

УДК 539.3

© 1993 г. И. А. ГУЗЬ

ВНУТРЕННЯЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОГО МАССИВА С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ

Явление внутренней неустойчивости (критический параметр нагружения определяется структурой материала, а не размерами или формой образца или способом его закрепления) слоистых композитных материалов рассмотрено в [1—3]. С привлечением основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел [4] в [3] доказано, что при соответствующей замене параметров волнообразования характеристические определители для пространственной неосесимметричной и осесимметричной задач устойчивости слоистых композитов с металлической матрицей совпадают. Конкретные числовые результаты для композитов со сжимаемым упругим наполнителем и несжимаемой упругопластической матрицей (что соответствует модели, принятой в [3]) приведены в [5]. При этом во всех работах [1—5] считалось, что на границе раздела слоев наполнителя и связующего (матрицы) выполняется условие полного контакта (жесткого сцепления, идеального контакта). В реальном же композитном материале между слоями всегда имеются дефекты, вызванные технологией изготовления или условиями эксплуатации, например, разного рода трещины, непроклеи и т. п. Критические параметры нагружения, полученные при предположении о полном контакте слоев [5], могут считаться верхней границей для критического параметра нагружения в случае наличия дефектов (трещин, непроклеев и т. п.) между слоями. Для определения нижней границы критического параметра нагружения можно рассмотреть бесконечный слоистый массив с теми же толщинами слоев, но при отсутствии связи между слоями, т. е. при выполнении условий полного скольжения на границе раздела свойств. Критические параметры нагружения для реальных композитов с трещинами или непроклеями между слоями будут лежать между установленными таким образом верхней и нижней границами. В настоящей статье, с целью получения нижней границы критических параметров нагружения для композитов с металлической матрицей при наличии трещин или непроклеев между слоями, рассматривается пространственная неосесимметричная задача устойчивости слоистого массива с проскальзывающими без трения наполнителем и связующим, модели которых соответствуют принятым в [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим устойчивость бесконечного массива, состоящего из чередующихся слоев наполнителя (толщиной $2h_a$) и связующего (толщиной $2h_m$) при равномерном двухосном сжатии «мертвыми» нагрузками в плоскости слоев. Здесь и далее все величины, соответствующие наполнителю, будем обозначать индексом a , связующему — индексом m . Введем в недеформированном состоянии лагранжу систему координат для каждого слоя так, что ось $Ox_{3(j)}$ направлена перпендикулярно границам слоев, которые параллельны между собой, а оси $Ox_{1(j)}$ и $Ox_{2(j)}$ лежат в срединной плоскости слоя. (Индекс (j) внизу — номер пары слоев). Наполнитель моделируется сжимаемым трансверсально-изотропным нелинейно-упругим телом, связующее (матрица) — несжимаемым трансверсально-изотропным упругопластическим телом со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций; оси изотропии слоев совпадают с осью $Ox_{3(j)}$. На границах слоев выполняются условия скольжения без трения. Исследование проведем в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел для однородных докритических состояний [4]. При действии мертвых нагрузок можно применять статический метод исследования статических

задач указанной теории. В случае упругопластического деформирования применяется концепция продолжающегося нагружения, что дает возможность не учитывать изменение зон разгрузки при потере устойчивости [4].

При принятой постановке компоненты несимметричного тензора напряжений Кирхгофа t и вектора перемещений u выражаются через функции Ψ и X [1, 3], уравнения для которых имеют вид

$$\begin{aligned} (\Delta_1 + \xi_1^a \partial^2 / \partial x_3^2) \Psi^a &= 0, \quad \Delta_1 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 \\ (\Delta_1 + \xi_2^a \partial^2 / \partial x_3^2) (\Delta_1 + \xi_3^a \partial^2 / \partial x_3^2) X^a &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_1 + \xi_1^m \partial^2 / \partial x_3^2) \Psi^m &= 0 \\ (\Delta_1 + \xi_2^m \partial^2 / \partial x_3^2) (\Delta_1 + \xi_3^m \partial^2 / \partial x_3^2) X^m &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

причем параметры $\xi_1^a, \xi_2^a, \xi_3^a, i = 1, 2, 3$ являются действительными положительными, а параметры ξ_2^m и ξ_3^m — комплексносопряженными для рассматриваемых моделей слоев [1, 3], что необходимо учитывать при построении решений. Условия на границе раздела сред при скольжении без трения для компонентов тензора t и вектора u следующие

$$t_{3i}^a |_{x_{3(0)}=h_a} = 0, \quad t_{3i}^m |_{x_{3(0)}=-h_m} = 0 \quad (1.3)$$

$$t_{33}^a |_{x_{3(0)}=h_a} = t_{33}^m |_{x_{3(0)}=-h_m}, \quad u_3^a |_{x_{3(0)}=h_a} = u_3^m |_{x_{3(0)}=-h_m}$$

