

УДК 531.383

© 1993 г. С. И. ГУБАРЕНКО, В. Г. КУЗЬМЕНКО

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

Получены условия существования предельных циклов при движении неконтактного гироскопа, помещенного в карданов подвес, относительно Земли с учетом консервативных, неконсервативных и корпусных возмущающих моментов. Исследована устойчивость найденных предельных циклов.

Движение неконтактного гироскопа под действием консервативных возмущающих моментов рассматривалось в [1—2]; влияние неконсервативных моментов изучено в [3—4]. В статье [3] исследованы предельные циклы для возмущающих моментов общего вида. В данной работе использованы модели консервативных и неконсервативных моментов более частного вида, обычно применяемые для неконтактных гироскопов [5]. Однако дополнительный учет корпусных возмущающих моментов позволяет обнаружить новые предельные циклы. При этом оказывается существенным, как установлено основание карданова подвеса относительно Земли.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим неконтактный гироскоп, помещенный в двухстепенный карданов подвес. Основание карданова подвеса неподвижно относительно Земли, а его следящие системы осуществляют непрерывное совмещение оси динамической симметрии ротора с осью кожуха.

Обозначим через  $\varphi$  широту точки  $C$ , где проходят испытания гироскопа. Введем правый ортогональный трехгранник  $\xi$  с началом в точке  $C$ : ось  $C\xi_3$  параллельна и сонаправлена вектору  $U$  угловой скорости вращения Земли; ось  $C\xi_1$  лежит в плоскости меридиана и направлена от оси вращения Земли. Введем единичный вектор  $k$ , направленный по оси динамической симметрии ротора. Его положение относительно системы координат  $C\xi$  определим двумя углами  $\rho, \sigma$ :  $\rho$  — угол между вектором  $k$  и осью  $C\xi_3$ ;  $\sigma$  — угол между проекцией вектора  $k$  на плоскость  $\xi_1\xi_2$  и осью  $C\xi_1$ .

Задача дальнейшего исследования состоит в том, чтобы изучить движения гироскопа, при которых угол  $\rho$  остается постоянным. При этом ось гироскопа совершает по отношению к Земле периодическое движение по круговому конусу.

2. **Уравнения движения гироскопа.** В рамках прецессионной теории гироскопов предположим, что вектор кинетического момента гироскопа направлен по оси динамической симметрии ротора вектору  $k$  и постоянен по модулю. В этом случае вместо шести уравнений первого порядка движение оси динамической симметрии ротора будет описано системой двух уравнений первого порядка.

Запишем уравнение углового движения ротора гироскопа относительно Земли под действием возмущающего момента  $m$  в виде теоремы об изменении кинетического момента (безразмерная форма записи):

$$k_\xi' + [u_\xi, k_\xi] = m_\xi \quad (2.1)$$

Здесь  $u$  — единичный вектор, направленный по вектору  $U$ ; штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = Ut$  ( $U = 0,0000729$  рад/с — угловая скорость Земли;  $t$  — время). Нижний индекс  $\xi$  в уравнении (2.1) указывает на то, что векторы  $k, u, m$  записаны в проекциях на оси трехгранника  $\xi$ .

*Замечание.* Для обеспечения постоянства модуля вектора  $k$  необходимо потребовать, чтобы возмущающий момент  $m$  был ортогонален  $k$ , т. е.  $(k, m) = 0$ .

Проекции векторов  $u, k$  на оси  $\xi$  имеют вид

$$u_{\xi} = (0, 0, 1)^T, k_{\xi} = (\sin \rho \cos \sigma, \sin \rho \sin \sigma, \cos \rho)^T \quad (2.2)$$

где  $T$  — знак транспонирования. Поэтому уравнение (2.1) можно переписать в следующей скалярной форме:

$$\rho' \cos \rho \cos \sigma - \sigma' \sin \rho \sin \sigma - \sin \rho \sin \sigma = m_{1\xi} \quad (2.3)$$

$$\rho' \cos \rho \sin \sigma + \sigma' \sin \rho \cos \sigma + \sin \rho \cos \sigma = m_{2\xi}$$

$$(\cos \rho)' = m_{3\xi}$$

Введем новую переменную  $\mu = \cos \rho$ . Согласно (2.3) и вышеприведенному замечанию уравнения гироскопа в переменных  $\mu, \sigma$  имеют вид

$$\mu' = m_{3\xi}$$

$$\sigma' = -1 + (-m_{1\xi} \sin \sigma + m_{2\xi} \cos \sigma) / (1 - \mu^2)^{1/2} \quad (2.4)$$

