МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.374

© 1993 г. Д. Б. БАЛАШОВ

О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В ЛИНЕЙНО УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о распаде разрыва в упругопластической среде с критерием текучести Мизеса при линейном изотропном упрочнении. Предложена замена переменных, сводящая задачу к решению системы пяти конечных уравнений. Уравнения составляются с использованием ранее найденных закономерностей изменения скорости и напряжений в решении задачи о косом ударе по полупространству. В качестве примера рассмотрена задача о косом соударении полупространств, не имеющих предварительных напряжений. Решение задачи сводится к построению двух семейств однопараметрических плоских кривых, которые определяются квадратурами.

Задача о косом ударе по полупространству в различных предположениях рассматривалась в [1—5]. Задача о распаде разрыва в частных случаях изучалась в [4, 6].

1. Постановка задачи. В рамках геометрически-линейной теории изучается движение изотропно упрочняющейся среды Прандтля — Рейсса с функцией упрочнения $f(\chi) = k_0^2 + \beta\chi$, где k_0 — начальный предел текучести при сдвиге, $\beta = \text{const} > 0$, параметр упрочнения χ определяется соотношением $d\chi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ (σ_{ij}, ε_{ij}^p — компоненты тензоров напряжений и пластической деформации). Уравнение поверхности нагружения Мизеса имеет вид (индексом d отмечается девиатор тензора) $^1/_2 \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = f(\chi)$. Принимается ассоциированный с ней закон

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij}^d, \quad d\lambda \geq 0$$

и закон Гука для упругих деформаций.

Рассмотрим задачу о распаде произвольного разрыва. Полупространство $x > 0$ ($x < 0$), $x \equiv x^1$ заполнено средой рассматриваемого типа, для которой значения материальных постоянных: плотности, начального предела текучести, упругих модулей объемного сжатия и сдвига и модуля упрочнения соответственно равны $\rho_0^\pm$, $k_0^\pm$, $K^\pm$, $\mu^\pm$, $\beta^\pm$; для всех величин индекс (+) соответствует $x > 0$, индекс (—) — $x < 0$. При $t = 0$ полупространство $x > 0$ неподвижно, а полупространство $x < 0$ движется с постоянной скоростью $\mathrm{v} = \{v_1^{\circ-}, v_2^{\circ-}, 0\}$. В полупространстве $x > 0$ ($x < 0$) задано начальное однородное поле напряжений $\sigma_{ij}^{\circ\pm}$.

Поскольку задача автомодельна, то ее решение может состоять из распространяющихся вправо и влево от поверхности контактного разрыва $x = 0$ упругих ударных волн J_1, J_2 (J_1 — продольная волна, J_2 — поперечная волна) и пластических простых волн (SW), S_1, S_2 (S_1 — быстрая SW, S_2 — медленная SW), разделенных областями, в которых все параметры постоянны. Порядок распространения волн $J_1S_1J_2S_2$ устанавливается теоремой Манделя [7].

Требуется найти последовательности волн, распространяющихся вправо и влево от контактной поверхности так, чтобы на ней выполнялись условия непрерывности скорости и усилий

$$[v_i] = 0, \quad [\sigma_{1i}] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Последовательности волн, распространяющихся направо и налево, можно трактовать как решения задачи о косом ударе по полупространствам $x > 0$ и $x < 0$. Если по обоим полупространствам этот удар наносится с некоторой одной и той же нагрузкой σ^f_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$, то на контактной поверхности очевидно выполняются последние три из условий (1.1). Следовательно, требуется подобрать σ^f_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ так, чтобы выполнялись и первые три условия (1.1).

2. Система конечных соотношений, определяющих решение задачи. Как отмечено выше, для решения задачи о распаде разрыва следует рассмотреть последовательности волн, распространяющихся в областях $x > 0$ и $x < 0$, найти приращения величин v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в этих волнах и составить условия их равенства на контактной поверхности. Изменения величин v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в упругих ударных и пластических SW в области $x > 0$ (область $x < 0$ исследуется аналогично) найдем, пользуясь результатами [5]. Индекс (+) для начальных значений переменных и констант среды в дальнейшем опускается.

