

## ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Построены однородные решения линеаризованных уравнений равновесия предварительно напряженной упругой плиты из произвольного изотропного несжимаемого материала. Эти решения удовлетворяют краевым условиям на незагруженных торцевых гранях плиты и позволяют в точной трехмерной постановке исследовать устойчивость плиты при любых граничных условиях на боковой поверхности. Предполагается, что начальная деформация однородна и вызвана равномерным давлением, приложенным к боковой поверхности плиты. Рассмотрены два случая: наложение на исходное состояние малого изгиба (антисимметричная задача) и малого растяжения или сжатия (симметричная задача). В каждой из задач выявлено три типа однородных решений: проникающее, вихревое и потенциальное. Дается качественное описание спектра однородных решений в предположении, что материал удовлетворяет условию Адамара [1, 2]. Установлено, что вихревое и потенциальное решения, как и в [3], имеют характер экспоненциально убывающего погранслоя, локализованного вблизи боковой поверхности, а проникающее решение слабо меняется при удалении от края в глубь плиты. Отмечена возможность существования потенциальных решений, не имеющих аналогов в линейной теории плит [4], и указаны необходимые и достаточные условия их наличия.

Анализ проникающего решения в антисимметричной задаче свидетельствует о справедливости кинематических гипотез Кирхгофа для членов низшего порядка по толщине плиты в представлении перемещений, что является обобщением частного вывода работы [5] на случай произвольного изотропного несжимаемого материала. Доказано также, что оценка точности уравнения Сен-Венана прикладной теории устойчивости пластинок [6], полученная в [5] для модели Трелоара, остается в силе и для любого несжимаемого материала, удовлетворяющего неравенству Адамара и обнаруживающего линейное поведение при малых деформациях из натурального состояния.

Рассмотрена осесимметричная бифуркация равновесия круглой плиты с незакрепленным краем при действии на боковой поверхности равномерно распределенной «мертвой» нагрузки. При помощи вариационного принципа [7] задача устойчивости сведена к обобщенной задаче на собственные значения для бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, существенно нелинейно зависящих от параметра начальной деформации. Расчет критической нагрузки и формы потери устойчивости выполнен для материала, описываемого моделью Бартенева — Хазановича [1]. Результат найден двумя способами: путем численного решения бесконечной системы уравнений и асимптотическим методом, предложенным в [8]. Найдена асимптотика критических значений деформации и нагрузки при  $\tau \rightarrow 0$ , где  $\tau$  — отношение толщины плиты к ее диаметру. Результаты численного эксперимента свидетельствуют о том, что при  $\tau \leq 0,3$  для определения критических параметров можно ограничиться использованием только проникающего решения. Если же  $\tau > 0,3$ , то для получения необходимой точности требуется привлекать погранслоиные решения. Обнаружено явление локализации деформации вблизи боковой поверхности при потере устойчивости толстой плиты с незакрепленным краем. Это явление аналогично краевому резонансу в динамике плит [9], при котором область интенсивных колебаний сосредоточена вблизи края. Сравнение численного решения с асимптотическим показывает, что асимптотический метод эффективен только при значениях  $\tau$ , не превосходящих 0,4. Сужение области применимости метода по сравнению с линейной теорией [10] объясняется неравномерностью возмущения спектра однородных решений в окрестности ненапряженного состояния.

Наряду с изгибной, выявлена крутильная форма неустойчивости упругого цилиндра, сжатого по боковой поверхности мертвой нагрузкой.

Развитый в работе аппарат однородных решений можно использовать также для определения малых деформаций в предварительно напряженных упругих плитах при возмущении начальной нагрузки, в частности, при наличии малой поперечной нагрузки.

1. **Линеаризованные уравнения равновесия.** Рассмотрим плиту произвольного очертания из несжимаемого изотропного упругого материала, нагруженную по боковой поверхности равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности  $t$  (на единицу площади деформированной конфигурации). Торцевые грани считаются свободными от напряжений; массовые силы не учитываются. При указанных условиях в плите возникает однородная деформация вида

$$X_1 = \lambda x_1, X_2 = \lambda x_2, X_3 = \lambda^{-2} x_3 \quad (\lambda = \text{const}) \quad (1.1)$$

где  $x_k, X_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты соответственно до и после деформации (плоскости  $x_3 = 0, X_3 = 0$  считаются совмещенными со срединной). Связь между параметрами  $t$  и  $\lambda$  такова

$$t = 2(c_1 + c_2 \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda^{-4}) \quad (1.2)$$

$$c_k \equiv \partial W / \partial I_k \quad (k = 1, 2)$$

Здесь  $W$  — объемная плотность потенциальной энергии деформации в ненапряженном состоянии,  $I_k$  ( $k = 1, 2$ ) — главные инварианты меры деформации Фингера [1, 2]. Потенциал  $W$  будем считать дважды непрерывно дифференцируемой функцией инвариантов  $I_1, I_2$ .

На однородную деформацию (1.1) накладывается малая добавочная деформация. Последняя описывается следующими линеаризованными уравнениями равновесия ( $\gamma \equiv \lambda^{-3}$ ):

$$u_i'' + D^2 u_i + \lambda^{-1} \partial_i p + c \partial_j (\partial_j \mu_i - \partial_i \mu_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$$

$$(1 + \delta) w'' + D^2 w + \lambda^2 p' = 0 \quad (1.3)$$

$$\gamma (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + w' = 0$$

$$c = \frac{c_2 \lambda^2 (\gamma^2 - 1)}{c_1 + c_2 \lambda^2}, \quad c_{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_k} \quad (i, k = 1, 2)$$

$$\delta = \frac{2\lambda^2 (\gamma^2 - 1)^2 (c_{11} + 2c_{12} \lambda^2 + c_{22} \lambda^4)}{c_1 + c_2 \lambda^2}$$

Здесь  $u_1, u_2, w$  — компоненты вектора добавочных перемещений,  $\partial_i$  ( $i = 1, 2$ ) — операторы дифференцирования по  $x_i$ ,  $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$  — двумерный оператор Лапласа. Штрих означает производную по поперечной координате  $x_3 \equiv z$ . Вследствие несжимаемости материала в уравнения равновесия (1.3) входит неизвестная функция координат  $p$ ; ее нужно определить в ходе решения задачи. Последнее из уравнений (1.3) представляет собой условие несжимаемости.

Вывод уравнений равновесия (1.3) осуществляется средствами теории наложения малой деформации на конечную [1]. В частности, для неогукковского материала такой вывод подробно сделан в работе [11]; соответствующие указанному материалу линеаризованные уравнения равновесия [11, 5] получаются из (1.3) при  $c = 0, \delta = 0$ .

