МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1993

УДК 539.374

© 1993 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА СКВАЙРА

Вопросы устойчивости течения вязкопластических тел были впервые затронуты в классических работах А. А. Ильюшина [1] и А. Ю. Ишлинского [2]. В [1] дана постановка задачи устойчивости плоского вязкопластического течения в терминах возмущений функции тока и потенциала скоростей, а также рассмотрены задачи о растяжении — сжатии полосы и растекании цилиндра. В [2] исследована устойчивость вязкопластического течения полосы и круглого прута. Движение считалось устойчивым, если в любой точке деформируемой границы тела вектор перемещения этой точки составляет тупой угол с вектором возмущения границы, и неустойчивым, если этот угол острый.

В дальнейшем основной интерес исследователей сконцентрировался на определении нестационарных характеристик течения, жестких (вязкоупругих) зон и на гидродинамических аспектах вязкопластичности [3—5]. Результаты этих и многих других работ находят применение при анализе движения нефти и нефтепродуктов по буровым скважинам и каналам (комбинации течений Куэтта и Пуазейля, спиралевидные течения и т. д.).

Из работ последних десяти лет, посвященных проблемам устойчивости движения вязкопластических сред, отметим [6], в которой выведены уравнения устойчивости и граничные условия для голономно диссипативных сред, а также [7—9].

В данной работе дается общая постановка краевой задачи устойчивости трехмерного вязкопластического течения относительно трехмерных возмущений кинематических величин, границы тела, а также границы, разделяющей жесткую зону и область течения. Принимается классический в амплитудно-частотном анализе критерий устойчивости. Выводятся достаточные условия на возмущения (аналог теоремы Сквайра), при которых трехмерная задача в случае плоского основного движения может быть сведена к двумерной, а, следовательно, и к обобщенной проблеме Орра — Зоммерфельда.

1. Трехмерная постановка краевой задачи устойчивости вязкопластического течения. Пусть тяжелое несжимаемое вязкопластическое тело с постоянными плотностью ρ, динамической вязкостью μ и пределом текучести при сдвиге τ занимает в момент времени t физическую область Ω эйлерова пространства с декартовой системой координат $(Ox_1x_2x_3)$. Эта область ограничена кусочно-гладкой поверхностью $\Sigma = \Sigma_v \cup \Sigma_\sigma$. Выделим также в Ω некоторую совокупность Ω_r подобластей Ω_n с кусочно-гладкими границами Σ_n.

Течение линейного вязкопластического материала в случае несжимаемости характеризуется известными векторными соотношениями [1], связывающими девиатор тензора напряжений σ_{ij} и тензор скоростей деформаций v_{ij}:

$$\sigma_{ij} + p\delta_{ij} = 2Tv_{ij}/U \qquad (1.1)$$

где δ_{ij} — единичный тензор, p — функция давления, T — максимальное касательное напряжение, U — максимальная скорость скольжения

$$T = [(\sigma_{ij} + p\delta_{ij})(\sigma_{ij} + p\delta_{ij})/2]^{1/2}, \quad U = (2v_{ij}v_{ij})^{1/2} \qquad (1.2)$$

а также линейным скалярным соотношением

$$T = \tau + \mu U \tag{1.3}$$

Для получения безразмерных уравнений движения введем характерные масштабы скорости V и длины h. Тогда безразмерные время t, радиус-вектор x, скорость v, тензор скоростей деформации v_{ij} и давление p можно записать в следующем виде (они стоят в правых частях):

$$Vt/h \to t, \;\; \mathrm{x}/h \to \mathrm{x}, \;\; \mathrm{v}/V \to \mathrm{v}, \;\; p/(\rho V^2) \to p, \;\; hv_{ij}/V \to v_{ij}$$

Величины, обратные безразмерной кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ и безразмерному ускорению силы тяжести g, как известно, называются числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = Vh/\nu$ и числом Фруда $\mathrm{Fr} = V^2/gh$. Введем также число $\varkappa = \tau h/\mu V$, характеризующее влияние пластических свойств по сравнению с вязкими и играющее важную роль в теории вязкопластичности.

