

УДК 539.43

© 1993 г. В. В. БОЛОТИН, В. М. КОВЕХ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В СРЕДЕ С МИКРОПОВРЕЖДЕНИЯМИ

Процесс роста усталостных трещин исследуется методом вычислительного эксперимента на основе теории, согласно которой каждое продвижение трещины есть проявление неустойчивости в системе «тело с трещинами — нагрузка» по отношению к независимым параметрам, характеризующим размеры и форму трещин. В отличие от предложенных ранее аналитических и полуаналитических реализаций теории, здесь учитывается влияние микроповреждений, накопленных впереди фронта трещины, на деформативные свойства материалов, а через последние — на поля напряжений и деформаций в окрестности фронтов, а также на значения движущих обобщенных сил и обобщенных сил сопротивления. Решение задачи, существенно осложненное неоднородностью и анизотропией деформативных свойств, приобретенных из-за микроповреждений, строится методом конечных элементов при специальных предположениях о законе накопления микроповреждений и их влиянии на удельную работу разрушения. Демонстрируется существенное снижение обобщенных сил сопротивления и скорости распространения трещин, вызванное накоплением микроповреждений у фронта трещин.

1. Теория роста усталостных трещин, основанная на синтезе микро- и макромеханики разрушения, была предложена в [1, 2]. Согласно этой теории нагруженное тело с трещинами трактуется как механическая система с односторонними связями, а рост трещин — как проявление неустойчивости в этой системе по отношению к параметрам, характеризующим размеры и форму трещин. Существенным компонентом теории является учет влияния микроповреждений, накапливаемых впереди фронтов трещин, на сопротивление материала продвижению трещин.

До сих пор теория реализовалась в аналитическом и полуаналитическом вариантах при упрощающих предположениях о свойствах материала, о механизме накопления микроповреждений и т. п. Обзор результатов можно найти в [3, 4]. Наиболее существенным предположением было допущение о том, что влиянием микроповреждений на деформативные свойства материалов можно пренебречь. Это предположение, неявно содержащееся в модели линейной механики разрушения и в некоторых моделях нелинейной механики (в частности, Леонова — Панасюка — Дагдейла), на первый взгляд представляется естественным. Вместе с тем, изменение деформативных свойств может заметно повлиять на распределение напряжений как в концевых зонах, так и (в меньшей степени) в дальнем поле. Изменение напряжений в концевых зонах влечет за собой снижение уровня микроповреждений в этих зонах и, следовательно, изменение сопротивления материала продвижению трещин. В свою очередь это влияет на скорость роста трещин, из-за чего меняется распределение напряжений и деформаций в окрестности фронтов и т. д. Кроме того, накопление микроповреждений сопровождается возникновением макроскопических деформаций, которые непосредственно не связаны с макроскопическими напряжениями. Эти деформации, называемые в дальнейшем разрыхлением, играют существенную роль в микромеханике пластического деформирования [5]. Не исключена возможность, что их влияние на

скорость роста усталостных трещин (через поля остаточных напряжений и деформаций) может оказаться заметным.

В уточненной постановке задачи возникают два новых компонента — деформативные свойства материала, которые изменяются при накоплении микроповреждений, и разрыхление. Но эти компоненты существенно осложняют постановку и решение задачи. Поля напряжений, деформаций и перемещений приходится искать в телах с неоднородным распределением деформативных свойств, которые изменяются в процессе нагружения. Деформативные свойства, как правило, приобретают значительную анизотропию. Ввиду сложности задачи приходится ограничиваться отдельными вычислительными экспериментами, которые проясняют общую картину и позволяют дать сравнительную оценку вклада различных факторов. Такие вычислительные эксперименты, естественно, требуют введения специальных предположений о соотношениях, связывающих деформативные свойства с мерами микроповреждений, и вообще для сред с накоплением микроповреждений.

Введем модель материала, который при однократном нагружении ведет себя «почти» как упругий. Добавление «почти» означает, что тензор деформаций ε и тензор напряжений σ связаны между собой зависимостью

$$d\varepsilon = d(\kappa \cdot \sigma) + d\eta \quad (1.1)$$

где κ — тензор податливостей (четвертого ранга). В отличие от закона Гука $\varepsilon = \kappa \cdot \sigma$ соотношения (1.1) содержат тензор податливостей, который изменяется в процессе деформирования, и дополнительную составляющую деформации η . Указанные факторы вносят квазипластическую составляющую ε_p с дифференциалом $d\varepsilon_p = d\kappa \cdot \sigma + d\eta$. При однократном нагружении влияние этой составляющей пренебрежимо мало, но оно может стать существенным при циклическом нагружении, когда число нагружений достаточно велико. Зависимость (1.1) дополним условием разгрузки

$$d\varepsilon = \kappa \cdot d\sigma \quad (1.2)$$

где тензор податливостей берется для состояния, достигнутого в конце последнего нагружения.