Далее будем пользоваться безразмерными переменными $v_i^* = (\rho_0/\mu)^{1/2} v_i$, $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/k_0$, $\lambda^* = 2\mu\lambda$, $\chi^* = \chi/2\mu$, $r = \sigma_{11}^d f^{-1/2}$, $\tau = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2} f^{-1/2}$, $\gamma = (\sigma_{22} - \sigma_{33})/k_0$ (ниже звездочки опущены).

Замечание. В [5] поворотом координатных осей достигалось $\sigma_{23} = 0$. В задаче о распаде разрыва такое преобразование произвести нельзя, так как $\sigma_{23}{}^{\circ +} \neq \sigma_{23}{}^{\circ -}$. Однако, и в этом случае, не нарушая общности, можно считать $\sigma_{23} = 0$. Покажем это.

Величины $\sigma_{23}{}^{\circ}$, $\sigma_{22}{}^{\circ}$, $\sigma_{33}{}^{\circ}$ входят в соотношения, выражающие изменения переменных v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в упругих ударных и пластических SW только в виде комбинаций $\sigma_{22}{}^{\circ} + \sigma_{33}{}^{\circ}$ и $a_0 = \{4(\sigma_{23}{}^{\circ})^2 + \gamma_0^2\}^{1/2}$ [5]. Поэтому, изменения начальных значений $\sigma_{23}{}^{\circ}$, $\sigma_{22}{}^{\circ}$, $\sigma_{33}{}^{\circ}$ при сохранении величин $\sigma_{22}{}^{\circ} + \sigma_{33}{}^{\circ}$ и a_0 не влияет на поведение величин v_i, σ_{1i} $(i=1,\ 2,\ 3)$ в решении задачи о косом ударе. Следовательно, если оставить постоянными величины $\sigma_{22}{}^{\circ} + \sigma_{33}{}^{\circ}$, a_0 и изменить $\sigma_{23}{}^{\circ}$, $\sigma_{22}{}^{\circ}$, $\sigma_{33}{}^{\circ}$ так, чтобы $\sigma_{23} = 0$, то решение задачи о распаде разрыва останется тем же.

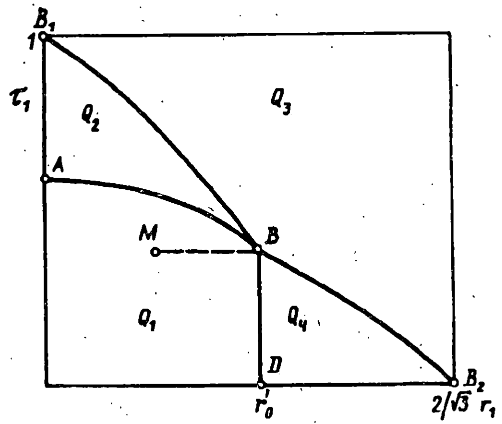
Известный первый интеграл уравнений для SW $\sigma_{23} = \sigma_{23}{}^{\circ} e^{-\lambda}$ обеспечивает и в этом случае тождественное выполнение равенства $\sigma_{23}{}^{\circ} = 0$. В дальнейшем считаем $\sigma_{23} = 0$.

Рассмотрим подробно изменение величин в последовательности волн, распространяющихся направо. В пластических SW связь между переменными r и τ задается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, которое отщепляется от остальных уравнений SW и интегрируется в квадратурах [5]. С учетом этого переменные v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ выражаются через переменную r или τ и параметры начальных данных в виде квадратур. Следовательно, в пластической SW изменение всех величин определено, если известна траектория изменения величин r, τ.

В упругих ударных волнах J_1, J_2 изменения всех величин выражаются через приращения переменных r, τ соответственно (в волне J_2 необходимо также задать приращение переменной σ_{12}).