Компоненты  $P_{km}$  ( $k, m = 1, 2, 3$ ) линеаризованного тензора напряжений Пиолы [1, 2] выражаются через добавочные перемещения и давление  $p$  следующим образом:

$$P_u / g = (1 + \gamma^2) \partial \mu_i + \lambda^{-1} p - 2c \partial \mu_i \quad (1.4)$$

$$P_y / g = (1 + c) \partial \mu_j + (\gamma^2 + c) \partial \mu_i$$

$$P_B / g = \partial_i w + \gamma u_i', \quad P_{3i} / g = u_i' + \gamma \partial_i w$$

$$P_{33} / g = (2 + \delta) w' + \lambda^2 p, \quad g \equiv 2(c_1 + c_2 \lambda^2)$$

Здесь  $i, j$  — произвольная перестановка индексов 1, 2.

Граничные условия на торцах плиты, выражающие отсутствие добавочных напряжений, в силу (1.4) записываются в виде

$$(u_i' + \gamma \partial_i w) / z = \pm h = 0, \quad [(2 + \delta) w' + \lambda^2 p] / z = \pm h = 0 \quad (1.5)$$

2. Однородные решения в антисимметричной задаче. Если добавочная деформация плиты антисимметрична относительно срединной плоскости (что соответствует изгибу), то  $u_1, u_2$  и  $p$  — нечетные функции, а  $w$  — четная функция поперечной координаты  $z$ . Как и в [5], в рассматриваемом случае существуют три типа однородных решений (т. е. частных решений системы (1.3), удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.5)) — проникающее, вихревое и потенциальное. Они выражаются через корни следующего трансцендентного уравнения, называемого в дальнейшем характеристическим

$$\alpha^2 \cos \alpha \omega \left[ S_1 \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2) \alpha}{(\beta_1 + \beta_2) \alpha} + S_2 \frac{\sin(\beta_1 - \beta_2) \alpha}{(\beta_1 - \beta_2) \alpha} \right] = 0 \quad (2.1)$$

$$\beta_{1,2} = 1/2 \left( \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\gamma^2} \right), \quad \beta_1 \beta_2 = \gamma, \quad \mu = 1 + \gamma^2 + \epsilon$$

$$\epsilon = \delta \gamma^2, \quad \omega^2 = 1 + c = \frac{c_1 + c_2 \lambda^{-4}}{c_1 + c_2 \lambda^2}$$

$$S_1 = \gamma^3 - 3\gamma^2 - \gamma - 1 - \epsilon, \quad S_2 = \gamma^3 + 3\gamma^2 - \gamma + 1 + \epsilon$$

В предположении, что энергия  $W$  удовлетворяет условию Адамара [1, 2] по крайней мере в некоторой окрестности ненапряженного состояния, можно доказать, что при  $\gamma$ , близких к 1, справедливо неравенство  $\omega^2 \geq 0$ , т. е.  $\cos \alpha \omega$  имеет счетный набор вещественных нулей (тривиальный случай  $\omega = 0$  интереса не представляет, ибо он означает равенство нулю модуля сдвига в плоскостях, параллельных к срединной). Этими нулями определяется вихревое решение. Кроме того, уравнение (2.1) имеет два корня  $\pm \alpha_0$ , различающихся между собой только знаком и обладающих тем свойством, что при  $\gamma \rightarrow 1$  они стремятся к нулю; эти корни, а также двукратный корень  $\alpha = 0$ , определяют проникающее решение. При предварительном сжатии плиты корни  $\pm \alpha_0$  чисто мнимые, а при предварительном растяжении — вещественные. В первом случае проникающее решение осциллирует по  $x_1, x_2$  (без затухания) при продвижении от боковой поверхности в глубь плиты, во втором — наблюдается слабое затухание. Остальные корни уравнения (2.1) (они либо вещественные, либо комплексные) порождают потенциальное решение. Условимся обозначать их через  $\alpha_q$  ( $q \geq 1$ ), осуществляя нумерацию в порядке возрастания действительной части.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные представления

для однородных решений ( $\zeta \equiv z/h$ ). Для сокращения записей удобно ввести оператор симметризации  $\text{Sym}$  по параметрам  $\beta_1, \beta_2$ :

$$\text{Sym } f(\beta_1, \beta_2) = f(\beta_1, \beta_2) + f(\beta_2, \beta_1) \quad (2.2)$$

Проникающее решение

$$u_i = h\gamma\zeta \partial_i \psi + h^3 A(\zeta) \partial_i D^2 \psi \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$w = -\psi + h^2 B(\zeta) D^2 \psi, \quad p = h\lambda E(\zeta) D^2 \psi$$

$$A(\zeta) = -\frac{\gamma\zeta}{\alpha_0^2} + \frac{\cos \alpha_0 \omega}{\alpha_0^3} \text{Sym} \left[ \frac{(1 + \beta_1^2) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_0 \sin \beta_1 \alpha_0 \zeta \right]$$

$$B(\zeta) = \frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{\cos \alpha_0 \omega}{\alpha_0^2} \text{Sym} \left( \frac{\beta_2^2 + \gamma^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_0 \cos \beta_1 \alpha_0 \zeta \right)$$

$$E(\zeta) = \frac{\cos \alpha_0 \omega}{\alpha_0} \text{Sym} \left[ \frac{(\beta_1^4 - 1) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_0 \sin \beta_1 \alpha_0 \zeta \right]$$

$$D^4 \psi - \alpha_0^2 D^2 \psi / h^2 = 0 \quad (2.4)$$

Вихревое решение

$$u_i = -h^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta) \partial_i B_m, \quad u_2 = h^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta) \partial_i B_m \quad (2.5)$$

$$w = p = 0$$

$$F_m(\zeta) = 2 \sin \sigma_m \zeta / \sigma_m, \quad \sigma_m = \pi (2m - 1) / 2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$D^2 B_m - \sigma_m^2 B_m / (\omega^2 h^2) = 0 \quad (2.6)$$

Потенциальное решение

$$u_i = h \sum_{q=1}^{\infty} T_q(\zeta) \partial_i C_q \quad (i = 1, 2) \quad (2.7)$$

$$w = \sum_{q=1}^{\infty} M_q(\zeta) C_q, \quad p = h^{-\lambda} \sum_{q=1}^{\infty} N_q(\zeta) C_q$$

$$T_q(\zeta) = \frac{1}{\alpha_q} \text{Sym} \left[ \frac{(1 + \beta_1^2) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_q \sin \beta_1 \alpha_q \zeta \right]$$

$$M_q(\zeta) = \text{Sym} \left( \frac{\beta_2^2 + \gamma^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_q \cos \beta_1 \alpha_q \zeta \right)$$

$$N_q(\zeta) = \alpha_q \text{Sym} \left[ \frac{(\beta_1^4 - 1) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \cos \beta_2 \alpha_q \sin \beta_1 \alpha_q \zeta \right]$$

$$D^2 C_q - \alpha_q^2 C_q / h^2 = 0 \quad (2.8)$$

Как уже было отмечено, описанное выше распределение спектра однородных

решений относится к случаю малых начальных деформаций. При больших деформациях (условие Адамара и здесь предполагается выполненным) среди корней  $\alpha_q$  ( $q \geq 1$ ) возможно появление конечного числа чисто мнимых (в том числе, быть может, одного двукратного). Соответствующую им часть потенциального решения (2.7) следует при этом выделить и присоединить к проникающему решению (2.3).