2. Следуя [2], рассмотрим систему «твердое тело с трещинами — нагрузка или нагружающее устройство» при квазистатическом нагружении и широких предположениях о механических свойствах материала тела, количестве, форме и размерах трещин. Форма и размеры трещин заданы при помощи m обобщенных координат Гриффитса $l_1, \dots, l_m$, совокупность которых будем обозначать $l = \{l_1, \dots, l_m\}$. Число обобщенных координат Гриффитса определяется количеством параметров, с точностью до которых заданы распространяющиеся трещины. Для плоской сквозной трещины этим параметром служит ее длина, т. е. по отношению к обобщенным координатам Гриффитса задача однопараметрическая. Плоская трещина эллиптической формы при допущении о том, что она сохраняет эллиптическую форму в процессе роста, задается при помощи двух обобщенных координат — длин полуосей эллипса. При произвольной в плане форме плоской трещины придется задавать большее число обобщенных координат, например совокупность длин радиус-векторов, проведенных под разными углами в точки, лежащие на контуре трещины.

Ограничившись необратимыми, «незаживающими» трещинами, типичными для конструкционных материалов, выберем обобщенные координаты Гриффитса так, чтобы они были неубывающими функциями времени. Тогда условие связей принимает вид

$$\delta l_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.1)$$

Эти связи будем считать идеальными. Поле вектора перемещений в теле при

заданных значениях $l_1, \dots, l_m$ обозначим $u(x, l)$, где x — координатный вектор. Вариации поля перемещений представим в виде суммы

$$\delta u = \delta_L u + \delta_G u \equiv \delta_L u + \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial l_j} \delta l_j \quad (2.2)$$

где $\delta_L u$ — вариации при фиксированных трещинах (вариации Лагранжа), $\delta_G u$ — вариации, порожденные изменением параметров трещин (вариации Гриффитса).

Применим к системе «тело с трещинами — нагрузка» принцип виртуальных перемещений. Система находится в равновесии, если в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\delta A \equiv \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f \leq 0 \quad (2.3)$$

Здесь δA_e и δA_i — виртуальная работа внешних и внутренних сил соответственно, δA_f — виртуальная работа сил сопротивления продвижению трещин.

Учитывая, что вариация поля перемещений (2.2) равна сумме двух независимых слагаемых, представим виртуальную работу в виде $\delta A = \delta_L A + \delta_G A$, где $\delta_L A$ — работа, совершаемая на вариациях Лагранжа, $\delta_G A$ — работа, совершаемая на вариациях Гриффитса. При вычислении виртуальной работы $\delta_G A$ к сравнению допускаются те состояния тела, которые отличаются только значениями обобщенных координат $l_1, \dots, l_m$ при выполнении уравнений равновесия, совместности и механического состояния, а также граничных условий и условий устойчивости по Ляпунову как в исследуемом (невозмущенном) состоянии, так и в смежных состояниях. При этих условиях $\delta_L A \equiv 0$.

Если $\delta_G A < 0$ при любых $\delta l_j > 0$, то состояние системы «тело с трещинами — нагрузка» является субравновесным и устойчивым. Если при $\delta l_j > 0$, где $j = 1, \dots, m_1$, соотношение (2.3) выполнено со знаком равенства, а при остальных $\delta l_j > 0$ имеем $\delta_G A < 0$, то система находится в равновесном состоянии по отношению к обобщенным координатам $l_1, \dots, l_{m_1}$ [1—4]. Это состояние равновесия устойчиво при $\delta_G(\delta_G A) < 0$ и неустойчиво при $\delta_G(\delta_G A) > 0$, где вторая вариация также берется по Гриффитсу. При $\delta_G(\delta_G A) = 0$ состояние равновесия является нейтральным. Это означает, что данное состояние — пограничное между устойчивым и неустойчивым состояниями, или что для вывода об устойчивости надо исследовать следующие вариации от $\delta_G A$.

В вычислительной механике разрушения [6] используют разностные и вариационно-разностные аппроксимации. При этом число обобщенных координат Лагранжа выбирают в соответствии с требуемой точностью вычислений. В дальнейшем для простоты будем считать число обобщенных координат Лагранжа конечным, учитывая, что при численной реализации это число может быть взято весьма большим. Так, в расчетах по методу конечных элементов число обобщенных координат (узловых перемещений) составляет величины порядка 10^3 , 10^4 и даже более.

