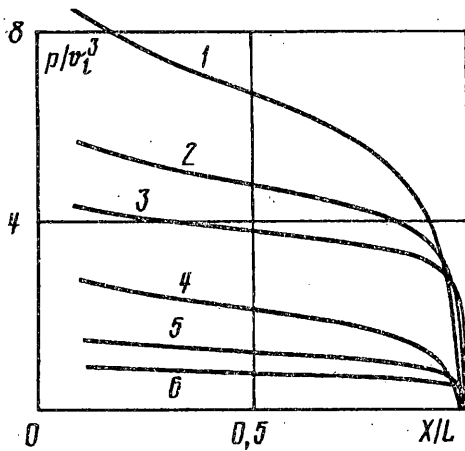
$$u_i = c(1 + 3c)^{-1}[3(u_i - a(fuv^{-1})) + a(q_{0,\gamma}\theta^{-1}v^{-3}) + a_{\gamma}(f)] \quad (3.5)$$

Можно получить иной приближенный вариант системы (3.1), (3.2). Продифференцируем по времени размерное уравнение, соответствующее основному уравнению (2.10), и отбросим члены, пропорциональные ускорениям потока, поскольку при плавных режимах зачатки эти ускорения должны быть малыми и слабо влиять на процесс гидроразрыва. Собственно, именно по этой причине отброшены и силы инерции в уравнении движения. Можно показать, что в безразмерном виде это эквивалентно замене множителя 3 на 2 и отбрасыванию члена, пропорционального $q_{,\gamma}$, в (3.1) и (3.2).

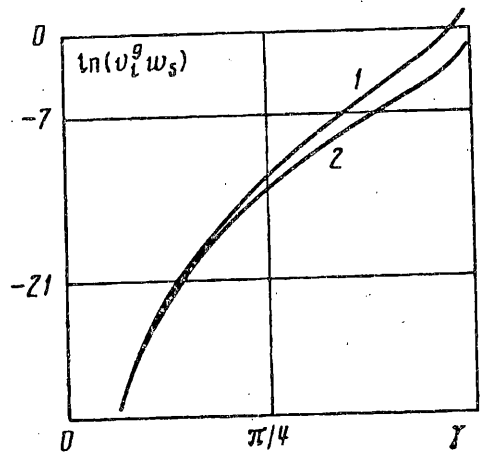
Результаты расчетов v и u с использованием численного дифференцирования и при помощи дополнительных уравнений (3.4), (3.5) отличаются между собой на величину менее 0,1%. При пренебрежении ускорениями рассчитанные значения v отличаются от предыдущих не более, чем на 0,5%. На фиг. 2 представлены зависимости ψ_0 и ψ_i от γ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют невесомой среде ($\alpha = 0$), кривые 4, 5, 6 — значению $\alpha = 1,85$. Распространенным способом получения приближенного решения является аппроксимация истинного распределения давления ступенчатой функцией [7]. Ясно, что, чем больше степень заполнения, тем эта аппроксимация точнее. Штриховые кривые на фиг. 2 изображают зависимость $\psi_0(\gamma)$ для указанной аппроксимации. В случае невесомой среды при $\gamma \geq 1,5702$ рассчитанные значения v отличаются от точных менее чем на 10%. Для $\alpha > 0$ эта граница еще ближе к $\pi/2$. Аппроксимация давления построена так, чтобы сохранить концентрацию напряжений на кромке, т. е. ψ_i при этом не меняется.