Отметим также, что, как и в [3], при  $h \rightarrow 0$  вихревое решение (2.5) и потенциальное решение (2.7) (с учетом только что сделанного замечания) несут характер пограничного, локализованного вблизи боковой поверхности и экспоненциально убывающего при удалении от края.

3. Однородные решения в симметричной задаче. В этом случае  $u_1, u_2$  и  $p$  — четные функции от  $z$ , а  $w$  — нечетная. Характеристическое уравнение (2.1) заменяется уравнением

$$\alpha^4 \frac{\sin \omega \alpha}{\omega \alpha} \left[ S_1 \frac{\sin (\beta_1 + \beta_2) \alpha}{(\beta_1 + \beta_2) \alpha} - S_2 \frac{\sin (\beta_1 - \beta_2) \alpha}{(\beta_1 - \beta_2) \alpha} \right] = 0 \quad (3.1)$$

где приняты те же обозначения, что и в п. 2. Четырехкратному корню  $\alpha = 0$ , как и в классической теории толстых плит [4], отвечает бигармоническое решение ( $\nu \equiv \mu + 2\gamma^2$ ):

$$u_i = \varphi_i - \partial_i \left[ \Phi + \frac{\omega^2 \gamma^2}{2(\nu - \omega^2)} \left( \frac{h^2}{3} - z^2 \right) D^2 \Phi \right] \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

$$w = \frac{z\gamma\omega^2}{\omega^2 - \nu} D^2 \Phi, \quad p = \frac{\lambda\omega^2 (2\gamma^2 + \epsilon)}{\nu - \omega^2} D^2 \Phi$$

$$D^4 \Phi = 0 \quad (3.3)$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  — сопряженные гармонические функции, определяемые соотношениями

$$\partial_1 \varphi_1 = \partial_2 \varphi_2 = \frac{\nu}{2(\nu - \omega^2)} D^2 \Phi, \quad \partial_2 \varphi_1 = -\partial_1 \varphi_2 \quad (3.4)$$

Если подставить (3.2) в выражения добавочных напряжений (1.4) и перейти затем к пределу при  $\gamma \rightarrow 1$ , то (при указанных в п. 4 ограничениях) можно убедиться в том, что предельное значение функции  $\Phi$  с точностью до множителя совпадает с известной из линейной теории толстых плит функцией напряжений Эри [4].

Вещественные нули  $\sin \omega \alpha$  порождают вихревое решение

$$u_1 = h^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta) \partial_2 B_m, \quad u_2 = -h^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\zeta) \partial_1 B_m \quad (3.5)$$

$$w = p = 0$$

$$F_m(\zeta) = 2 \cos \sigma_m \zeta, \quad \sigma_m = \pi m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$D^2 B_m - \sigma_m^2 B_m / \omega^2 h^2 = 0 \quad (3.6)$$

Наконец, остальным корням характеристического уравнения (3.1) (обозначим их  $\alpha_q$ ,  $q \geq 1$ ) соответствует потенциальное решение

$$u_i = h \sum_{q=1}^{\infty} T_q(\zeta) \partial_i C_q \quad (i = 1, 2) \quad (3.7)$$

$$w = \sum_{q=1}^{\infty} M_q(\zeta) C_q, \quad p = h^{-\lambda} \sum_{q=1}^{\infty} N_q(\zeta) C_q$$

$$T_q(\zeta) = \frac{1}{\alpha_q} \text{Sym} \left[ \frac{(1 + \beta_1^2) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \sin \beta_2 \alpha_q \cos \beta_1 \alpha_q \zeta \right]$$

$$M_q(\zeta) = -\text{Sym} \left( \frac{\beta_2^2 + \gamma^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \sin \beta_2 \alpha_q \sin \beta_1 \alpha_q \zeta \right)$$

$$N_q(\zeta) = \alpha_q \text{Sym} \left[ \frac{(\beta_1^4 - 1) \beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \sin \beta_2 \alpha_q \cos \beta_1 \alpha_q \zeta \right]$$

$$D^2 C_q - \alpha_q^2 C_q / h^2 = 0 \quad (3.8)$$

Как и в антисимметричной задаче, при соблюдении условия Адамара можно показать, что в некоторой окрестности ненапряженного состояния корни  $\alpha_q$  ( $q \geq 1$ ) либо вещественные, либо комплексные; однако с увеличением начальной деформации среди них может появляться конечное число чисто мнимых (один из которых, возможно, двукратный). В этом случае соответствующие чисто мнимым корням  $\alpha_q$  решения необходимо выделить из (3.7) и присоединить к бигармоническому решению (3.2), что даст в совокупности проникающее решение.

Очевидно, что бигармоническое решение (3.2) не затухает при удалении от края плиты, тогда как вихревое решение (3.5) имеет характер погранслоя, локализованного вблизи боковой поверхности. Последнее относится и к потенциальному решению (3.7) (естественно, после выделения осциллирующей по  $x_1, x_2$  части, если она имеется). Убывание погранслоев при продвижении внутрь области, как и в [3], экспоненциальное.

4. Поведение однородных решений при устранении начальной деформации. Будем предполагать (помимо принятых ранее допущений), что при деформации простого сдвига из натурального состояния модуль сдвига материала отличен от нуля

$$\text{при } I_1 = I_2 = 3 \quad c_1 + c_2 \neq 0 \quad (4.1)$$

Тогда для  $\epsilon$  и  $c$  имеют место очевидные оценки ( $\eta \equiv \gamma^2 - 1$ ):

$$\epsilon = O(\eta^2), \quad c = O(\eta) \quad (\eta \rightarrow 0) \quad (4.2)$$

а для параметров, фигурирующих в (2.1), (3.1), при  $\gamma \rightarrow 1$  справедливы асимптотические разложения

$$\mu = 2 + \eta + O(\eta^2), \quad \beta_1 = 1 + O(\eta), \quad \beta_2 = 1 + O(\eta) \quad (4.3)$$

$$S_1 = -4 + O(\eta), \quad S_2 = 4 + O(\eta), \quad w^2 = 1 + O(\eta)$$

Используя (4.3) и переходя в (2.1), (3.1) к пределу при  $\gamma \rightarrow 1$ , получаем соответственно

$$\alpha^2 \cos \alpha \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\alpha^4 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) = 0 \quad (4.5)$$

Таким образом, при вышеуказанных ограничениях на потенциал  $W$  харак-

теристические уравнения (2.1), (3.1) переходят при  $\gamma \rightarrow 1$  в известные уравнения классической теории толстых плит [4].