**3. Метод приближенного решения уравнений движения.** Для реальных неконтактных гироскопов (электростатических, электромагнитных и пр.) характерное числовое значение безразмерного возмущающего момента  $m$  порядка  $10^{-2}$ . Поэтому динамическая система (2.4) является системой с быстрой фазой  $\sigma$  и для ее исследования можно воспользоваться методом осреднения [6—7]. При этом переменная  $\mu$  является медленной, переменная  $\sigma$  — быстрой.

Чтобы применение метода осреднения к системе (2.4) было корректным, исключим из рассмотрения случаи, когда вектор кинетического момента  $k$  находится вблизи направления на Полярную звезду. Случаи, когда  $|\mu| \sim 1$  будут изучены дополнительно.

Порождающая система получается из (2.4) при  $m = 0$ , поэтому порождающее решение таково

$$\mu = \text{const}, \sigma = -\tau \quad (3.1)$$

При этом уравнение первого приближения для медленной переменной  $\mu$  принимает следующий вид:

$$\mu' = \langle m_{3\xi} \rangle_{\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_{3\xi} d\tau \quad (3.2)$$

где через  $\langle \dots \rangle_{\tau}$  обозначено осреднение по времени  $\tau$  вдоль порождающего решения (3.1).

**4. Структура возмущающего момента.** Обозначим через  $h$  единичный вектор вертикали в точке  $C$ , где установлен гироскоп. Введем единичные векторы  $e_1, e_2$  равенствами

$$e_1 = [h, k] / \sin \gamma, e_2 = [k, e_1] \quad (4.1)$$

где  $\gamma$  — угол между векторами  $h, k$ . Возмущающий момент  $m$  запишем в виде [3—4]:

$$m = (m_{11} \sin \gamma - m_{12} \sin 2\gamma)e_1 + (m_{21} \sin \gamma - m_{22} \sin 2\gamma)e_2 \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) первое и второе слагаемые представляют собой консервативный и неконсервативный возмущающие моменты. Отметим, что согласно (4.1), (4.2) выполнено:  $(k, m) = 0$  (см. замечание в п. 2).

Проекция вектора  $h$  на оси трехгранника  $\xi$  таковы

$$\mathbf{h}_\xi = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)^T \quad (4.3)$$

Согласно (2.2), (4.1), (4.3) проекции единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  на оси  $\xi$  находятся по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1\xi} &= \frac{1}{\sin \gamma} (-\sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma, -\mu \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma)^T \\ \mathbf{e}_{2\xi} &= \frac{1}{\sin \gamma} \{ \cos \varphi [(1 - \mu^2) \sin^2 \sigma + \mu^2] - \mu \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma - \\ &\quad - (1 - \mu^2) \cos \varphi \cos \sigma \sin \sigma - \mu \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma - \\ &\quad - \mu \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + (1 - \mu^2) \sin \varphi \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поэтому третья компонента возмущающего момента на оси  $\xi$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} m_{3\xi} &= (m_{11} - 2m_{12} \cos \gamma) \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma + \\ &\quad + (m_{21} - 2m_{22} \cos \gamma) [-\mu \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + (1 - \mu^2) \sin \varphi] \\ &\quad \cos \gamma = \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + \mu \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.5)$$

5. Осредненное уравнение для медленной переменной  $\mu$ . Согласно сказанному выше, подставим порождающее решение (3.1) в правые части формулы для  $m_{3\xi}$  из (4.5) и проведем осреднение по времени  $\tau$ . При этом уравнение (3.2) для медленной переменной  $\mu$  принимает вид

$$\mu' = f(\mu), \quad f(\mu) = (1 - \mu^2) [m_{21} \sin \varphi + m_{22}(1 - 3 \sin^2 \varphi) \mu] \quad (5.1)$$

Следовательно, изменение  $\mu$  полностью определяется видом функции  $f(\mu)$ . В частности, из (5.1) следует, что движение гироскопа по углу  $\rho$  зависит только от неконсервативных параметров дрейфа  $m_{21}, m_{22}$ .