Обозначим обобщенные координаты Лагранжа $q_1, \dots, q_n$, а их совокупность $q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Поле перемещений представим в виде

$$u(x | l) = \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k(x | l) \quad (2.4)$$

где координатные вектор-функции $\varphi_k(x | l)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям для тела с фиксированными трещинами. Для определенности примем, что в отличие от обобщенных координат Гриффитса l_j на знаки вариаций

δq_k ограничений не наложено. С учетом (2.2) и (2.4) для вариации поля перемещений получаем

$$\delta u(x|l) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \varphi_k(x|l)}{\partial l_j} \delta l_j + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x|l) \delta q_k \quad (2.5)$$

Сформулируем уравнения равновесия системы «тело с трещинами — нагрузка» в терминах обобщенных сил. Составляющие виртуальной работы в соотношении (2.3) являются линейными формами вариации δl_j и δq_k . В частности

$$\delta A_e + \delta A_l = \sum_{j=1}^m G_j \delta l_j + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (2.6)$$

где множители G_j — движущие обобщенные силы, а множители Q_k имеют смысл обычных обобщенных сил. В дальнейшем полагаем, что все условия равновесия удовлетворены, т. е. обобщенные координаты Лагранжа удовлетворяют уравнениям $Q_k \equiv 0$, где $k = 1, \dots, n$. Для обобщенных сил, продвигающих трещину, имеем формулу [3, 4]

$$G_k = \int_{\partial V} p_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial l_k} dS + \int_V X_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial l_k} dV - \int_V \frac{\partial W}{\partial l_k} dV \quad (2.7)$$

Здесь p_α — вектор напряжений на поверхности тела ∂V с объемом V , X_α — вектор объемных сил, W — взятая с обратным знаком плотность работы внутренних сил, произведенной от некоторого начального состояния, которое полагается ненапряженным, до достижения рассчитываемого состояния. Формула (2.7) сходна по структуре с обычной формулой для J -интеграла и аналогична известным обобщениям последней на трехмерный случай [7—9]. Отметим, что формула (2.7), вообще, не предполагает, что существует интеграл энергии или аналогичные законы сохранения; будучи основанной на принципе виртуальных перемещений, эта формула пригодна, например, в случае, когда внешние силы не имеют потенциала [10].

Виртуальную работу сил сопротивления росту трещин представим в форме

$$\delta A_f = - \sum_i \int_{L_i} \gamma_i |ds_i| \times \delta \lambda_i \quad (2.8)$$

где γ_i — удельная работа разрушения, отнесенная к единице площади трещины (новая площадь поверхности не удваивается), ds_i — элемент длины контура i -й трещины (вектор), $\delta \lambda_i$ — вектор виртуального перемещения контура трещины. Значения γ_i , вообще говоря, зависят от положения фронтов трещин, т. е. от l_j при $j = 1, \dots, m$. Интегрирование в (2.8) проводится по длине L_i контура, а суммирование — по всем трещинам, содержащимся в теле. С учетом (2.5) формулу (2.8) приводим к виду

$$\delta A_f = - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta l_j \quad (2.9)$$

где Γ_j — обобщенные силы сопротивления продвижению фронта трещины. Отметим, что обобщенные силы G_j и Γ_j , вообще говоря, зависят от определяемых в ходе решения обобщенных координат Лагранжа.

В терминах обобщенных сил основное соотношение (2.3) принципа виртуальных перемещений с учетом формул (2.7) и (2.9) принимает вид

$$G_j \leq \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.10)$$

Знак неравенства соответствует состояниям, субравновесным по всем обоб-

щенным координатам Гриффитса. Достижение равенства в (2.10) при одном из значений k означает, что по соответствующей координате l_k достигается равновесное состояние. Это состояние будет устойчиво, если выполнено условие

$$\partial (G_k - \Gamma_k) / \partial l_k < 0 \quad (2.11)$$

Аналогично формулируются условия равновесности и устойчивости по $m_1 > 1$ обобщенным координатам [2—4, 10].

3. Для описания процесса роста усталостных трещин следует ввести в рассмотрение процесс накопления микроповреждений и учесть зависимость обобщенных сил от уровня накопленных микроповреждений. Введем некоторую меру (скалярную или тензорную) микроповреждений, накопленных в каждой точке тела [11]. Значение этой меры $w(x, t)$, вообще, являются функционалом от предыстории нагружения и роста трещины на отрезке времени $[0, t]$:

$$w(x, t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \{\sigma(x, t), l(t)\} \quad (3.1)$$

Обобщенные силы зависят от уровня микроповреждений и, следовательно, от времени (числа циклов нагружения). Пусть в начальный момент для всех l_j выполнены неравенства $G_j < \Gamma_j$. Пока

$$\sup_{t_{N-1} < t < t_N} [G_j(t) - \Gamma_j(t)] < 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.2)$$