Далее, учитывая (4.3), с помощью теории возмущений [13] имеем для  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0^2 = -\frac{3}{4}\eta + O(\eta^2) \quad (\eta \rightarrow 0) \quad (4.6)$$

Формула (4.6) (совместно с (4.3)) позволяет найти предельное значение проникающего решения (2.3), которое оказывается совпадающим с бигармоническим решением линейной теории изгиба плит [4]. Еще проще осуществить предельный переход в (3.2), (2.5), (3.5). В каждом из перечисленных случаев получаем совпадение с соответствующим решением классической теории толстых плит.

Более сложная ситуация складывается с потенциальными решениями (2.7), (3.7). Действительно, как уже отмечалось в [5], для неогуковского материала существуют потенциальные решения, не имеющие аналогов в линейной теории; предельные значения при  $\gamma \rightarrow 1$  у них отсутствуют. Последнее объясняется тем, что спектр потенциальных решений содержит в этом случае вещественные корни  $\alpha_n$  ( $n \geq 1$ ), неограниченные вблизи  $\gamma = 1$ :

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{\gamma - 1} + O(1), \quad \gamma \rightarrow 1 + 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.7)$$

Оказывается, необходимым и достаточным условием наличия нерегулярных при  $\gamma \rightarrow 1$  потенциальных решений является выполнение в некоторой окрестности точки  $\gamma = 1$  неравенства

$$\mu > 2\gamma \quad (4.8)$$

Условие (4.8), помимо неогуковского, соблюдается, например, для материалов Муни — Ривлина [1], Клоснера — Сегала [14], Бидермана [14] и других. Наряду с решениями, порождаемыми корнями  $\alpha_n$ , для перечисленных моделей (и вообще любого материала с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом  $W$ , удовлетворяющим условию Адамара и ограничениям (4.1), (4.8)) существуют регулярные при  $\gamma \rightarrow 1$  решения, переходящие при устранении начальной деформации в соответствующие решения линейной теории плит. При нарушении (4.8) корни с асимптотическим поведением (4.7) отсутствуют и все потенциальные решения регулярны вблизи  $\gamma = 1$ . Примером служит материал Бартенева — Хазановича, подробно исследованный в данном контексте в работе [15]. То же самое относится к материалу Черных — Шубиной [1] и ряду других, удовлетворяющих неравенству

$$\mu \leq 2\gamma \quad (\gamma \rightarrow 1) \quad (4.9)$$

Строгое обоснование этих фактов требует детального исследования спектра однородных решений и здесь не приводится.

Отметим, что ограничение (4.1) гарантирует линейно-упругое поведение материала при малых деформациях из естественного, ненапряженного состояния. Вместе с тем условие Адамара допускает существование материалов с физически нелинейным поведением при малых деформациях в том смысле, что их определяющие соотношения не допускают линеаризации в точке, соответствующей ненапряженному состоянию материала. Для таких материалов предельный переход при  $\gamma \rightarrow 1$  не дает совпадения с результатами классической теории плит (и даже не всегда возможен). Указанные материалы обладают целым рядом специфических особенностей и заслуживают отдельного рассмотрения.

5. Оценка точности уравнения Сен — Венана классической теории устойчивости тонких пластинок. Полагая в (2.3):

$$\psi = -\chi + lh^2 D^2 \chi$$

$$l = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( 1 + \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{m \cos \alpha_0 \omega} \right), \quad m = (\beta_2^2 + \gamma^2) \cos \beta_2 \alpha_0 - (\beta_1^2 + \gamma^2) \cos \beta_1 \alpha_0$$

где функция  $\chi(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению (2.4), получим  $w_0 = \chi$ , т. е. прогиб срединной плоскости плиты  $w_0$ , отвечающий проникающему решению (2.3) антисимметричной задачи, обязательно удовлетворяет уравнению (2.4). При этом для перемещений  $u_i, u_2, w$  и давления  $p$  справедливы представления

$$u_i = -h\gamma\zeta \partial_i w_0 + h^3 A_0(\zeta) \partial_i D^2 w_0 \quad (i = 1, 2) \quad (5.1)$$

$$w = w_0 + h^2 B_0(\zeta) D^2 w_0, \quad p = \lambda h E_0(\zeta) D^2 w_0$$

$$A_0(\zeta) = \frac{\gamma\zeta}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_0^3} \text{Sym} \left[ \frac{1}{m} (1 + \beta_1^2) \beta_2 \cos \beta_2 \alpha_0 \sin \beta_1 \alpha_0 \zeta \right]$$

$$B_0(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_0^2} \text{Sym} \left[ \frac{1}{m} (\beta_2^2 + \gamma^2) \cos \beta_2 \alpha_0 \cos \beta_1 \alpha_0 \zeta \right]$$

$$E_0(\zeta) = \frac{1}{\alpha_0} \text{Sym} \left[ \frac{1}{m} (\beta_1^4 - 1) \beta_2 \cos \beta_2 \alpha_0 \sin \beta_1 \alpha_0 \zeta \right]$$

Если перейти в (5.1) к метрике начального деформированного состояния (т. е. к координатам  $X_k$ , см. (1.1)), то увидим, что члены низшего порядка по толщине плиты удовлетворяют кинематическим гипотезам Кирхгофа, введенным в метрике этого состояния.

Сравним теперь уравнение (2.4) с известным уравнением Сен-Венана классической теории устойчивости пластинок [6]. При действии на пластинку равномерно распределенной по боковой поверхности нормальной нагрузки интенсивности  $t$  уравнение Сен-Венана имеет вид

$$D^4 w_0 - \frac{3t}{4Gh^2} D^2 w_0 = 0 \quad (5.2)$$

где  $h$  — полутолщина,  $G$  — модуль сдвига материала,  $w_0$  — прогиб срединной плоскости. Очевидно, для сравнения (5.2) с (2.4) нужно установить связь между  $t$  и  $\alpha_0$ . Учитывая оценки (4.2), естественно считать, что для  $\epsilon$  и  $c$  при  $\gamma \rightarrow 1$  имеют место асимптотические разложения

$$\epsilon = \epsilon_2 \eta^2 + \epsilon_3 \eta^3 + \dots, \quad c = s_1 \eta + s_2 \eta^2 + \dots \quad (5.3)$$