Уравнения движения в новых переменных с учетом (1.1)—(1.3) имеют вид

$$- p,_i + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{\varkappa}{U}\right) \Delta v_i - \frac{\varkappa}{\mathrm{Re}}\,(v_{i,j} + v_{j,i})\,\frac{U,_j}{U^2} +$$

$$+ n_{(g)i}/\mathrm{Fr} = \partial v_i/\partial t + v_{i,j}v_j, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$n_{(g)i} = \cos\,(\mathrm{g}, \mathrm{e}_i) \tag{1.4}$$

Запишем также условие несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \tag{1.5}$$

и соотношения Стокса

$$v_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \tag{1.6}$$

Для задания граничных и начальных условий потребуем

$$\mathrm{x} \in \Sigma_v\!: \quad \mathrm{v}\,(\mathrm{x}, t) = \mathrm{W}\,(\mathrm{x}, t) \tag{1.7}$$

$$\mathrm{x} \in \Sigma_\sigma\!: \quad \sigma_{ij}\,(\mathrm{x}, t)\, n_j\,(\mathrm{x}, t) = P_i\,(\mathrm{x}, t) \tag{1.8}$$

$$t = 0\!: \quad \mathrm{v}\,(\mathrm{x}) = \mathrm{v}_0\,(\mathrm{x}) \tag{1.9}$$

Движение самих поверхностей Σ_v: $x_3 = f_v(x_1, x_2, t)$ и Σ_σ: $x_3 = f_\sigma(x_1, x_2, t)$ с течением времени определяется из уравнений

$$\partial f_{(v;\,\sigma)}/\partial t = v_3 - v_1\partial f_{(v;\,\sigma)}/\partial x_1 - v_2\partial f_{(v;\,\sigma)}/\partial x_2, \quad \mathrm{x} \in \Sigma_{(v;\,\sigma)} \tag{1.10}$$

После решения поставленной краевой задачи (1.4), (1.5) с граничными условиями (1.7), (1.8), (1.10) и начальным условием (1.9) можно найти границы зоны вязкопластического течения. На основании вариационных принципов [10] оно реализуется в точках $\mathrm{x} \in \Omega/\Omega_r$, где $T > \tau$, а область Ω_r занимает жесткая зона. Таким образом, граница Σ_r определяется из условия

$$T\,(\mathrm{x}, t) = \tau, \quad \mathrm{x} \in \Sigma_r \tag{1.11}$$

Во многих работах (например, [4]) считается, что в точках $\mathrm{x} \in \Omega_r$ материал ведет себя как упругое или вязкоупругое тело. Здесь возникает дополнительная задача об определении напряженно-деформированного состояния (уже в терминах $\sigma \sim \varepsilon$) внутри Ω_r. На поверхности Σ_r кроме (1.11) необходимо еще задавать кинематические и динамические условия совместности в том или ином виде.

Заметим также, что, если $\Sigma = \Sigma_v$ и поставленная выше задача решается в скоростях, то в силу определения U (1.2) и связи T и U (1.3) во всех точках тела $T \geq \tau$. В этом случае решение задачи неединственно. Соответствующим примером может служить плоское вязкопластическое течение Куэтта в горизонтальном слое, где наряду с прямолинейным профилем скоростей решениями будут всевозможные ломаные профили, в которых вертикальные отрезки чередуются с отрезками, равнонаклоненными к горизонтали. Распределение вертикальных отрезков, то есть жестких зон, по толщине слоя может быть произвольным.

Основное движение, удовлетворяющее выписанным уравнениям, граничным и начальным условиям, будем помечать индексом нуль вверху. Для исследования устойчивости предположим, что на основное состояние системы наложены малые возмущения

$$v_i = v_i^\circ + \delta v_i, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\circ + \delta\sigma_{ij}, \quad p = p^\circ + \delta p \tag{1.12}$$

Пользуясь малостью возмущений (1.12), линеаризуем уравнения движения (1.4) и условие несжимаемости (1.5):

$$-\delta p,_i + \frac{\Delta \delta v_i}{\mathrm{Re}} + \frac{2\varkappa}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\delta v_{ij} - V_{ijkl}{}^\circ \delta v_{kl}}{U^\circ}\right),_j = \partial\delta v_i/\partial t + v_j{}^\circ \delta v_{i,j} + v_{i,j}{}^\circ \delta v_j \tag{1.13}$$