где $(t_{N-1}, t_N]$ — отрезок N -го цикла нагружения, система находится в субравновесном состоянии по всем обобщенным координатам Гриффитса. При этом ни одна из трещин расти не будет. При достижении равенства

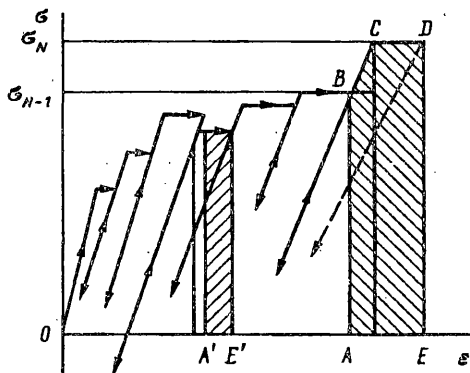
$$\sup_{t_{N-1} < t < t_N} [G_k(t) - \Gamma_k(t)] = 0 \quad (3.3)$$

состояние становится равновесным по обобщенной координате l_k . Если это состояние устойчиво, т. е. если условие (2.11) выполнено с учетом накопленных микроповреждений, то далее начинается непрерывный (устойчивый) рост усталостной трещины по координате l_k . Если условие (2.11) не выполнено, то в момент первого достижения равенства (3.3) состояние неустойчиво. За достижением этого состояния следует либо переход в ближайшее субравновесное состояние, либо финальное разрушение. Типичная ситуация состоит в том, что трещина продвигается малыми локальными скачками, причем этот рост сглаживается вследствие статистической неоднородности материала [3]. При численном моделировании будем рассматривать кусочно-сглаженные процессы нагружения и роста трещин, трактуя номер цикла N в пределах каждого блока нагружения как непрерывную независимую переменную и связывая скачки только с переходом от одного блока к другому.

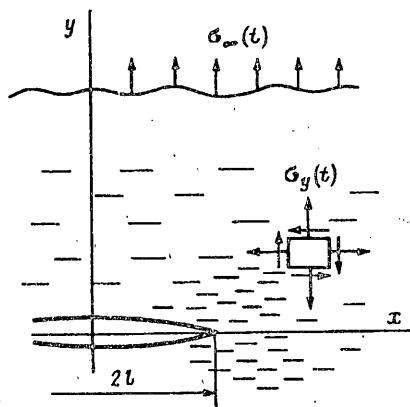
Покажем, как учесть свойства микроповреждаемого материала при определении движущих обобщенных сил. Для большей наглядности рассмотрим однопараметрический случай, когда формула (2.7) имеет вид (предполагается независимость V от l):

$$G_j = \int_{\partial V} p_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial l} dS + \int_V X_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial l} dV - \int_V \frac{\partial W}{\partial l} dV \quad (3.4)$$

Первые два члена в правой части вычисляются как обычно с тем отличием, что поля перемещений придется искать с учетом определяющих соотношений для микроповреждаемого материала. Рассмотрим третий интеграл, содержащий плотность W работы внутренних сил, совершенной от момента времени, когда тело находилось в начальном (ненапряженном) состоянии, до момента, для



Фиг. 1



Фиг. 2

которого определяется значение обобщенной силы. В условия (3.2) и (3.3) входят разности между активными обобщенными силами и обобщенными силами сопротивления. При этом проверка устойчивости должна производиться в те моменты, когда эти разности достигают максимальных значений. Как правило, в эти моменты активные обобщенные силы также достигают максимума. В случае циклического нагружения будем проверять устойчивость системы в моменты, когда начинается процесс разгрузки. Именно для этих моментов вычислим плотность работы внутренних сил.

Рассмотрим вначале одномерную зависимость между напряжением σ и деформацией ε (фиг. 1). Примем, что процесс накопления микрповреждений происходит только на полупероде нагружения, начиная от некоторого порогового значения, которое в свою очередь может зависеть от уровня микрповреждений. На этой стадии изменяется коэффициент податливости κ , а также увеличивается разрыхление η . Схематизируем участок диаграммы нагружения в пределах каждого цикла в виде отрезка прямой с угловым коэффициентом $1/\kappa$ и горизонтального участка, который отвечает приращению деформации из-за изменения податливости и разрыхления. Приращение плотности работы внутренних сил в пределах N -го цикла к моменту окончания нагружения равно площади трапеции $ABCDE$, заштрихованной на фиг. 1:

$$\Delta W(N) = \sigma_{N-1} \kappa_{N-1} (\sigma_N - \sigma_{N-1}) + \frac{1}{2} \kappa_{N-1} (\sigma_N - \sigma_{N-1})^2 \text{sign} (\sigma_N - \sigma_{N-1}) + \sigma_N [(\kappa_N - \kappa_{N-1}) \sigma_N + (\eta_N - \eta_{N-1})] \quad (3.5)$$

Здесь κ_{N-1} — податливость в начале N -го цикла нагружения, κ_N — податливость в конце этого цикла, σ_N — максимальное напряжение цикла, η_N — мера разрыхления, достигнутая на этом цикле. Множитель, зависящий от знака $\sigma_N - \sigma_{N-1}$, позволяет учесть отрезки процесса нагружения со снижающимся уровнем максимальных напряжений (см. заштрихованный прямоугольник с основанием $A'E'$ на фиг. 1).