где  $\epsilon_k$  ( $k \geq 2$ ),  $s_m$  ( $m \geq 1$ ) — некоторые постоянные. Поскольку, как нетрудно проверить, параметры  $\epsilon, c$  и  $q$  связаны тождеством

$$\epsilon = c + \lambda^2 (1 - \gamma^2) (d/d\lambda^2) \ln g \quad (5.4)$$

то из (5.3), (5.4) для  $g$  вытекает представление

$$g = G \exp(g_1 \eta + g_2 \eta^2 + \dots), \quad G = 2(c_1 + c_2 \lambda^2) |_{\lambda=1} > 0 \quad (5.5)$$

$$g_1 = -\frac{1}{3} s_1, \quad g_k = \frac{(-1)^k}{3k} \left[ s_1 + \sum_{r=2}^k (-1)^r (\epsilon_r - s_r) \right] \quad (k \geq 2)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига материала при малых деформациях из натурального состояния,  $g_k$  ( $k \geq 1$ ) — постоянные величины. С учетом (5.5) из (1.2) следует



$$\eta = -\frac{t}{G} \left[ 1 + \left( g_1 - \frac{1}{3} \right) \frac{t}{G} + O \left( \frac{t^2}{G^2} \right) \right] \quad (5.6)$$

Далее, используя (5.3), с помощью теории возмущений [13] можно получить следующее выражение для корня  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0^2 = -\frac{3}{4} \eta \left[ 1 - \frac{13}{20} \eta + O(\eta^2) \right] \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) в (5.7), приходим к искомой зависимости между  $\alpha_0$  и  $t$ :

$$\alpha_0^2 = \frac{3t}{4G} \left[ 1 + \left( g_1 + \frac{19}{60} \right) \frac{t}{G} + O \left( \frac{t^2}{G^2} \right) \right] \quad (5.8)$$

Соотношение (5.8) позволяет записать уравнение (2.4) (после замены в нем  $\psi$  на  $w_0$ ) в виде

$$D^4 w_0 - \frac{3t}{4Gh^2} D^2 w_0 = \frac{3t^2}{4G^2 h^2} \left[ g_1 + \frac{19}{60} + O \left( \frac{t}{G} \right) \right] D^2 w_0 \quad (5.9)$$

Сопоставляя (5.9) с уравнением Сен-Венана (5.2), видим, что последнее применимо только в том случае, когда величина  $t/G$  мала по сравнению с относительной толщиной плиты. Для неогукковского материала аналогичный результат установлен в [4].

6. Бифуркация равновесия круглой плиты с незакрепленным краем. В качестве примера применения построенных выше однородных решений рассмотрим задачу об осесимметричной бифуркации равновесия круглой плиты, боковая поверхность которой свободна от закреплений. Поверхностную нагрузку считаем «мертвой» [1]. Как и в п. 1, предполагается, что торцы плиты не загружены, а массовые силы отсутствуют. Радиус плиты в недеформированном состоянии обозначим через  $a$ . Для перехода в (2.3), (2.5), (2.7) к полярным координатам  $r, \varphi, z$  достаточно произвести там замены

$$u_1 \sim u, \quad u_2 \sim v, \quad \partial_1 \sim \partial_r, \quad \partial_2 \sim r^{-1} \partial_\varphi \quad (6.1)$$

где  $u, v$  — соответственно радиальное и дуговое перемещения,  $\partial_r, \partial_\varphi$  — операторы дифференцирования по  $r, \varphi$ . Вследствие осевой симметрии общие решения уравнений (2.4), (2.8), (2.6), ограниченные при  $r=0$ , имеют вид

$$\psi = \frac{1}{a} \left[ A_0 J_0(k_0 \xi) + A_* \right], \quad C_q = \frac{1}{a} A_q J_0(k_q \xi) \quad (6.2)$$

$$B_m = H_m J_0(l_m \xi)$$

$$k_q = i\alpha_q / \tau \quad (q \geq 0), \quad l_m = i\alpha_m / (\omega\tau) \quad (m \geq 1) \quad (6.3)$$

$$\xi = r/a, \quad \tau = h/a$$

Здесь  $J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка [16];  $A_0, A_*, A_q$  ( $q \geq 1$ ),  $H_m$  ( $m \geq 1$ ) — произвольные постоянные. Внося (6.2) в (2.3), (2.5), (2.7) (где предварительно сделана замена (6.1)), представим перемещения  $u, v, w$  и давление  $p$  в виде суммы однородных решений

$$u = -\alpha \sum_{q=0}^{\infty} k_q A_q T_q(\zeta) J_1(k_q \xi), \quad v = -\alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} l_m H_m F_m(\zeta) J_1(l_m \xi) \quad (6.4)$$

$$w = a \sum_{q=0}^{\infty} A_q M_q(\zeta) J_0(k_q \xi), \quad p = \tau^{-1} \lambda \sum_{q=0}^{\infty} A_q N_q(\zeta) J_0(k_q \xi)$$

Функции  $T_0(\zeta)$ ,  $M_0(\zeta)$ ,  $N_0(\zeta)$  в (6.4) получаются из  $T_q(\zeta)$ ,  $M_q(\zeta)$ ,  $N_q(\zeta)$  соответственной заменой  $\alpha_q \sim \alpha_0$ . Через  $J_1$  обозначена функция Бесселя первого рода первого порядка [16].

Выражения для компонент линеаризованного тензора напряжений Пиолы в цилиндрической системе координат получаются из (1.4). В дальнейшем нам понадобятся только  $P_{rr}$ ,  $P_{r\varphi}$  и  $P_{rz}$ :

$$P_{rr}/g = (1 + \gamma^2) \partial_r \mu + P \lambda^{-1} - 2cr^{-1} (\partial_\varphi v + u) \quad (6.5)$$

$$P_{r\varphi}/g = (1 + c) \partial_r v + (\gamma^2 + c) r^{-1} (\partial_\varphi u - v)$$

$$P_{rz}/g = \partial_r w + \gamma u'$$

С учетом (6.4) из (6.5) находим  $\Theta \equiv 1 + \gamma^2 + 2c$

$$\frac{1}{g} P_{rr} = \tau^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \left[ R_q(\zeta) J_0(k_q \xi) - \Theta \alpha_q^2 T_q(\zeta) \frac{J_1(k_q \xi)}{k_q \xi} \right]$$

$$\frac{1}{g} P_{r\varphi} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 H_m F_m(\zeta) \left[ \omega^2 J_0(l_m \xi) - \Theta \frac{J_1(l_m \xi)}{l_m \xi} \right] \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{g} P_{rz} = - \sum_{q=0}^{\infty} k_q A_q S_q(\zeta) J_1(k_q \xi)$$

$$R_q = (1 + \gamma^2) \alpha_q^2 T_q + N_q, \quad S_q = M_q + \gamma dT_q/d\zeta$$

Граничные условия на боковой поверхности плиты  $\sigma$  в случае мертвой нагрузки имеют вид

$$P_{rr} |_{\sigma} = 0, \quad P_{r\varphi} |_{\sigma} = 0, \quad P_{rz} |_{\sigma} = 0 \quad (6.7)$$

Удовлетворим условиям (6.7) с помощью вариационного принципа теории наложения малой деформации на конечную, предложенного в [7]. После необходимых преобразований, учитывая (1.5), приходим к вариационному уравнению

$$\iint_{\sigma} (P_{rr} \delta u + P_{r\varphi} \delta v + P_{rz} \delta w) d\sigma = 0 \quad (6.8)$$