Таким образом, изменения переменных v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в решении задачи о косом ударе определяется изменением переменных r, τ в упругих ударных волнах и пластических SW. Поэтому, решение будем строить на плоскости r, τ.

Обозначим через r_1 — значение переменной r после прохождения последовательности волн J_1S_1; τ_1 — значение переменной τ в точке, соответствующей контактной поверхности; $\varphi = \arccos(b)$ $(b = \sigma^f_{12}\{(\sigma^f_{12})^2 + (\sigma^f_{13})^2\}^{-1/2})$, если $\sigma^f_{13} > 0$, $\varphi = 2\pi - \arccos(b)$, если $\sigma^f_{13} < 0$. Найдем изменения переменных v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$



Фиг. 1

в упругих ударных волнах и пластических SW в виде функций величин r_1, τ_1, φ и параметров начальных данных.

Решение задачи о косом ударе задается парой величин r_1, τ_1. Множество r_1, τ_1, соответствующих всевозможным решениям (прямоугольник $|r_1| \leq 2/\sqrt{3}$, $|\tau_1| \leq 1$) разделяется на четыре изображенные на фиг. 1 области Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. В каждой из них решение состоит из одной и той же последовательности волн. В силу симметрии рассмотрим только первый квадрант плоскости r_1, τ_1.

Области Q_1, Q_2 разделены частью начальной поверхности нагружения — дугой AB эллипса

$$3/4\, r_1^2 + \tau_1^2 = 1 - 1/4\, \gamma_0^2 \tag{2.1}$$

области Q_2, Q_3, Q_4 разделены интегральными кривыми медленной и быстрой SW — BB_1 и BB_2 (точка $B = (r_0', \tau_0)$ соответствует выходу на поверхность нагружения в волне J_1 из начальной точки $M = (r_0, \tau_0)$); области Q_1, Q_4 — отрезком DB, состоящим из точек, которые можно достичь волной J_2, если перед ней состояние соответствует точке B.

Для областей Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 последовательность волн соответственно имеет вид J_1J_2, $J_1J_2S_2$, $J_1S_1J_2S_2$, $J_1S_1J_2$.

Вид функций, описывающих изменения переменных v_i, σ_{1i} $(i = 1, 2, 3)$ в упругих ударных волнах и пластических SW, определяется номером области, в которую попадает точка $N = (r_1, \tau_1)$. Найдем, как в решении задачи о косом ударе изменяются переменные v_i, σ_{1i} $(i = 1, 2, 3)$ для разных случаев положения точки N.

В упругой волне J_1 переменные меняются следующим образом: $\Delta\sigma_{11} = -l_1^{-1}c_1^e\Delta v_1$, $\Delta\sigma_{22} = \Delta\sigma_{33} = (l_1^{-1}c_1^e(-3K + 2\mu)/(3K + 4\mu))\Delta v_1$, $\Delta v_2 = \Delta v_3 = \Delta\sigma_{22} = \Delta\sigma_{33} = 0$, $c_1^e = (l_0 + 4/3)^{1/2}$, $l_0 = K/\mu$, $l_1 = k_0/\mu$.

Из этих соотношений и уравнения начальной поверхности нагружения (2.1) находим

$$\Delta v_1 = -l_1^{-1}\, c_1^e\, \Delta r, \quad \Delta\, \sigma_{11} = 3/4\, (c_1^e)^2\, \Delta r \tag{2.2}$$

$$\Delta r = \begin{cases} r_0' - r_0, & N \in Q_3, Q_4 \\ r_1 - r_0', & N \in Q_1, Q_2 \end{cases}$$

$$r_0' = \mathrm{sgn}\,(r_1)\, 2/\sqrt{3}\, (1 - \tau_0^2 - 1/4\gamma_0^2)^{1/2}$$