$$\delta v_{i,i} = 0 \tag{1.14}$$

где $V_{ijkl}{}^\circ$ — тензор четвертого ранга, зависящий только от основного движения $V_{ijkl}{}^\circ = v_{ij}{}^\circ v_{kl}{}^\circ/(v_{mn}{}^\circ v_{mn}{}^\circ) \equiv 2v_{ij}{}^\circ v_{kl}{}^\circ/(U^\circ)^2$, а тензор δv_{ij} связан с вектором δv_i формулами (1.6). Уравнения (1.13) можно переписать и в более компактном виде (знаки вариаций опущены):

$$-p,_i + \Delta v_i/\mathrm{Re} + 2\varkappa\,(v_{ijkl}{}^\circ v_{kl}),_j/\mathrm{Re} = \partial v_i/\partial t + v_j{}^\circ v_{i,j} + v_{i,j}{}^\circ v_j \tag{1.15}$$

где $v_{ijkl}{}^\circ = (\delta_{ik}\delta_{jl} - V_{ijkl}{}^\circ)/U^\circ$ — тензор четвертого ранга, также зависящий от основного движения тела.

Линеаризация граничных условий (1.7), (1.8), (1.11) представляет собой их снесение с возмущенных поверхностей $x_3 = f_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)}(x_1, x_2, t) + \eta_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)}(x_1, x_2, t)$ на невозмущенные $x_3 = f_{(v;\sigma;r)}(x_1, x_2, t)$. Будем иметь

$$x_3 = f_v(x_1, x_2, t)\colon \quad v_i = -\eta_v \partial v_i{}^\circ/\partial x_3 + W_i \tag{1.16}$$

$$x_3 = f_\sigma(x_1, x_2, t)\colon \quad \sigma_{ij} n_j{}^\circ = -\sigma_{ij}{}^\circ n_j - \eta_\sigma \partial P_i{}^\circ/\partial x_3 + P_i \tag{1.17}$$

$$x_3 = f_r(x_1, x_2, t)\colon \quad 2v_{kl}{}^\circ v_{kl} = -\eta_r U^\circ \partial U^\circ/\partial x_3 \tag{1.18}$$

где W_i и P_i — вариации входных данных, заданные на соответствующих границах. Если же внешние данные фиксированы в основном и возмущенном движениях, то $W_i = 0, P_i = 0$.

Компоненты нормали $n_i{}^\circ$ и n_i, входящие в условия (1.17), выражаются через f_σ и η_σ следующим образом

$$n_J{}^\circ = f_{\sigma,J}/|\mathbf{n}^\circ|, \quad n_3{}^\circ = -1/|\mathbf{n}^\circ|, \quad J = 1, 2$$

$$n_J = \eta_{\sigma,J}/|\mathbf{n}^\circ| - f_{\sigma,J} f_{\sigma,L}\eta_{\sigma,L}/|\mathbf{n}^\circ|^3, \quad n_3 = f_{\sigma,L}\eta_{\sigma,L}/|\mathbf{n}^\circ|^3, \quad J, L = 1, 2$$

Линеаризируя далее уравнение (1.10), получим закон движения возмущенных поверхностей Σ_v, Σ_σ, Σ_r:

$$\partial\eta_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)}/\partial t = v_3 - v_J{}^\circ \partial\eta_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)}/\partial x_J - v_J \partial f_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)}/\partial x_J, \quad \mathbf{x} \in \sum\nolimits_{(v\,;\,\sigma\,;\,r)} \tag{1.19}$$

Кроме того потребуем, чтобы

$$t = 0: \ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = 0 \tag{1.20}$$

Таким образом, трехмерная краевая задача (задача Коши) устойчивости вязкопластического течения заключается в решении четырех уравнений (1.13)—(1.14) с граничными условиями (1.16)—(1.18) и начальным условием (1.20).

Сведем эту задачу к спектральной проблеме. Для этого рассмотрим отдельные гармоники возмущения по осям (Ox_1) и (Ox_2) (учет всех гармоник равносилен применению преобразования Фурье по переменным x_1, x_2). Представим неизвестные величины в форме

$$\mathrm{v}(\mathrm{x}, t) = \mathrm{v}^{\vee}(x_3) \exp i(s_1x_1 + s_2x_2) + \alpha t \tag{1.21}$$

$$p(\mathrm{x}, t) = p^{\vee}(x_3) \exp i(s_1x_1 + s_2x_2) + \alpha t \tag{1.22}$$

где s_1, s_2 — вещественные компоненты двумерного волнового вектора s, а $\alpha = \alpha_* + i\alpha_{**}$ — комплексная частота. Критерием устойчивости основного движения, очевидно, является неравенство $\alpha_* < 0$, выполненное при любых s_1, s_2.