Если в (6.8) подставить выражения (6.6), (6.4) и приравнять нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta A_q$  ( $q \geq 0$ ),  $\delta H_m$  ( $m \geq 1$ ), то получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_q$  ( $q \geq 0$ ),  $H_m$  ( $m \geq 1$ ):

$$\sum_{q=0}^{\infty} L_{pq} A_q = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.9)$$

$$l_k^N J_1(l_k) H_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.10)$$

$$L_{pq} = n_{pq} \alpha_q^2 \frac{J_1 k_q}{k_q} J_0(k_p) + l_{pq} \alpha_p^2 \frac{J_1(k_p)}{k_p} J_0(k_q) - \theta \alpha_p^2 \alpha_q^2 m_{pq} \frac{J_1(k_p)}{k_p} \frac{J_1(k_q)}{k_q} \quad (p, q \geq 0) \quad (6.11)$$

$$v_k = \omega^2 J_0(l_k) - \theta J_1(l_k)/l_k \quad (k \geq 1)$$

$$l_{pq} = \langle T_p, R_q \rangle, \quad n_{pq} = \langle M_p, S_q \rangle, \quad m_{pq} = \langle T_p, T_q \rangle$$

$$\langle f_1(\zeta), f_2(\zeta) \rangle \equiv \int_{-1}^{+1} f_1(\zeta) f_2(\zeta) d\zeta$$

Из (6.9), (6.10) видно, что бесконечная система распадается на две независимых подсистемы, одна из которых содержит только  $A_q$  ( $q \geq 0$ ), а другая — только  $H_m$  ( $m \geq 1$ ), причем матрица последней имеет диагональный вид. Поскольку, в силу (6.4), постоянным  $H_m$  отвечает вектор перемещения, не изменяющий внешней формы плиты (так как  $u = w = 0$ ), то подсистема (6.10) определяет критические параметры крутильной потери устойчивости. Подсистема (6.9) соответствует случаю изгибной неустойчивости, при которой имеет место прогиб срединной плоскости.

Система (6.9), (6.10) существенно нелинейно зависит от параметра начальной деформации  $\gamma$ , причем не только явно, но и неявно — посредством корней характеристического уравнения (2.1). Таким образом, задача устойчивости сведена к обобщенной задаче на собственные значения для бесконечной системы (6.9), (6.10).

Анализ подсистемы (6.10) (в предположении, что потенциал  $W$  удовлетворяет условию Адамара) свидетельствует о том, что при растяжении плиты ( $\gamma < 1$ ) она имеет только тривиальное решение  $H_k = 0$  ( $k \geq 1$ ), т. е. крутильная потеря устойчивости при этом невозможна. Что касается случая сжатия, то оказывается, что для всякого значения относительной толщины  $\tau$  существует счетный набор собственных значений  $\gamma_k(\tau)$  ( $k \geq 1$ ), причем справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\gamma_k(\tau) = 1 + \sigma_k^2/8\tau^2 + O(1/\tau^4) \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (6.12)$$

$$\gamma_k(\tau) = \sqrt{\frac{\sigma_k}{\tau}} \left[ 1 - \frac{1}{4\sigma_k} \tau + O(\tau^2) \right] \quad (\tau \rightarrow 0, \quad W = W(I_1)) \quad (6.13)$$

$$\gamma_k(\tau) = \frac{\sigma_k}{\alpha \tau} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\sigma_k^2 (\alpha^2 - 3)} \tau^2 + O(\tau^4) \right], \quad \alpha = 2.172472 \quad (6.14)$$

$$(\tau \rightarrow 0, \quad W = W(I_2))$$

Первая из них относится к общему случаю  $W = W(I_1, I_2)$  (при условии, что для  $s$  имеет место разложение (5.5)), а вторая и третья получены для потенциалов частного типа  $W = W(I_1)$  и  $W = W(I_2)$ . Из (6.12) — (6.14) видим, что при  $\tau \rightarrow 0$   $\gamma_k(\tau) \rightarrow \infty$ , тогда как при  $\tau \rightarrow \infty$   $\gamma_k(\tau) \rightarrow 1$ , т. е. для толстых плит крутильная неустойчивость возникает при малых деформациях, а для тонких — при больших.

Заметим, что существование крутильной формы неустойчивости кругового цилиндра, сжатого по боковой поверхности, обусловлено предположением о мертвом характере приложенного давления.

Перейдем теперь к исследованию подсистемы (6.9). Можно показать, что

$\tau$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\gamma_*$	1,032	1,137	1,331	1,507	1,546	1,561	1,569	1,575	1,581	1,587
$ t_* /G$	0,063	0,263	0,602	0,885	0,945	0,967	0,979	0,989	0,998	1,006

$n_{pq} = L_{pq}$  ( $p \neq q$ ;  $p, q \geq 0$ ), т. е. по (6.11) матрица  $L_{pq}$  симметрична. Это вытекает из соотношения взаимности линейризованной теории упругости [7]. Определение собственных значений спектральной задачи (6.9) осуществлялось численными методами на примере материала Бартенева — Хазановича [1], которому соответствует потенциал

$$W = 2G(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \quad (6.15)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига материала,  $\delta_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) — главные относительные удлинения [1, 2]. Входящие в (2.1), (1.2), (1.3) параметры определяются при этом соотношениями

$$\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\gamma}, \quad \mu = 2\gamma, \quad \varepsilon = -(\gamma - 1)^2$$

$$c = \frac{1}{2}(\gamma - 1), \quad \omega^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1), \quad \delta = -(\gamma^{-1} - 1)^2 \quad (6.16)$$

$$S_1 = \gamma(\gamma + 1)(\gamma - 3), \quad S_2 = \gamma(\gamma + 1)^2, \quad g = \frac{2G}{\lambda(\gamma + 1)}$$

а закон деформирования (1.2) и уравнение (2.1) принимают соответственно вид

$$t = 2G(\lambda - \lambda^{-2}) \quad (6.17)$$

$$\alpha^2 \cos\left(\alpha \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}\right) \left[ \frac{\sin 2\sqrt{\gamma}\alpha}{2\sqrt{\gamma}\alpha} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 3} \right] = 0 \quad (6.18)$$

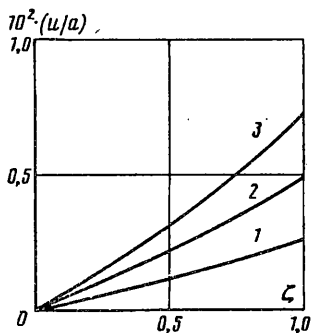
Корни уравнения (6.18) вычислялись методом Ньютона, причем начальные приближения выбирались в соответствии с асимптотической формулой

$$\alpha_q = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{ \pi q + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} i \ln \left[ (4q + 1) \pi \frac{1 + \gamma}{3 - \gamma} \right] + O\left(\frac{\ln q}{q}\right) \right\} \quad (q \rightarrow \infty)$$

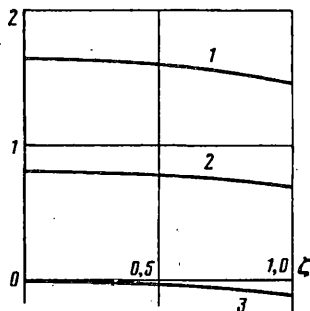
дающей хорошую точность, начиная с  $q = 1$ . Чисто мнимый (при  $\gamma > 1$ ) корень  $\alpha_0$  определялся отдельно.