Интегральные кривые пластических SW определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
& d\sigma_{11} = p\,(l_0 + 4/3 - p)^{-1}\, r f^{1/2}\,(r, \tau; \gamma^b)\, d\lambda \\
& \sigma_{12} = \cos(\varphi^b)\, \tau f^{1/2}\,(r; \tau; \gamma^b), \\
& \sigma_{13} = \sin(\varphi^b)\, \tau f^{1/2}\,(r; \tau; \gamma^b) \\
& -p^{1/2}\, dv_1 = l_1 d\sigma_{11}, \\
& dv_2 = -l_1 \cos(\varphi^b)\, p^{1/2}\,(1-p)^{-1}\, \tau f^{1/2}\,(r; \tau; \gamma^b)\, d\lambda \\
& v_3 - v_3^b = \operatorname{tg}(\varphi^b)\,(v_2 - v_2^b) \\
& f^{1/2}\,(r; \tau; \gamma^b) = (\gamma^b/2)^{\varepsilon}\,(1 - 3/4\, r^2 - \tau^2)^{-\varepsilon/2} \\
& dr = ((p - l_0)\,(l_0 + 4/3 - p)^{-1} - a)\, r d\lambda \\
& d\tau = (p\,(1-p)^{-1} - a)\, \tau d\lambda
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где индексом (b) отмечаются значения величин перед SW, $\varepsilon = a(1+a)^{-1}$, $a = \beta/2\mu$, угол φ^b определяется по значениям σ_{12}^b, σ_{13}^b аналогично тому, как угол φ определяется по σ_{12}^f, σ_{13}^f; $p(r, \tau)$ — корень характеристического уравнения

$$
(l_0 + 4/3 - p)\,(1-p) - (1+a)^{-1}\,(1-p)\, r^2 - (1+a)^{-1}\,(l_0 + 4/3 - p)\, \tau^2 = 0 \tag{2.4}
$$

Больший корень этого уравнения p_1 соответствует волне S_1, меньший корень p_2 — волне S_2.

Из последних двух соотношений (2.3) вытекает уравнение $dr/d\tau = \varphi(p, r, \tau)$, которое отщепляется от остальных уравнений (2.3) и интегрируется в квадратурах [5]. Таким образом, зависимость $r = r(\tau; r^b, \tau^b)$ или $\tau = \tau(\tau; r^b, \tau^b)$ в SW считается известной. Если эту зависимость подставить в остальные соотношения (2.3) и в качестве параметра SW выбрать переменную r или τ, то изменения переменных v_i $(i = 1, 2, 3)$, σ_{11} находятся из (2.3) в виде квадратур, а переменные σ_{1i} $(i = 2, 3)$ находятся из второго и третьего соотношений (2.3).

Для быстрой SW S_1 в качестве параметра SW удобно использовать переменную r. Если точка N принадлежит области Q_1 или Q_2, то $\tau = \tau(\tau; r_0', \tau_0)$, и величина $\Delta\sigma_{11} = \sigma_{11} - \sigma_{11}^b$ находится интегрированием по r первого соотношения (2.3):

$$
\Delta\sigma_{11}\,(r_1; \tau_0, \gamma_0) = \int_{r_0'}^{r_1} p_1\,(1+a)\, p_1 - l_0 - a\,(l_0 + 4/3))^{-1} f^{1/2}\,(\theta, \tau\,(\theta; r_0', \tau_0); \gamma_0)\, d\theta
$$

Аналогично, интегрированием по r четвертого и пятого соотношений (2.3), находятся величины $\Delta v_1(r_1; \tau_0, \gamma_0)$, $\Delta v_2(r_1; \tau_0, \gamma_0, \varphi_0)$. Из второго, третьего и шестого соотношений (2.3) находим $\sigma_{1i} = \sigma_{1i}(r_1; \tau_0, \gamma_0, \varphi_0)$ $(i = 2, 3)$, $\Delta v_3(r_1; \tau_0, \gamma_0, \varphi_0)$.