Как и в [3], решения основных уравнений (1.1) и (1.2) будем строить для четырех периодических вдоль осей OX_1, OX_2 и OX_3 форм потери устойчивости, причем период вдоль оси OX_3 является кратным периоду структуры $2(h_a + h_m)$, что соответствует физическим соображениям. Нумерация форм потери устойчивости и условия симметрии для них приведены в [1]. Этими четырьмя исчерпываются все формы потери устойчивости, имеющие вдоль оси OX_3 период, равный одному периоду структуры (формы потери устойчивости первого и третьего рода) или двум периодам структуры (формы потери устойчивости второго и четвертого рода). Аналогичным образом можно исследовать формы потери устойчивости с периодом вдоль оси OX_3 равным трем, четырем и т. д. периодам структуры, но они не приводят к критическим параметрам нагружения, меньшим, чем при четырех рассматриваемых формах потери устойчивости.

2. Построение решений. С учетом условий симметрии для форм потери устойчивости [1], решения уравнений (1.1) и (1.2) можно записать, аналогично [3], в следующем виде.

Для формы потери устойчивости первого рода:

$$\begin{aligned} X_{(0)}^a &= \chi^a(x_{3(0)}^a) = (A_a \operatorname{ch} b_2^a x_{3(0)}^a + B_a \operatorname{ch} b_3^a x_{3(0)}^a) \sin \varphi_1 x_1 \sin \varphi_2 x_2 \\ \Psi_{(0)}^a &= \psi(x_{3(0)}^a, C_a, b_1^a) = C_a \operatorname{sh} b_1^a x_{3(0)}^a \cos \varphi_1 x_1 \cos \varphi_2 x_2 \\ X_{(0)}^m &= \chi^m(x_{3(0)}^m, \cos, \sin) = (A_m \operatorname{ch} b_2^m x_{3(0)}^m \cos b_3^m x_{3(0)}^m + \\ &+ B_m \operatorname{sh} b_2^m x_{3(0)}^m \sin b_3^m x_{3(0)}^m) \sin \varphi_1 x_1 \sin \varphi_2 x_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Psi_{(0)}^m = \psi(x_{3(0)}^m, C_m, b_1^m)$$

Для формы потери устойчивости второго рода:

$$\begin{aligned} X_{(0)}^a &= \chi^a(x_{3(0)}^a), \quad \Psi_{(0)}^a = \psi(x_{3(0)}^a, C_a, b_1^a) \\ X_{(0)}^m &= \chi(x_{3(0)}^m, \sin, \cos), \quad \Psi_{(0)}^m = \psi(x_{3(0)}^m, C_m, b_1^m) \end{aligned}$$

$$X_{(j+1)}^a = -\chi^a(x_{3(j+1)}^a), \quad \Psi_{(j+1)}^a = -\psi(x_{3(j+1)}^a, C_a, b_1^a) \quad (2.2)$$

$$X_{(j+1)}^m = -\chi^m(x_{3(j+1)}^m, \sin, \cos), \quad \Psi_{(j+1)}^m = -\psi(x_{3(j+1)}^m, C_m, b_1^m)$$

$$b_1^a = \varphi/\xi_1^a, \quad i = 1, 2, 3, \quad b_1^m = \varphi/\xi_1^m, \quad b_2^m = \varphi/|\xi_2^m|^2 \operatorname{Re} \xi_2^m$$

$$b_3^m = \varphi/|\xi_2^m|^2 \operatorname{Im} \xi_2^m, \quad \varphi_n = \pi/l_n, \quad n = 1, 2, \quad \varphi = \pi \sqrt{l_1^{-2} + l_2^{-2}}$$