Подставляя (1.21), (1.22) в (1.14), (1.15), для комплексных амплитуд $\mathrm{v}^{\vee}$, $p^{\vee}$ будем иметь (положим формально $s_3 \equiv 0$):

$$is_kv_k^{\vee} + v_3^{\vee\prime} = 0 \tag{1.23}$$

$$-is_mp^{\vee} - \delta_{m3}p^{\vee\prime} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(-s_ns_nv_m^{\vee} + v_m^{\vee\prime\prime} + \frac{\varkappa}{\mathrm{Re}}(v^{\circ}_{mjkl,j} + is_jv^{\circ}_{mjkl}) \cdot$$

$$\cdot (is_lv_k^{\vee} + is_kv_l^{\vee} + \delta_{l3}v_k^{\vee\prime} + \delta_{k3}v_l^{\vee\prime}) + \frac{\varkappa}{\mathrm{Re}} v_{m3kl}{}^{\circ}(is_lv_k^{\vee} + is_kv_l^{\vee} +$$

$$+ \delta_{l3}v_k^{\vee\prime} + \delta_{k3}v_l^{\vee\prime})' = \alpha v_m^{\vee} + v_j^{\circ}(is_jv_m^{\vee} + \delta_{j3}v_m^{\vee\prime}) + v_j^{\vee}v_{m,j}{}^{\circ} \tag{1.24}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x_3.

2. Сдвиговые течения и аналог теоремы Сквайра. Ограничим основное движение системы классом одномерных сдвиговых течений, так что $v_1{}^{\circ} = v^{\circ}(x_3)$, $v_2{}^{\circ} = v_3{}^{\circ} \equiv 0$. Как известно [11, 12], в теории вязкой жидкости, исследуя устойчивость такого типа невозмущенных течений, достаточно рассматривать только двумерные возмущения вида $\mathrm{v}(x_1, x_3, t) = \mathrm{v}^{\vee}(x_3) \exp(is_1x_1 + \alpha t)$. Это утверждение равносильно теореме Сквайра [13], согласно которой любому трехмерному возмущению можно поставить в соответствие некоторое двумерное возмущение, нарастающее с той же скоростью α_*/s_1, но при меньшем числе Re.

Покажем, что в отличие от ньютоновских жидкостей для вязкопластического течения класс трехмерных возмущений, сводящихся к двумерным, ограничен. Действительно, в случае одномерного сдвига тензор $v_{mjkl}{}^{\circ}$ имеет вид

$$v_{mjkl}{}^{\circ} = [\delta_{mk}\delta_{jl} - (\delta_{m1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{j1}\delta_{l1}\delta_{m3}\delta_{k3} +$$

$$+ \delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{m3}\delta_{l3} + \delta_{m1}\delta_{l1}\delta_{j3}\delta_{k3})/2]/U^{\circ}, \quad U^{\circ} = |v^{\circ\prime}| \tag{2.1}$$

Умножим обе части уравнений (1.24) на s_m и просуммируем по m. Предварительно вводя обозначения $s = (s_ms_m)^{1/2}$, $u_1^{\vee} = s_mv_m^{\vee}/s$, $u_3^{\vee} = v_3^{\vee}$, $q^{\vee} = sp^{\vee}/s_1$, $\gamma = s\alpha/s_1$, с учетом (2.1) после некоторых преобразований будем иметь

$$-isq^{\vee} + \frac{s}{s_1\mathrm{Re}}(-s^2u_1^{\vee} + u_1^{\vee\prime\prime}) - \frac{2s^3\varkappa}{s_1U^{\circ}\mathrm{Re}}u_1^{\vee} + \frac{\varkappa}{s_1\mathrm{Re}}\left\{\frac{s_2}{U^{\circ}}(is_2v_3^{\vee} + v_2^{\vee\prime}\right\}' =$$

$$= \gamma u_1^{\vee} + isv^{\circ}u_1^{\vee} + U^{\circ}u_3^{\vee} \tag{2.2}$$

Запишем также в новых переменных третье уравнение (1.24) и уравнение (1.23):