После расчета $\psi(\psi, \gamma, \alpha)$ получение остальных характеристик данного состояния не представляет никаких затруднений. Распределение давления, как легко показать, описывается формулами

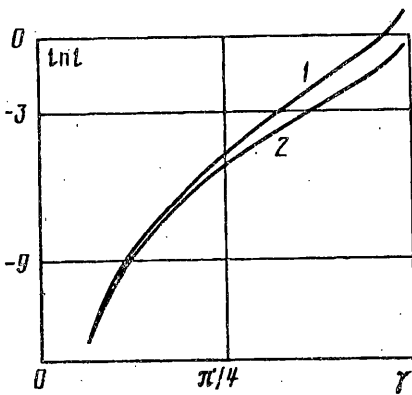
$$P = P_0 v_i^{-3} p, \quad P_i = K^3 (6\mu Q_0 D^3 / \pi)^{-1/2}, \quad p = \int_0^{\gamma} f d\psi$$



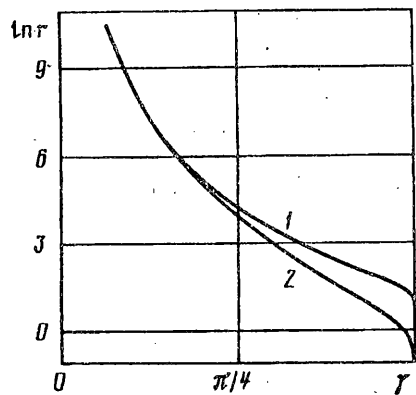
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 3 изображены профили давления для $\alpha = 1,85$ (кривые 1, 2, 3) и $\alpha = 0$ (кривые 4, 5, 6) при некоторых значениях γ : кривые 1, 4 — $\gamma = 1,4$; 2, 5 — $\gamma = 1,5$; 3, 6 — $\gamma = 1,55$. Зависимости безразмерных объема $\omega_s v_l^g$ закачанной жидкости и радиуса трещины l от γ представлены на фиг. 4 и фиг. 5. Кривые 1 соответствуют $\alpha = 0$, кривые 2 — $\alpha = 1,85$.

В силу эффектов осесимметричного растекания от точечного источника давление жидкости неограниченно возрастает по мере приближения к центру. Удобной мерой сопротивления трещины в этом случае может служить давление, усредненное по радиусу в зоне заполнения

$$\langle P \rangle = \left(\int_0^{L_\gamma} P dX \right) L_\gamma^{-1}$$

которое можно представить в виде

$$\langle P \rangle = R Q_0, \quad R = R^* r$$

$$R^* = \left(\frac{\pi K^6}{64 D^3 Q_0^3} \right)^{1/2}, \quad r = \frac{1}{v_l^3 \sin \gamma} \int_0^\gamma \frac{q d\psi}{v_l^3 \cos^2 \psi}$$

Зависимость r от γ представлена на фиг. 6 (кривая 1 для $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 1,85$).

Размерные переменные L, W, Ω_s получаются умножением соответствующих безразмерных комплексов $v_l^4, v_l v \cos \psi, \omega_s v_l^g$ на надлежащие масштабные множители L_l, W_l и Ω_l . В частности, согласно (2.11):

$$v_l^g \omega_s = \Omega_s \Omega_l^{-1} \tag{3.6}$$

Рассмотрим это равенство совместно со вторым уравнением (2.7). Правые части являются заданными функциями Q_0 и Ω_s , а левые — зависят от формальных параметров γ и α . Уравнения устанавливают соответствие между этими парами, позволяя выбирать в качестве параметров равновесного состояния режимные характеристики Q_0 и Ω_s . На этом примере видно, как устанавливать связь между режимными и формальными параметрами состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зазовский А. Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе//Изв. АН СССР. МТТ, 1979. No. 2. С. 103—109.
2. Abe H., Mura T., Keer L. M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks//J. Geophys. Res. 1976. V. 81. No. 29. P. 5335—5340.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта//Изв. АН СССР. ОТН. 1955. No. 5. С. 3—41.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта//ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475—486.
5. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. No. 6. С. 145—149.
6. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
7. Алексеенко О. П. Точные решения некоторых задач механики управляемого разрыва горных пород идеально пластическим флюидом: Канд. диссертация. Новосибирск, 1989. 133 с.
8. Желтов Ю. П. Механика нефтегазонасного пласта. М.: Недра, 1975. 216 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
8.И.1991