6. Предельные циклы. Периодическим режимам движения гироскопа соответствуют нули уравнения

$$f(\mu) = 0 \quad (6.1)$$

Два корня уравнения (6.1)  $\mu = \pm 1$  (полярные направления) необходимо исследовать дополнительно. Третий корень

$$\mu_* = \frac{m_{21} \sin \varphi}{m_{22} (3 \sin^2 \varphi - 1)} \quad (6.2)$$

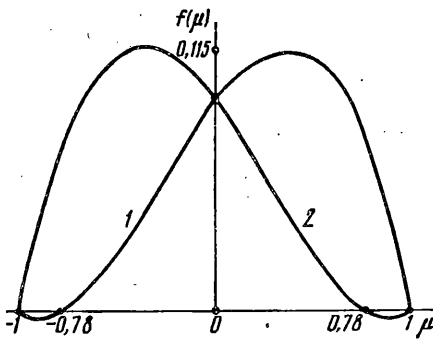
удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{m_{21} \sin \varphi}{m_{22} (3 \sin^2 \varphi - 1)} \right| < 1 \quad (6.3)$$

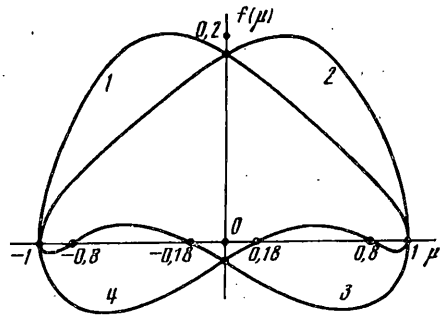
Если выполнено (6.3), то предельный цикл с параметром  $\mu_*$  из (6.2) будет устойчивым при  $df/d\mu|_{\mu=\mu_*} < 0$ , что приводит к следующему условию устойчивости предельного цикла

$$(3 \sin^2 \varphi - 1) m_{22} > 0 \quad (6.4)$$

Например, для Москвы  $\varphi = 55,8^\circ$ , и условие существования предельного цикла (6.3) имеет вид:  $0,786 | m_{21}/m_{22} | < 1$ ; соответственно  $\mu_* = 0,786 m_{21}/m_{22}$  и предельный цикл будет устойчивым, если неконсервативный параметр дрейфа  $m_{22} > 0$ . На рис. 1 построены два графика функции  $f(\mu)$  из (5.1). Кривая,



Фиг. 1



Фиг. 2

построенная при  $m_{21} = -m_{22} = 0,1$ , определяет неустойчивый предельный цикл с параметром  $\mu \approx -0,78$  ( $\rho \approx 142^\circ$ ); кривая, построенная при  $m_{21} = m_{22} = 0,1$ , определяет устойчивый предельный цикл с параметром  $\mu \approx 0,78$  ( $\rho \approx 38^\circ$ ).

7. Предельные циклы с учетом корпусных дрейфов гироскопа. Введем правый ортогональный трехгранник  $\zeta$ , жестко связанный с основанием карданова подвеса ( $\zeta_1$  — ось вращения внешнего кольца). Введем также правый ортогональный трехгранник  $x$ , жестко связанный с платформой карданова подвеса ( $x_2$  — ось вращения платформы). Взаимное положение трехгранников  $\zeta$ ,  $x$  определим двумя углами  $\alpha_1, \alpha_2$  следующей схемой поворотов:

$$\zeta \xrightarrow{\alpha_1} \zeta^v \xrightarrow{\alpha_2} x \quad (7.1)$$

Дополнительно к консервативным и неконсервативным возмущающим моментам из (4.2) учтем корпусные моменты [5] в виде:

$$m = m_{c1}x_1 + m_{c2}x_2 \quad (7.2)$$

где  $x_1, x_2$  единичные векторы соответствующих осей трехгранника  $x$ . Поскольку вектор  $k$  ортогонален плоскости  $x_1, x_2$ , то для возмущающего момента из (7.2) выполнено:  $(k, m) = 0$  (см. замечание в п. 2).