Опуская доказательство, отметим, что при растяжении плиты ( $\gamma < 1$ ) система (6.9) (применительно к материалу (6.15)) имеет только тривиальное решение  $A_q = 0$  ( $q \geq 0$ ), т. е. равновесное состояние плиты устойчиво. Поэтому можно ограничиться исследованием системы (6.9) при  $\gamma > 1$  (случай сжатия).

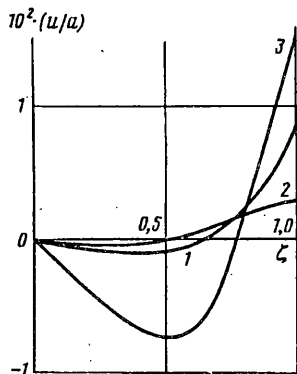
Расчет наименьших величин критических параметров  $\gamma_*$  и  $t_*$  был выполнен для десяти значений относительной толщины  $\tau$  (от  $\tau = 0,1$  до  $\tau = 1,0$  с шагом 0,1). При абсолютной погрешности в вычислении  $\gamma_*$ , составляющей  $10^{-3}$  (что соответствует относительной погрешности менее 0,1%), максимальное количество привлекаемых погранслоев не превышало 27. Найденные значения  $\gamma_*$  и  $|t_*|$  приводятся в табл. 1. Из нее видно, что на рассматриваемом участке изменения  $\tau$   $\gamma_*$  и  $|t_*|$  монотонно возрастают с увеличением  $\tau$ . Что касается форм потери устойчивости, то анализ численных результатов позволяет сделать следующие



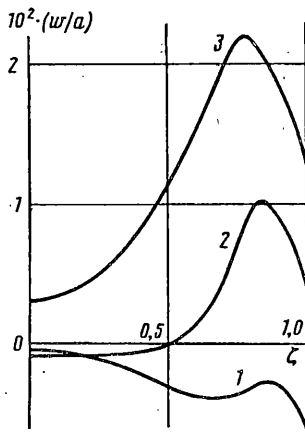
Фиг. 1



Фиг. 2



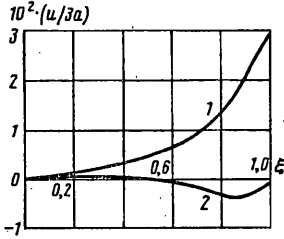
Фиг. 3



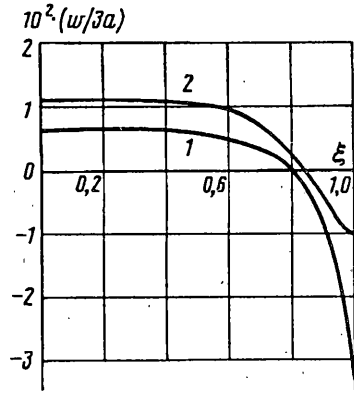
Фиг. 4

выводы. Если  $\tau$  не превосходит 0,3, то закон распределения радиальных смещений очень близок к линейному (фиг. 1), а прогиб  $w$  меняется по толщине незначительно (фиг. 2). Кривые 1, 2, 3 фигуры 1 (2) отвечают значениям  $\xi = 0,2$  (0,6);  $\xi = 0,4$  (0,8),  $\xi = 1,0$  (1,0) соответственно, причем во всех случаях  $\tau = 0,2$ . Для других значений  $\xi$  поведение  $u$  и  $w$  аналогичное. Погранслои здесь оказывают слабое влияние как на величину критической нагрузки, так и на форму потери устойчивости. Поэтому для плит умеренной толщины ( $\tau \leq 0,3$ ) при исследовании выпучивания достаточно учитывать только проникающее решение (2.3). Погрешность в определении  $\gamma_*$  на основе одного лишь проникающего решения составляет, например, 0,05% для  $\tau = 0,2$  и 0,9% для  $\tau = 0,3$ . В то же время обычная теория устойчивости пластин, основанная на уравнении Сен-Венана, дает для  $\gamma_*$  погрешность 1% при  $\tau = 0,2$  и погрешность 3,7% при  $\tau = 0,3$ . Заметим еще, что в некоторых случаях крайевым условиям на боковой поверхности можно точно удовлетворить при помощи только проникающего решения. Примером может служить задача об устойчивости круглого цилиндра, боковая поверхность которого находится в условиях «скользящей заделки». Точное решение указанной задачи для неогукковского материала найдено в [11].

С ростом  $\tau$  распределение радиальных смещений по толщине плиты становится существенно отличным от линейного (фиг. 3), даже если ограничиться только проникающим решением (кривая 1). Кривые 1, 2 фигуры 3 отвечают значениям параметров  $\tau = 0,6$ ,  $\xi = 0,2$ ,  $N = 15$  соответственно, а кривая 3 — значениям  $\tau = 0,8$ ,  $\xi = 0,6$ ,  $N = 15$  ( $N$  — количество используемых погранслоев). Вместе с



Фиг. 5



Фиг. 6

тем, в окрестности торцов и срединной плоскости имеются участки, близкие к линейным, но угловые коэффициенты в этих слоях различны. Прогиб  $w$  резко меняется по толщине плиты (фиг. 4: кривая 1 —  $\tau = 0,6$ ;  $\xi = 0,9$ ;  $N = 15$ ; кривая 2 —  $\tau = 0,8$ ;  $\xi = 0,8$ ;  $N = 15$ ; кривая 3 —  $\tau = 0,8$ ;  $\xi = 0,6$ ;  $N = 15$ ). Погранслои весьма существенно влияют и на форму выпучивания, и на величину критической нагрузки (или деформации). Например, при  $\tau = 1,0$  для вычисления  $\gamma_*$  с точностью 2% требуется учитывать не менее 19 погранслойных решений.