$$- q^{\vee\prime} + \frac{s}{s_1 \operatorname{Re}} (- s^2 u_3^{\vee} + u_3^{\vee\prime\prime}) + \frac{2s\varkappa}{s_1 \operatorname{Re}} \left(\frac{u_3^{\vee\prime}}{U^\circ} \right)' +$$

$$+ iss_2\varkappa (is_2 v_3^{\vee} + v_2^{\vee\prime})/(s_1 U^\circ \operatorname{Re}) = \gamma u_3^{\vee} + isv^\circ u_3^{\vee} \tag{2.3}$$

$$u_3^{\vee\prime} + isu_1^{\vee} = 0 \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь вместо (1.21), (1.22) двумерную гармонику возмущения в плоскости (Ox_1x_3):

$$v_1 (x_1, x_3, t) = u_1 (x_3)\, e^{isx_1+\gamma t}, \quad v_2 \equiv 0 \tag{2.5}$$

$$v_3 (x_1, x_3, t) = u_3 (x_3)\, e^{isx_1+\gamma t} \tag{2.6}$$

$$p (x_1, x_3, t) = q (x_3)\, e^{isx_1+\gamma t} \tag{2.7}$$

В терминах u_1, u_3 и q уравнения движения (1.15) и условие несжимаемости (1.14) выглядят следующим образом (тензор $v_{ijkl}{}^\circ$, по-прежнему, имеет вид (2.1)):

$$- isq + \frac{1}{\operatorname{Re}} (-s^2 u_1 + u_1'') - \frac{2s^2\varkappa}{U^\circ \operatorname{Re}} u_1 = \gamma u_1 + isv^\circ u_1 + U^\circ u_3$$

$$- q' + \frac{1}{\operatorname{Re}} (- s^2 u_3 + u_3'') + \frac{2\varkappa}{\operatorname{Re}} \left(\frac{u_3'}{U^\circ} \right)' = \gamma u_3 + isv^\circ u_3 \tag{2.8}$$

$$u_3' + isu_1 = 0 \tag{2.9}$$

Видно, что, если $is_2 v_3^{\vee} = - v_2^{\vee\prime}$ (т. е. $v_{23} = 0$), то уравнения (2.2)—(2.4) совпадают с группой уравнений (2.8)—(2.9) с точностью до коэффициента s_1/s при числе Re. Поскольку в разных обозначениях скорости нарастания возмущений не меняются ($\alpha/s_1 = \gamma/s$), то в силу неравенства $s_1 \leq s$ критическое число Re любого трехмерного возмущения (1.21)—(1.22) будет не меньше критического числа Re соответствующего двумерного возмущения (2.5)—(2.7) (причем равенство реализуется лишь при $s_2 = 0$). Так как $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$, то устойчивость волны возмущения, распространяющейся под некоторым углом к плоскости основного потока, повышается.

Итак, для вязкопластического одномерного сдвига справедлива следующая

Теорема (аналог теоремы Сквайра). Среди всех нарастающих трехмерных возмущений, удовлетворяющих условию $v_{23} = 0$, всегда можно найти двумерное (в плоскости основного движения), нарастающее с той же скоростью, при том же числе $\varkappa$, но при меньшем числе Re.

Заметим, что возникающее в вязкопластическом случае (в отличие от движения ньютоновских жидкостей) ограничение $v_{23} = 0$ является достаточным в условии теоремы. Так как основное движение происходит в плоскости (Ox_1x_3), то это ограничение не слишком сужает класс рассматриваемых трехмерных возмущений.

3. Постановка обобщенной задачи Орра — Зоммерфельда. Исследуя двумерную картину вариаций $(v_1; v_3)$, систему уравнений (1.14), (1.15) можно свести к одному уравнению относительно функции тока ψ: $v_1 = \partial\psi/\partial x_3$, $v_3 = -\partial\psi/\partial x_1$, имеющему следующий вид

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta\Delta\psi + \frac{\varkappa}{\operatorname{Re}} \varepsilon_{im} [v_{ijkl}{}^\circ (\varepsilon_{kn}\psi,_{nl} + \varepsilon_{ln}\psi,_{nk})],_{jm} =$$

$$= \partial\Delta\psi/\partial t + \varepsilon_{jl} [\psi^\circ,_l\psi,_{jk}),_k + (\psi,_l\psi^\circ,_{jk}),_k] \tag{3.1}$$

где ε_{ij} — двумерный символ Леви-Чивита ($\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj} = \delta_{ik}$). Все индексы в (3.1) принимают значение 1 и 3.