Пренебрегая величинами, имеющими порядок квадратов от приращений напряжений и податливостей, перепишем соотношение (3.5) в виде

$$\Delta W(N) = \sigma_{N-1} \kappa_{N-1} (\sigma_N - \sigma_{N-1}) + \sigma_N [(\kappa_N - \kappa_{N-1}) \sigma_N - (\eta_N - \eta_{N-1})] \quad (3.6)$$

Плотность работы внутренних сил к окончанию фазы нагружения на N -м цикле найдем, суммируя приращение за N циклов

$$W(N) = \sum_{N_1=1}^N \Delta W(N_1) \quad (3.7)$$

Перейдем к более общему случаю циклического нагружения. Пусть напряжения в каждой точке тела изменяются таким образом, что в моменты времени, которые выбраны для решения вопроса об устойчивости, их значения образуют тензор $\sigma(N)$. При этом тензор $\sigma(N)$ медленно изменяется при переходе от одного цикла к другому, так что в пределах каждого блока нагружения процесс можно задать кусочно дифференцируемой функцией числа циклов N . Аналогично в виде кусочно дифференцируемых функций представим тензор податливостей и тензор разрыхления. Обобщение формул (3.6) и (3.7) на более общие соотношения между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\Delta W = \int \sigma \cdots \left[\frac{\partial}{\partial N} (\kappa \cdots \sigma) + \frac{\partial \eta}{\partial N} \right] dN \quad (3.8)$$

где интегрирование распространяется на блок нагружения с непрерывно дифференцируемым процессом $\sigma(N)$. Учет разрывов не требует дополнительных пояснений. В частности, формула для приращений плотности работы за один цикл получается путем очевидного обобщения формулы (3.8).

4. Для оценки косвенного (через изменение деформативности и через разрыхление) влияния микроповреждений на рост усталостных трещин рассмотрим трещину отрыва под действием номинальных циклических напряжений $\sigma_{\infty}(t)$. Пусть в начальном состоянии материал — линейно упругий и изотропный с модулем Юнга E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . В процессе нагружения свойства материала меняются. Характер этого изменения зависит от выбора мер микроповреждений и закона их накопления. Так, если в материале возникает система сфероидальных микропор, распределенных в малых макрообъемах статистически равномерно, то материал останется макроскопически изотропным. В общем случае материал приобретает анизотропию.

Применительно к трещине отрыва примем, что микроповреждения представляют собой систему множественных микротрещин, плоскости которых параллельны плоскости основной макроскопической трещины (фиг. 2). Скалярной мере микроповреждений ω можно приписать смысл отношения суммарной площади микротрещин в единице объема к некоторому критическому значению, при достижении которого происходит множественное растрескивание или, что почти то же самое, снижение трещиностойкости до нуля. Постулируем закон накопления микроповреждений (3.1) в следующей порогово степенной форме [1, 2]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} = \left(\frac{\Delta \sigma_y - \Delta \sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m \quad (4.1)$$

Здесь $\Delta \sigma_y$ — размах нормальных напряжений σ_y , действующих на площадках, которые параллельны плоскости основной трещины, σ_f — характеристика сопротивления материала накоплению микроповреждений, $\Delta \sigma_{th}$ — пороговое значение сопротивления, m — положительный показатель, аналогичный показателю кривых усталости. При $\Delta \sigma_y < \Delta \sigma_{th}$ вместо (4.1) полагаем $\partial \omega / \partial N = 0$.

Поврежденный материал является макроскопически ортотропным. Для плоского напряженного состояния связь между напряжениями и деформациями в пределах каждого блока нагружения берем в виде

$$\epsilon_x = (\sigma_x / E_x) - (\nu_{xy} \sigma_y) / E_y + \eta_x$$

$$\epsilon_y = (\sigma_y / E_y) - (\nu_{yx} \sigma_x) / E_x + \eta_y,$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G_{xy} + \eta_{xy}$$