В упругой волне J_2:

$$
\Delta v_i = -l_1 \Delta\sigma_{1i} \;\; (i = 2,3), \quad \Delta v_1 = \Delta\sigma_{11} = \Delta\sigma_{22} = \Delta\sigma_{33} = 0
$$

Из этих соотношений и соотношений, описывающих изменения переменных σ_{12}, σ_{13} в SW S_1 получаем для волны J_2:

$$
\Delta\sigma_{12} = m_1 \cos(\varphi) - m_2 \cos(\varphi_0), \quad \Delta\sigma_{13} = m_1 \sin(\varphi) - m_2 \sin(\varphi_0) \tag{2.5}
$$

$$\{m_1, m_2\} = \begin{cases} \{\tau_1, \tau_0\}, & N \in Q_1 \\ \{(1 - 3/4\, r_1^2 - 1/4\, \gamma_0^2)^{1/2}, \;\; \tau_0\}, & N \in Q_2 \\ \{m, m\}, & N \in Q_3 \\ \{\tau_1 k_1, m\}, & N \in Q_4 \end{cases}$$

$$m = \tau\,(r_1; r_0', \tau_0)\, k_1, \;\; k_1 = f^{1/2}\,(r_1, \tau\,(r_1; r_0', \tau_0); \gamma_0)$$

Для медленной $SW\ S_2$ в качестве параметра SW удобно выбрать переменную τ. Если точка N принадлежит области Q_1 или Q_4, то решение не содержит волну S_2. Если точка N принадлежит области Q_2 или Q_3, то для волны S_2 величины: $\Delta\sigma_{11}(r_1, \tau_1; \tau_0, \gamma_0)$, $\Delta v_1(r_1, \tau_1; \tau_0, \gamma_0)$, $\Delta v_i(r_1, \tau_1, \varphi; \tau_0, \gamma_0)$ $(i = 2,\ 3)$, $\Delta\sigma_{1i}(r_1, \tau_1, \varphi; \tau_0, \gamma_0)$ $(i = 2,\ 3)$ находятся из соотношений (2.3) аналогично тому, как соответствующие величины находятся для волны S_1.

Итак, переменные v_i, σ_{1i} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ выражаются в виде функций величин r_1, τ_1, φ и параметров начальных данных r_0, τ_0, γ_0, $\sigma_{11}{}^\circ$, φ_0.

Используя это утверждение, соотношения (1.1) можно записать в виде системы пяти уравнений относительно искомых величин $r_1^\pm$, $\tau_1^\pm$, φ:

$$v_i^{\circ -} - f_i\,(r_1^-, \tau_1^-, \varphi; \mathbf{u}_0^-) = \left(\frac{\mu^+\rho_0^-}{\mu^-\rho_0^+}\right)^{1/2} f_i\,(r_1^+, \tau_1^+, \varphi; \mathbf{u}_0^+) \;\; (i = 1, 2, 3)$$

$$g_i\,(r_1^-, \tau_1^-; \mathbf{u}_0^-) = (k_0^-/k_0^+)\, g_i\,(r_1^+, \tau_1^+; \mathbf{u}_0^+) \;\; (i = 4{,}5)$$

$$\mathbf{u}_0^\pm = \{r_0^\pm, \tau_0^\pm, \gamma_0^\pm, \sigma_{11}{}^{\circ\pm}, \varphi_0^\pm, l_0^\pm, l_1^\pm, a^\pm\}$$

Из шести уравнений (1.1) независимыми оказываются пять. Действительно, из второго и третьего соотношений (2.3) и соотношений (2.5) следует, что условия $[\sigma_{1i}] = 0$ при $i = 2,\ 3$ приводятся к одному и тому же уравнению, выражающему непрерывность величины $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$.

3. Косое соударение ненапряженных полупространств. Пусть при $t = 0$ сталкиваются два полупространства с $\sigma_{ij}{}^{\circ\pm} = \sigma_{ij}{}^{\circ\pm} = 0$. Рассмотрим случай когда свойства среды в обоих полупространствах одинаковые, т. е. значения материальных постоянных при $x > 0$ и $x < 0$ равны. В рассматриваемом случае решение задачи о распаде разрыва состоит из одной и той же последовательности волн в областях $x > 0$ и $x < 0$. При этом последние три условия (1.1) выполняются автоматически.