Проектируя (7.2) на третью ось трехгранника  $\xi$ , находим

$$m_{3\xi} = m_{c1} (u_{1\xi} \cos \alpha_2 + u_{2\xi} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - u_{3\xi} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) + m_{c2} (u_{2\xi} \cos \alpha_1 + u_{3\xi} \sin \alpha_1) \quad (7.3)$$

При этом связь переменных  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\mu, \sigma$  задается формулами:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 &= s_{11} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + s_{12} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma + u_{13}\mu \\ - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 &= s_{21} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + s_{22} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma + u_{23}\mu \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 &= s_{31} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma + s_{32} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma + u_{33}\mu \end{aligned} \quad (7.4)$$

где буквой  $s$  с индексами обозначены два столбца матрицы взаимной ориентации трехгранников  $\xi, \zeta$ .

Далее рассмотрим две схемы ориентации основания карданова подвеса по отношению к трехграннику  $\xi$ .

Схема 1. Трехгранник  $\zeta$  совпадает с трехгранником  $\xi$ ; при этом для углов  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ось ротора  $k$  направлена на Полярную звезду («Полярный» гироскоп). Формулы (7.3), (7.4) принимают вид

$$m_{3\xi} = -m_{c1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + m_{c2} \sin \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \sigma, \quad \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = -\sqrt{1 - \mu^2} \sin \sigma$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = \mu \quad (7.5)$$

При осреднении формул (4.5) и (7.5) вдоль порождающего решения (3.1) снова приходим к уравнению (5.1) для параметра  $\mu$ . Таким образом, для «Полярного» гироскопа наличие корпусных дрейфов не приводит к каким-либо изменениям. Выводы, полученные в п. 6, остаются справедливыми и в этом случае.

*Схема 2.* Матрица взаимной ориентации трехгранников  $\xi, \zeta$  такова, что  $s_{31} = -s_{22} = 1, s_{11} = s_{21} = s_{12} = s_{32} = 0, u_{1\xi} = 1, u_{2\xi} = u_{3\xi} = 0$ ; при этом для углов  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ось ротора  $k$  параллельна плоскости экватора («Экваториальный» гироскоп). Формулы (7.3), (7.4) принимают вид

$$m_{3\xi} = m_{c1} \cos \alpha_2, \quad \sin \alpha_2 = \mu \quad (7.6)$$

Проводя осреднение формул (4.5), (7.6) вдоль порождающего решения (3.1), получаем следующее уравнение для медленной переменной  $\mu$ :

$$\mu' = f(\mu), \quad f(\mu) = (1 - \mu^2) [m_{21} \sin \varphi + m_{22} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \mu] + m_{c1} \sqrt{1 - \mu^2} \quad (7.7)$$

Исследование уравнения (7.7) позволяет сделать вывод, что оно либо не имеет вовсе корней на интервале  $(-1, 1)$ , либо имеет ровно два корня. Один из этих корней соответствует неустойчивому предельному циклу, другой — устойчивому предельному циклу. При этом функция  $f(\mu)$  пересекает ось  $\mu$  с минуса на плюс (неустойчивый цикл) и с плюса на минус (устойчивый цикл). Наличие двух предельных циклов качественно отличает случай, когда учитываются корпусные дрейфы гироскопа от случая, где эти дрейфы равны нулю, и на интервале  $(-1, 1)$  может существовать максимум один предельный цикл (см. п. 6).