где E_x и E_y — модули Юнга, G_{xy} — модуль сдвига, ν_{xy} и ν_{yx} — коэффициенты Пуассона. При этом принимаем, что микроповреждения влияют на значения модуля E_y , но не на значения E_x и G_{xy} . Из коэффициентов Пуассона только

v_{xy} принимаем зависящим от ω , причем так, чтобы сохранилось условие симметрии тензора упругих постоянных $v_{xy}/E_y = v_{yx}/E_x$. Для дальнейшего расчета полагаем

$$\begin{aligned} E_x &= E, \quad E_y = (1 - \omega^\beta) E, \quad G_{xy} = G \\ v_{xy} &= (1 - \omega^\beta) v, \quad v_{yx} = v \\ \eta_x &= \eta_{xy} = 0, \quad \eta_y = \eta_0 \omega^{\beta_1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\beta > 0$, $\beta_1 > 0$, $\eta_0 = \text{const}$. Для удельной работы разрушения — работы, затрачиваемой на продвижение фронта трещины на единицу площади, примем соотношение

$$\gamma = \gamma_0 (1 - \omega)^\alpha \quad (\alpha > 0) \quad (4.3)$$

где γ_0 — удельная работа разрушения для неповрежденного материала.

Соотношения (4.1)–(4.3) являются одним из простейших. Они могут быть заменены другими, более полно учитывающими механизм микрорастрескивания и влияние ансамблей микротрещин на эффективные (макроскопические) упругие постоянные. Так, можно принять, что микротрещины образуются под действием максимальных растягивающих напряжений и ориентированы соответствующим образом. Тогда взамен (4.2) получим более сложный случай неоднородной локальной ортотропии. Другой путь для обобщения и совершенствования — применение взамен (4.2) более «точных» соотношений для эффективных параметров микроповрежденных сред. Эти соотношения могут быть получены, например, из рассмотрения регулярных ансамблей трещин или стохастических моделей с применением метода самосогласованного поля [11–13]. Однако принятая выше модель представляется достаточной для целей анализа — оценить влияние микроповреждений на деформативность материала и на вызванное этим влиянием изменение скорости роста усталостных трещин.

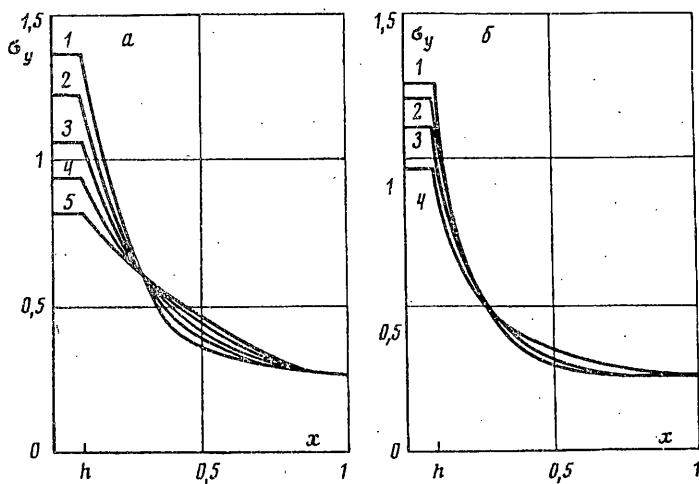
5. Вычислительный эксперимент проводился с применением метода конечных элементов по координатам и метода конечных разностей по числу циклов. Алгоритм вычислений состоит из следующих модулей: формирование конечно-элементной сетки, определение полей напряжений, деформаций и перемещений при заданном распределении деформативных свойств; вычисление уровня микроповреждений; пересчет матрицы жесткостей с учетом микроповреждений; итерационный процесс в пределах трех предыдущих модулей; вычисление обобщенных сил G и Γ ; проверка устойчивости и определение числа циклов, при котором происходит продвижение фронта трещины на один шаг сетки. Специальные пояснения необходимы только в связи с вычислением активной обобщенной силы G .

Конечно-разностный аналог формулы (2.7) для двумерной плоской задачи при отсутствии объемных сил имеет вид

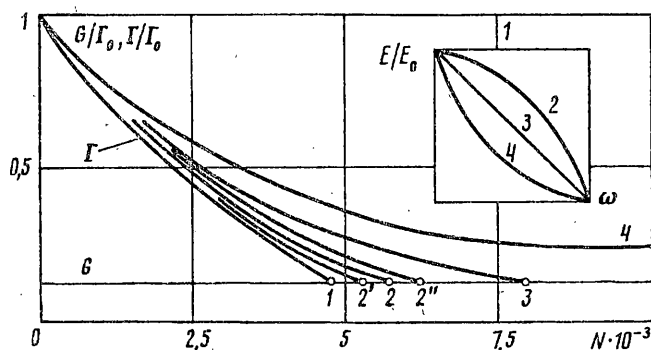
$$G\Delta l = \int_{\Omega} p_\alpha^I (u^{II} - u^I) dS - \int_{\Omega} (W^{II} - W^I) d\Omega \quad (5.1)$$

где приращение длин размера трещины Δl выполняет роль вариации δl , а индексы I и II относятся к идентичным и идентично нагруженным телам с размерами трещин l и $l + \Delta l$ соответственно. Формула (5.1) в явной форме отражает изохронный характер варьирования по Гриффитсу (все входящие в нее величины относятся к одному и тому же числу циклов N). Реализация формулы (5.1) подразумевает параллельное решение задачи для двух тел, что включено в алгоритм с разумным использованием промежуточных результатов для одного из тел.