Покажем, что первые три условия (1.1) сводятся к системе двух уравнений относительно неизвестных v_1^1, τ_1, где v_1^1 обозначает приращение переменной v_1 в последовательности волн J_1S_1 справа от $x = 0$. Чтобы получить эти уравнения выразим изменения переменных v_1, v_2 при $x > 0$ (в силу симметрии задачи изменения переменных v_1, v_2 при $x > 0$ и при $x < 0$ одинаковы по модулю и противоположны по знаку).

Замечание. Выбор новой переменной v_1^1 вместо r_1 диктуется тем, что в рассматриваемом случае $r_1 = \mathrm{const}$ в $SW\ S_1$. Это вытекает из соотношений (2.3). Изменение всех переменных в быстрой $SW\ S_1$ находится по соотношениям

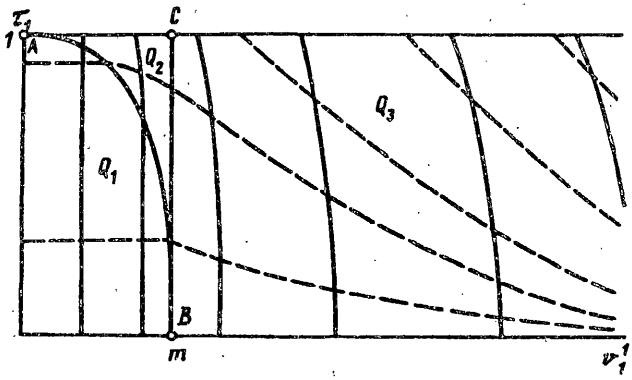
$$p_1^{1/2}\, dv_1 = -l_1 d\sigma_{11}, \;\; dv_1 = -2/\sqrt{3}\, \mathrm{sgn}\,(v_1^1)\, l_1 p_1^{1/2}\,(l_0 + 4/3 - p_1)^{-1}\, e^{a\lambda} d\lambda \qquad (3.1)$$

$$\tau = \sigma_{12} = v_2 = 0, \;\; p_1 = l_0 + 4/3\, a\,(1 + a)^{-1} = \mathrm{const}$$

Из этих соотношений вытекает, что приращение всех переменных в $SW\ S_1$ выражается через величину v_1^1.

В медленной $SW\ S_2$ изменение переменных v_1, v_2 определяется соотношениями (в данном случае $\gamma^p = 0$, поэтому для определения $f^{1/2}$ нельзя воспользоваться седьмым соотношением (2.3)):

$$dv_1 = -l_1 p_2^{1/2}\,(l_0 + 4/3 - p_2)^{-1}\, r f^{1/2}\,(X)\, d\lambda$$



Фиг. 2

$$dv_2 = -l_1 p_2^{1/2} (1 - p_2)^{-1} \tau f^{1/2} (\chi)\, d\lambda \tag{3.2}$$

$$d\tau = ((1 + a)\, p_2 - a)\, (1 - p_2)^{-1}\, \tau d\lambda$$

$$3/4\, r^2 + \tau^2 = 1, \; f^{1/2} (\chi) = e^{a\lambda}$$

где $p_2(\tau)$ — меньший корень уравнения (2.4).

Выберем в качестве параметра SW S_2 переменную τ. Третье соотношение (3.2) можно проинтегрировать и найти связь между переменными λ и τ. С учетом этой связи и последнего соотношения (3.2), удается проинтегрировать первые два соотношения (3.2). В результате находятся изменения переменных v_1, v_2 в виде функций величины τ_1 и значения переменной λ перед SW S_2. Это значение находится из второго соотношения (3.1) как функция величины v_1^1. Следовательно, изменения переменных v_1, v_2 в SW S_2 есть функции величин v_1^1, τ_1.

Из определения переменной τ находим зависимость $\sigma_{12}(v_1^1, \tau_1)$. Изменение переменной σ_{11} в $SW\,S_2$ находится из уравнения $p_2^{1/2} dv_1 = d\sigma_{11}$ аналогично изменению переменной v_1.