На фиг. 2 изображены четыре графика функции  $f(\mu)$  из (7.7) при  $\varphi = 55,8^\circ$  для различных комбинаций параметров:

- 1)  $m_{21} = m_{22} = m_{c1} = 0,1$ , 2)  $m_{21} = -m_{22} = m_{c1} = 0,1$
- 3)  $m_{21} = m_{22} = -m_{c1} = 0,1$ , 4)  $m_{21} = -m_{22} = -m_{c1} = 0,1$

Кривые соответствуют случаям, когда на интервале  $(-1, 1)$  не существует предельных циклов. Кривая определяет два предельных цикла: неустойчивый при  $\mu \approx -0,8$  ( $\rho \approx 143,13^\circ$ ) и устойчивый при  $\mu \approx -0,18$  ( $\rho \approx 100,37^\circ$ ). График 4 тоже определяет два предельных цикла: неустойчивый при  $\mu \approx 0,18$  ( $\rho \approx 79,63^\circ$ ) и устойчивый при  $\mu \approx 0,8$  ( $\rho \approx 36,87^\circ$ ).

8. Движение «Полярного» гироскопа. Изучим движение гироскопа вблизи направления на Полярную звезду. В этом случае  $\mu \sim 1, \rho \sim 0$  и во втором уравнении в (2.4) возникает особенность  $1/\rho$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Чтобы обойти эту математическую трудность, будем исследовать движение гироскопа в углах  $\alpha_1, \alpha_2$  из (7.1). Считаем, что основание карданова подвеса установлено по схеме 1 (см. п. 7) и запишем линеаризованные по  $\alpha_1, \alpha_2$  уравнения движения «Полярного» гироскопа с учетом консервативных, неконсервативных и корпусных возмущающих моментов аналогично [8]:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= -\alpha_{2c} - \alpha_1(m_{21} \sin \varphi - 2m_{22} \sin^2 \varphi) + \alpha_2(1 - m_{11} \sin \varphi - 2m_{12} \cos 2\varphi) \\ \alpha_2' &= \alpha_{1c} - \alpha_1(1 - m_{11} \sin \varphi + 2m_{12} \sin^2 \varphi) - \alpha_2(m_{21} \sin \varphi + 2m_{22} \cos 2\varphi) \\ \alpha_{1c} &= m_{c1} + m_{21} \cos \varphi - m_{22} \sin 2\varphi \\ \alpha_{2c} &= m_{c2} - m_{22} \cos \varphi + m_{12} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (8.1)$$

Решение (8.1) представляет собой логарифмическую спираль:

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_{1c} + \exp(-\lambda\tau)(A_1 \cos \nu\tau + A_2 \sin \nu\tau)$$

$$\alpha_2(\tau) = \alpha_{2c} - \exp(-\lambda\tau)(-A_2 \cos \nu\tau + A_1 \sin \nu\tau) \quad (8.2)$$

$$\lambda = m_{21} \sin \varphi + m_{22}(1 - 3 \sin^2 \varphi), \nu = 1 - m_{11} \sin \varphi - m_{12}(1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

с центром в точке  $\alpha_{1c}, \alpha_{2c}$ ; положение центра спирали зависит от всех шести параметров дрейфа. Спираль скручивается, если  $\lambda > 0$  (устойчивый фокус) и раскручивается в противном случае. При этом только неконсервативные параметры дрейфа  $m_{21}, m_{22}$  определяют устойчивость положения  $\alpha_{1c}, \alpha_{2c}$ . Консервативные параметры дрейфа  $m_{11}, m_{12}$  влияют на период движения оси динамической симметрии ротора по спирали.

Заметим, что если  $\lambda < 0$  и спираль раскручивается, то при выполнении условия (6.4) существует устойчивый предельный цикл, определяемый формулой (6.2).

Случай  $\mu \sim -1$ ,  $\rho \sim \pi$  может быть исследован аналогично.

В заключение авторы выражают глубокую признательность Ю. Г. Мартыненко за обсуждение результатов работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом//Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 3—8.
2. Белецкий В. В. Динамика быстрых вращений//Тр. ин-та механики МГУ. 1973. № 29. С. 97—118.
3. Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 15—23.
4. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
5. Лукьянов Д. П., Мочалов А. В., Одинцов А. А., Вайсгант И. В. Инерциальные навигационные системы морских объектов. Л.: Судостроение, 1989. 184 с.
6. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
8. Губаренко С. И., Кузьменко В. Г. Восстановление модели дрейфа гироскопа с неконтактным подвесом по результатам испытаний//Сб. научн. трудов МЭИ. 1989. № 217. С. 62—69.

Москва

Поступила в редакцию  
8.IV.1991