Для проведения вычислительного эксперимента использовалась конечно-элементная модель, состоящая из треугольных элементов с линейным распределением перемещений. Сетка строилась с помощью специально разработанного конструк-



Фиг. 3



Фиг. 4

тора полуавтоматической сборки. Трещина моделировалась узкой щелью шириной $\rho = 0,005l_0$, где l_0 — начальная полудлина трещины. Область в ближайшей окрестности фронта продвигающейся трещины подвергалась наиболее детальной дискретизации. Сетка в этой области имела регулярную структуру с характерным размером элемента $h = 0,01l$. Сама область наибольшей дискретизации вытянута в направлении перемещения фронта. Качество сетки при использовании для определения G формулы (5.1) тестировалось на изотропном и ортотропном материале. При оптимальном выборе Δl погрешность составила соответственно 2,3% и 3,3%.

Вычислительный эксперимент проводился для гипотетического материала со следующими характеристиками: $K_{IC} = 50$ МПа $m^{1/2}$, $E = 100$ ГПа, $\nu = 0,25$, $\Delta\sigma_{th} = 200$ МПа, $\sigma_f = 10$ ГПа, $m = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha = 2$, $\eta_0 = 0,001$. Параметр β варьировался. Величина полудлины трещины равнялась $l_0 = 0,01$ м. Номинальное напряжение σ_∞ циклически изменялось от нуля до $\sigma_\infty^{max} = 100$ МПа. Основным шаг по числу циклов был принят равным $\Delta N = 250$. Решение задачи при фиксированном положении трещин проводилось до достижения равенства $G = \Gamma$, после чего обе трещины продвигались вперед на один шаг. При этом на одно приращение длины приходилось приблизительно $5 \cdot 10^3$ циклов, т. е. около 20 основных шагов по числу циклов. С приближением к соотношению $G = \Gamma$ шаг дробился.

На фиг. 3 показано распределение напряжений σ_y [ГПа] на продолжении фронта стационарной трещины, т. е. при $N \leq N_*$, где N_* — число циклов, при

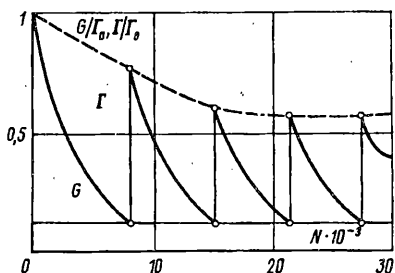
котором начинается рост трещины (x [мм]). В пределах первого шага сетки условно принято равномерное распределение напряжений, осредненных на этом шаге. Далее представлены результаты интерполяции по вычисленным значениям. Фиг. 3, а построена при $\beta = 1$, что отвечает более сильному влиянию микроповреждений на деформативность материала, фиг. 3, б при $\beta = 2$. Цифры 1—5 у кривых на фиг. 3, а соответствуют различным значениям числа циклов: $N = 0, 2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 6 \cdot 10^3$ и $8 \cdot 10^3$. При последнем значении впервые достигается равенство $G = \Gamma$, и трещина начинает расти. Цифры 1—4 на фиг. 3, б отвечают значениям $N = 0, 2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 5,75 \cdot 10^3$. Во втором случае падение напряжений у фронта трещин менее существенно.

Влияние микроповреждений на значения активной обобщенной силы G и обобщенной силы сопротивления Γ проиллюстрировано на фиг. 4. Обобщенные силы отнесены к значению силы сопротивления Γ_0 для неповрежденного материала. Цифры 1—4 у кривых на фиг. 4 отвечают разным показателям β в формулах (4.2) для характеристик материала. В частности, модуль Юнга в направлении поперек растрескивания $E_y = E(1 - \omega^\beta)$, где ω — мера микроповреждений. Кривая 1 построена при $\beta \rightarrow \infty$, т. е. в предположении, что микроповреждения на деформативные свойства не влияют. Кривые 2, 3 и 4 построены соответственно при $\beta = 2, 1$ и $0,5$. В последнем случае влияние микроповреждений на значения обобщенной силы Γ наибольшее. Их влияние на значения движущей силы G в рассмотренном численном примере не превышает нескольких процентов. При достижении равенства $G = \Gamma$ инкубационная стадия заканчивается. Влияние микроповреждений на продолжительность этой стадии, как видно из фиг. 4, велико. С увеличением чувствительности материала к микроповреждениям, т. е. с уменьшением показателя β число циклов N_* до страгивания трещины возрастает в полтора раза и даже более. Есть основания предполагать, что реальная чувствительность металлов и сплавов такова, что показатель $\beta \geq 1$ (см. врезку на фиг. 4).