Зависимости перемещения  $u$  и прогиба  $w$  от радиальной координаты  $\xi$  для  $\tau = 1,0$  представлены на фиг. 5, 6 соответственно (в обоих случаях кривая 1 отвечает значениям  $\zeta = 1,0$ ;  $N = 15$ , кривая 2 — значениям  $\zeta = 0,8$ ,  $N = 15$ ). Фигуры 5, 6 свидетельствуют о том, что в центральной части плиты прогиб  $w$  почти постоянен, а радиальное смещение  $u$  изменяется по линейному закону. Следовательно, при выпучивании плиты этот участок ведет себя подобно абсолютно жесткому включению. В то же время вблизи боковой поверхности  $\sigma$  наблюдается резкое увеличение как прогиба  $w$ , так и радиального перемещения  $u$ . Таким образом, для толстых плит с незакрепленным краем картина потери устойчивости напоминает явление краевого резонанса в динамике плит, когда происходит локализация области интенсивных колебаний вблизи боковой поверхности [9].

Кроме численного исследования системы (6.9), проводился ее асимптотический анализ при  $\tau \rightarrow 0$  методом, предложенным в [8]. В результате получены следующие разложения критических значений параметров  $\gamma, t$ :

$$\gamma_* = 1 + \gamma_1 \tau^2 + \gamma_3 \tau^4 + \gamma_4 \tau^5 + O(\tau^6) \quad (6.19)$$

$$\gamma_1 = 2/3x_k^2, \quad \gamma_3 = 4/5\gamma_1^2, \quad \gamma_4 = -4\gamma_1^3 s_* / (2\gamma_1 - 1)$$

$$s_* = 0,0762, \quad J_0(x_k) - J_1(x_k)/2x_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$|t_*|/G = 2\gamma_1 \tau^2 + 14/15\gamma_1^2 \tau^4 + 2\gamma_4 \tau^5 + O(\tau^6) \quad (6.20)$$

Можно проверить, что старший член в (6.20) совпадает с величиной критической нагрузки для пластинки со свободным от закрепления краем, вычисленной по двумерной теории устойчивости пластинок, основанной на уравнении Сен-Венана [6]. Следовательно, эта теория является асимптотически точной. Аналогичный результат для неогукковского материала получен в [8] для плиты произвольной в плане формы.

Из (6.20) видно, что при малых  $\tau$  двумерная теория дает заниженное значение для  $|t_*|$ . Этот факт отражает специфику выбранной для исследования модели

Таблица 2

$\tau$	$\gamma_*$			$ t_* /G$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0,1	1,031	1,032	1,032	0,063	0,063	0,063
0,2	1,125	1,138	1,136	0,250	0,265	0,264
0,3	1,282	1,345	1,340	0,563	0,637	0,628
0,4	1,500	1,701	1,682	1,001	1,234	1,198
0,5	1,782	2,271	2,215	1,564	2,134	2,023
0,6	2,126	3,140	3,002	2,252	3,435	3,159
0,7	2,532	4,411	4,113	3,065	5,257	4,660
0,8	3,002	6,206	5,625	4,003	7,742	6,579
0,9	3,533	8,666	7,619	5,006	11,055	8,960
1,0	4,127	11,951	10,177	6,255	15,383	11,835

Таблица 3

$\tau$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\gamma_*$	4,861	3,052	2,341	1,956	1,717	1,557	1,444	1,362	1,300	1,252

(6.15), так как существуют материалы, для которых имеет место обратное. Таков, например, материал Муни-Ривлина [1] с потенциалом

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3), \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

при условии  $c_2 > 2c_1$  (доказательство опускается).

Для первой критической силы и наименьшего критического значения параметра  $\gamma$  из (6.19), (6.20) получаются следующие представления:

$$|t_{*1}|/G = 6,255\tau^2 + 9,128\tau^4 - 3,548\tau^5 + O(\tau^6) \quad (6.21)$$

$$\gamma_{*1} = 1 + 3,127\tau^2 + 7,824\tau^4 - 1,774\tau^5 + O(\tau^6) \quad (6.22)$$

Значения  $|t_{*1}|/G$  и  $\gamma_{*1}$ , вычисленные согласно (6.21), (6.22) с удержанием соответственно одного ( $n=1$ ), двух ( $n=2$ ) и трех ( $n=3$ ) членов, сведены в табл. 2. Сравнение с результатами численного расчета (табл. 1) свидетельствует о том, что асимптотический метод дает приемлемые результаты для относительных толщин  $\tau$ , не превосходящих 0,4. При  $\tau=0,3$  погрешность формулы (6.22) при последовательном сохранении в ней одного, двух и трех членов составляет соответственно 3,7; 1,1; 0,7%, а при  $\tau=0,4$  — 0,5%; 13%; 12%. Нарастание погрешности при добавлении последующих членов асимптотики говорит о том, что при  $\tau > 0,4$  асимптотический метод уже не работает, и поэтому он непригоден для исследования устойчивости, например, «кубообразных» плит ( $\tau \sim 1$ ). Сужение области применимости асимптотического метода по сравнению с линейной теорией [3, 10] объясняется неравномерностью возмущения спектра однородных решений в окрестности неискаженного состояния.

Результаты расчета критической деформации для крутильной формы потери устойчивости приведены в табл. 3. Сравнение с табл. 1 показывает, что при  $\tau < 0,6$  раньше наступает изгибная неустойчивость, а при  $\tau \geq 0,6$  — крутильная. Асимптотическая формула для  $\gamma_k(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  в случае материала Бартенева — Хазановича имеет вид

$$\gamma_k(\tau) = \alpha_k \tau^{-2/3} - 1/6 + 17/72 \alpha_k^{-1} \tau^{2/3} + O(\tau^{4/3}) \quad (6.23)$$

$$\kappa_k = (\sigma_k^2/2)^{1/3}, \quad \sigma_k = 1/2\pi (2k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Из (6.13), (6.14) и (6.23) вытекает, что порядок роста критической деформации  $\gamma_k(\tau)$ , соответствующей крутильной неустойчивости, по параметру  $\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$  зависит от свойств материала.

Что касается форм потери устойчивости, симметричных относительно срединной плоскости, то для плиты любой толщины они возникают при большей нагрузке, чем антисимметричные формы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины//ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057—1074.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
5. Зубов Л. М., Рудев А. Н. Однородные решения для предварительно напряженной упругой плиты//ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 920—929.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 532 с.
7. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848—852.
8. Рудев А. Н. Асимптотическая теория выпучивания упругих плит при боковом сжатии//ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 882—891.
9. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
10. Ворович И. И., Малкина О. С. О точности асимптотических разложений решения задач теории упругости для толстой плиты//Инжен. журн. МГТ. 1967. № 5. С. 92—102.
11. Зубов Л. М. Выпучивание пластинок из неогукковского материала при аффинной начальной деформации//ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632—642.
12. Гурвич Е. Л., Лурье А. И. К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (эффективная проверка условия Адамара)//Изв. АН СССР. МГТ. 1980. № 6. С. 110—116.
13. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
14. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1978. 464 с.
15. Рудев А. Н. Однородные решения для упругой плиты при аффинной начальной деформации//ВИНИТИ, № 3937-80 ДЕП. 31 с.
16. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука. 1978. 319 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
12.VIII.1991