Для рассмотренного в п. 2 одномерного сдвига (тензор $v_{mjkl}{}^\circ$ задается соотношением (2.1)) уравнение (3.1) упрощается

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi + \frac{4\varkappa}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\psi_{,13}}{|v^{\circ\prime}|}\right)_{,13} = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + v^\circ(\Delta\psi)_{,1} - v^{\circ\prime\prime}\psi_{,1} \tag{3.2}$$

Представляя $\psi(x_1, x_3, t)$ в виде отдельной гармоники возмущения $\psi = \varphi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$, преобразуем (3.2) к спектральному виду

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - 2s^2\varphi'' + s^4\varphi - 4\varkappa s^2(\varphi'/|v^{\circ\prime}|)' = is[(v^\circ - i\alpha/s)(\varphi'' - s^2\varphi) - v^{\circ\prime\prime}\varphi]\mathrm{Re} \tag{3.3}$$

где штрих, по-прежнему, означает дифференцирование по x_3.

Если основное движение происходит в области $0 < x_3 < 1$, то граничные условия (1.16), (1.17) при $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$ имеют стандартный вид. Отметим лишь как выглядит условие (1.18) на Σ_r. В самом общем случае одномерного сдвига область Ω_r представляет собой набор N слоев $(0 \le \xi_1 < x_3 < \xi_2) \cup (\xi_3 < x_3 < \xi_4) \cup \ldots \cup (\xi_{2N-1} < x_3 < \xi_{2N} \le 1)$, где $\xi_1, \ldots, \xi_{2N}$ определяются из основного течения. Пусть $x_3 = \xi$ — одна из составляющих частей границы Σ_r, на которой $U^\circ = |v^{\circ\prime}| = 0$. Тогда линеаризованное условие (1.18) запишется в форме

$$v^{\circ\prime\prime}(\xi)\eta_r + 2v_{13}(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

Положим $\eta_r(x_1, t) = \mathrm{H}\exp(isx_1 + \alpha t)$. Так как $2v_{13} = (\varphi'' + s^2\varphi)\exp(isx_1 + \alpha t)$, то (3.4) равносильно соотношению для амплитуд $\mathrm{H}v^{\circ\prime\prime}(\xi) + \varphi''(\xi) + s^2\varphi(\xi) = 0$. Связь константы H и $\varphi(\xi)$ следует из закона движения поверхности Σ_r (1.19): $[\alpha + isv^\circ(\xi)]\mathrm{H} + is\varphi(\xi) = 0$.

Уравнение (3.3) при $\varkappa = 0$ сводится к хорошо изученному уравнению Орра — Зоммерфельда (см., например [14]), поэтому возможные дальнейшие результаты будут некоторым обобщением известных исследований по устойчивости движения ньютоновских несжимаемых жидкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластических тел//Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. № 39. С. 3—81.
2. *Ишлинский А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута//ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 109—130.
3. *Гурбанов Р. С., Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х.* Гидродинамика вязкопластических сред//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 3. С. 171—179.
4. *Магомедов О. Б., Победря Б. Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения//Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 152—169.
5. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Наука, 1977. 373 с.
6. *Ержанов Ж. С., Егоров А. К.* Устойчивость неоднородного деформирования нелинейных тел. Алма-Ата: Наука, 1987. 278 с.
7. *Малинин Н. Н., Романов К. И.* Устойчивость двухосного растяжения в условиях ползучести//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 133—136.
8. *Bukowski R., Wojewodzki W.* Dynamic buckling of viscoplastic spherical shell//Intern. J. Solids and Struct. 1984. V. 20. № 8. P. 761—776.
9. *Кеппен И. В., Родионов С. Ю.* Растяжение-сжатие полосы из нелинейного вязкопластического материала//Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 97—105.

10. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы теории течений жестковязкопластических сред. М.: Наука, 1971. 114 с.

11. *Squire H. B.* On stability of three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1933. V. 142. № 847. P. 621—628.

12. *Yih C.-S.* Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances//Quart. Appl. Math. 1955. V. 12. № 4. P. 434—435.

13. *Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости//Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3—89.

14. *Betchov R., Criminale W. O.* Stability of parallel flows. London-New-York: Acad. Press, 1967. 330 p.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1992