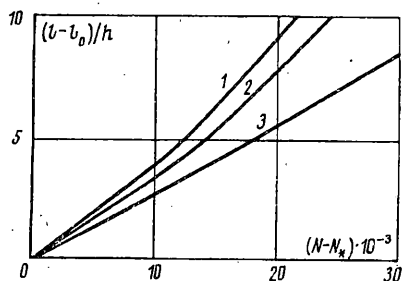
Кривые 1, 2, 3 и 4 были построены при фиксированных параметрах, характеризующих разрыхление ($\eta_0 = 10^{-3}, \beta_1 = 1$). Влияние разрыхления на значения обобщенных сил и на продолжительность инкубационной стадии также проиллюстрировано на фиг. 4. Вычисления выполнены при $\beta = 2, \beta_1 = 1$ и при различных значениях η_0 . Кривая 2'' построена при $\eta_0 = 0$, т. е. при отсутствии разрыхления, кривые 2 и 2' при $\eta_0 = 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-3}$ соответственно. Как видно из фиг. 4, влияние разрыхления на обобщенные силы и на продолжительность инкубационной стадии невелико по сравнению с непосредственным влиянием микроповреждений. Отметим, что использованные в вычислительном эксперименте значения η_0 достаточно высоки, чтобы отразить возможный уровень разрыхления для металлов и сплавов.

Результаты численного эксперимента, включающие начальную стадию роста усталостной трещины, приведены на фиг. 5. Здесь показано изменение обобщенных сил на нескольких первых шагах конечно-разностного решения. Первый шаг отвечает инкубационной стадии. После достижения равенства $G = \Gamma$ фронт трещины продвигается на один шаг $\Delta l = 0,1$ мм, а обобщенные силы заменяются их значениями в новом положении фронта. При этом мера микроповреждений ω принимается равной среднему значению в конечном элементе. Обобщенная сила G после достижения равенства $G = \Gamma$ тоже получает скачок, но он имеет порядок h/l по сравнению с единицей, так что на графике скачок не заметен. На следующем этапе вновь происходит накопление микроповреждений, снижение обобщенной силы сопротивления до наступления равенства $G = \Gamma$ и так далее.

По результатам вычислительного эксперимента на фиг. 6 построены кривые роста трещин и функции от показателя β . Цифры 1, 2 и 3 у кривых отвечают значениям показателя $\beta \rightarrow \infty, \beta = 2$ и $\beta = 1$, т. е. последовательному возрастанию влияния микроповреждений на деформативные свойства материала. Во всех



Фиг. 5



Фиг. 6

случаях принято $\eta_0 = 10^{-3}$, $\beta_1 = 1$. После непродолжительной стадии ускоренного роста устанавливается режим, при котором скорость роста трещины близка к постоянному значению. Этот режим уступает место ускоренному росту трещины и снижению микрповреждений на ее фронте, когда активная сила приближается к обобщенной силе сопротивления в дальнем поле. В целом картина, полученная в результате численного моделирования, согласуется с предварительными качественными соображениями, а также с результатами, которые были получены с использованием упрощенных аналитических моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153—160.
2. Болотин В. В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127—137.
3. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
4. Bolotin V. V. Mechanics of fatigue fracture // Nonlinear Fracture Mechanics / Ed. M. P. Wnuk. CISM Course N 314. Wien; New York: Springer-Verlag, 1990. P. 1—59.
5. Новожилов В. В. О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 349—359.
6. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990. 391 с.
7. Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1972. V. 44. No. 3. P. 187—211.
8. De Lorenzi H. G. On the energy release rate and J -integral for 3D crack configurations // Intern. J. Fracture. 1982. V. 19. No. 2. P. 183—193.
9. Dems K., Mroz Z. On a class of conservation rules associated with sensitivity analysis in linear elasticity // Intern. J. Solids Struct. 1986. V. 22. No. 7. P. 737—758.
10. Болотин В. В. Устойчивость и рост трещин при непотенциальных внешних нагрузках // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 148—157.
11. Hutchinson J. W. Micro-mechanics of damage in deformation and fracture. Lyngby: Techn. Univ. of Denmark, 1987. 96 p.
12. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 4. P. 223—227.
13. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 95—107.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1992