Рассмотрим изменение переменных v_1, v_2 в упругих ударных волнах. Величина v_1^1 определяет изменение переменной v_1 в волне J_1. Из соотношений для приращения переменных v_1, v_2 в волнах J_1, J_2 и уравнения поверхности нагружения следует, что изменение переменной v_2 в волне J_2 определяется величиной τ_1, если в волне J_2 не происходит выхода на поверхность нагружения или величиной v_1^1, если выход происходит.

Итак, изменение всех переменных в последовательностях волн, распространяющихся вправо и влево от поверхности контактного разрыва, определяется величинами v_1^1, τ_1. Поэтому, для решения задачи будем искать соответствующую точку на плоскости v_1^1, τ_1. Всевозможные такие точки образуют полосу $|\tau_1| \leq 1$. Она разбивается на изображенные на фиг. 2 области Q_1, Q_2, Q_3, для которых решение соответственно имеет вид J_1J_2, $J_1J_2S_2$, $J_1S_1S_2$ (в силу симметрии рассмотрим только первый квадрант плоскости v_1^1, τ_1). Области Q_1 и Q_2 разделены дугой AB эллипса

$$(v_1^1/m)^2 + (\tau_1)^2 = 1, \quad m = \sqrt{3}/2\; l_1\, (l_0 + 4/3)^{1/2}$$

а области Q_2 и Q_3 — отрезком CB прямой $v_1^1 = m$.

Согласно намеченному плану, найдем вид функций, определяющих изменения переменных v_1, v_2 в упругих ударных волнах и пластических SW в зависимости от номера области, в которую попадает точка $N = (v_1^1, \tau_1)$.

Для волны J_1 из соотношения, определяющего приращение переменной v_1 в волне J_1 и уравнения поверхности нагружения находим

$$\Delta v_1 = \begin{cases} v_1^1, & N \in Q_1, Q_2 \\ \operatorname{sgn}(v_1^1)\, m, & N \in Q_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

Для волны J_2, аналогично, будем иметь

$$\Delta v_2 = \begin{cases} -l_1 \tau_1, & N \in Q_1 \\ -\operatorname{sgn}(\tau_1)\, l_1 \{1 - (v_1^1/m)^2\}^{1/2}, & N \in Q_2 \\ 0, & N \in Q_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

Для распространяющейся с постоянной скоростью SW S_1 из соотношений (3.1), (3.3) находим (переменная λ изменяется от нуля до величины λ_1):

$$\Delta v_1 = \begin{cases} 0, & N \in Q_1, Q_2 \\ v_1^1 - \operatorname{sgn}(v_1^1)\, m, & N \in Q_3 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\exp\{a\lambda_1(v_1^1)\} = \{|v_1^1| - m\}\, l_1^{-1} b_2 + 1$$

$$b_2 = 2/\sqrt{3}\; a\,(1+a)^{-1}\{l_0 + 4/3 - 4/3\,(1+a)^{-1}\}^{-1/2}$$

Для SW S_2 из соотношений (3.2) и найденной зависимости $\lambda_1(v_1^1)$ следует, что приращения переменных v_1, v_2 определяются соотношениями

$$\Delta v_i = \begin{cases} 0, & N \in Q_1 \\ \operatorname{sgn}(z_i)\, l_1 \exp(-a\psi(\tau_e(v_1^1)))\,(\Phi_i(\tau_1) - \Phi_i(\tau_e(v_1^1))), & N \in Q_2 \\ \operatorname{sgn}(z_i)\, l_1 \exp(a\lambda_1(v_1^1))\, \Phi_i(\tau_1), & N \in Q_3 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$z_1 = -\tau_1,\quad z_2 = v_1^1,\quad \tau_e(v_1^1) = \{1 - (v_1^1/m)^2\}^{1/2}$$

$$\Phi_2(\tau) = \int_0^{|\tau|} \frac{p_2^{1/2}(\theta)}{(1+a)\,p_2 - a} \exp\{a\psi(\theta)\}\, d\theta$$

$$\Phi_1(\tau) = 2/\sqrt{3} \int_0^{|\tau|} \frac{p_2^{1/2}(\theta)\,[1 - p_2]\,[1 - \theta^2]^{1/2}}{[(1+a)\,p_2 - a]\,[l_0 + 4/3 - p_2]\,\theta} \exp\{a\psi(\theta)\}\, d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{1 - p_2(\theta')}{[(1+a)\,p_2 - a]\,\theta'}\, d\theta' \quad (i = 1, 2)$$

Используя соотношения (3.3)—(3.6), можно записать систему уравнений относительно неизвестных v_1^1, τ_1, которая определяет решение задачи о распаде разрыва. Для различных областей Q_i ($i = 1, 2, 3$) эта система имеет вид:
для области Q_1:

$$v_1^{\circ -}/2 = v_1^1,\quad v_2^{\circ -}/2 = -l_1\,\tau_1$$

для области Q_2:

$$v_1^{\circ -}/2 = v_1^1 + \operatorname{sgn}(v_1^1)\, l_1 \exp(-a\psi(\tau_e(v_1^1)))\,(\Phi_1(\tau_1) - \Phi_1(\tau_e(v_1^1)))$$

$$v_2^{\circ}/2 = -\operatorname{sgn}(\tau_1)\, l_1 \tau_e(v_1^1) - \operatorname{sgn}(\tau_1)\, l_1 \exp(-a\psi(\tau_e(v_1^1)))\,(\Phi_2(\tau_1) - \Phi_2(\tau_e(v_1^1)))$$

для области Q_3:

$$v_1^{\circ -}/2 = v_1^1 + \operatorname{sgn}(v_1^1)\, l_1 \exp(a\lambda_1(v_1^1))\, \Phi_1(\tau_1)$$

$$v_2^{\circ -}/2 = -\operatorname{sgn}(\tau_1)\, l_1 \exp(a\lambda_1(v_1^1))\, \Phi_2(\tau_1)$$

Полученная система уравнений определяет на плоскости $v_1^|$, τ_1 два однопараметрических семейства (с параметрами $v_1^{\circ -}$, $v_2^{\circ -}$) плоских кривых, изображенных на фиг. 2. Сплошные линии соответствуют семейству кривых с параметром $v_1^{\circ -}$, штриховые — семейству кривых с параметром $v_2^{\circ -}$. Эти два семейства кривых можно рассматривать, как линии уровня функций переменных $v_1^|$, τ_1. По заданным величинам $v_1^{\circ -}$, $v_2^{\circ -}$ решение находится, как точка пересечения двух соответствующих линий уровня.

Итак, построено решение задачи о распаде разрыва, не содержащее скачков, отличных от упругих ударных волн, контактного разрыва и скачков, являющихся предельным случаем пластических *SW*, распространяющихся с постоянной скоростью. На поверхности контактного разрыва скачок скорости у найденного решения отсутствует.

Автор благодарит Я. А. Каменяржа за ценные советы и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bleich H. H., Nelson J.* Plane waves in elastic-plastic half-space due to combined pressure and shear // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. No. 1. P. 149—158.
2. *Ting T. C. T., Ning Nan.* Plane waves due to combined compressive and shear stresses in half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No. 2. P. 189—197.
3. *Ting T. C. T.* Plastic wave propagation in linearly work-hardening materials // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 4. P. 1045—1050.
4. *Каменярж Я. А.* О простых волнах и распаде разрыва в упругопластической среде с условием Мизеса // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 320—329.
5. *Балашов Д. Б.* О простых волнах уравнений Прандтля — Рейсса // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 124—133.
6. *Афанасьев С. Б.* Автомодельное решение задачи о распаде разрыва в упругопластической среде // Прикладные проблемы прочности и пластичности. 1990. No. 44. С. 40—46.
7. *Mandel J.* Ondes plastiques dans un milieu indefini a trois dimensions // J. Mec. 1962. V. 1. No. 1. P. 3—30.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1992