Для формы потери устойчивости третьего рода решения уравнений (1.1) и (1.2) представляем в виде (2.1) при обозначениях (2.3); если в функциях $X_{(j)}^a$, $\Psi_{(j)}^a$, $\Psi_{(j)}^m$ поменять местами символы ch и sh , а в $X_{(j)}^m$ — символы \cos и \sin , если их аргумент зависит от x_3^m . Чтобы получить решения уравнений (1.1) и (1.2) для формы потери устойчивости четвертого рода, необходимо произвести указанные замены в (2.2). Коэффициенты $A_a, B_a, C_a, A_m, B_m, C_m$, входящие в построенные решения уравнений (1.1) и (1.2), являются неизвестными постоянными. После подстановки решений в формулы для t и u [3], затем в граничные условия (1.3) (причем граничным условиям, в силу периодичности построенных решений и условий симметрии для форм потери устойчивости, необходимо удовлетворять только на одной границе раздела сред) получим систему однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно $A_a, B_a, C_a, A_m, B_m, C_m$. Из условия существования ненулевых решений такой системы, ее определитель

$$\det \|\gamma_{rs}\| = 0, \quad r, s = 1, \dots, 6 \quad (2.4)$$

После ряда преобразований уравнение (2.4) можно привести к виду

$$\det \|\gamma_{rs}\| \equiv -[(\varphi_1 \varphi_2 \xi_1^a \xi_1^m)^{-1} \sqrt{l_1^{-2} + l_2^{-2}} \omega_{3113} / (\omega_{1133} + \omega_{1313}) x_{3113} \operatorname{ch}(\alpha_a/\xi_1^a) \operatorname{ch}(\alpha_m/\xi_1^m)] \det \|\gamma'_{pq}\| = 0; \quad p, q = 1, \dots, 4 \quad (2.5)$$

В (2.5) введены обозначения для параметров волнообразования (с учетом (2.3)):

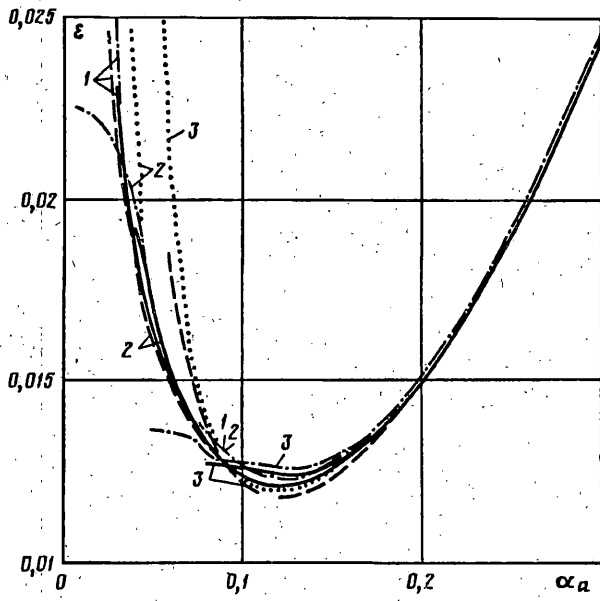
$$\alpha_a = \varphi h_a, \quad \alpha_m = \varphi h_m \quad (2.6)$$

Формулы для компонентов тензоров ω и χ приведены в [4]. Проанализируем уравнение (2.5). Т. к. исследуется внутренняя устойчивость слоистого массива, то корни уравнения (2.5), соответствующие рассматриваемому явлению, должны зависеть от величины, характеризующей внутреннюю структуру массива. Выражение в квадратных скобках таких корней не дает. Следовательно, решение характеристического уравнения (2.4) сводится к решению уравнения

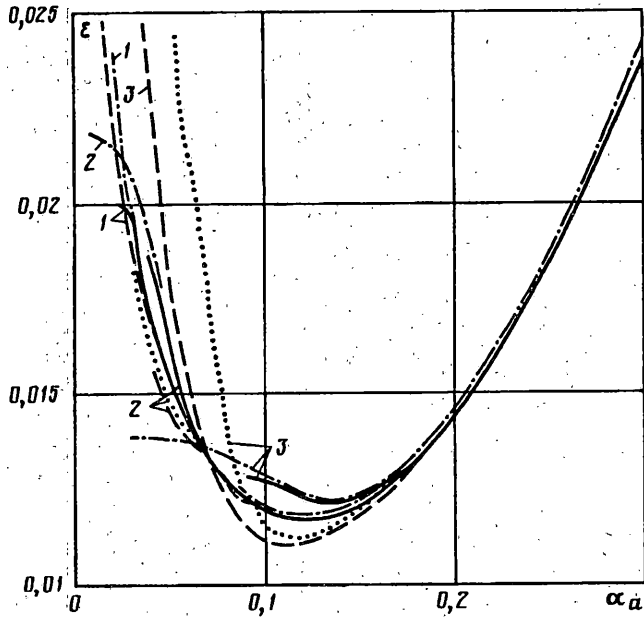
$$\det \|\gamma'_{pq}\| = 0, \quad p, q = 1, \dots, 4 \quad (2.7)$$

где элементы γ'_{pq} имеют вид (с учетом 2.3), (2.6)):

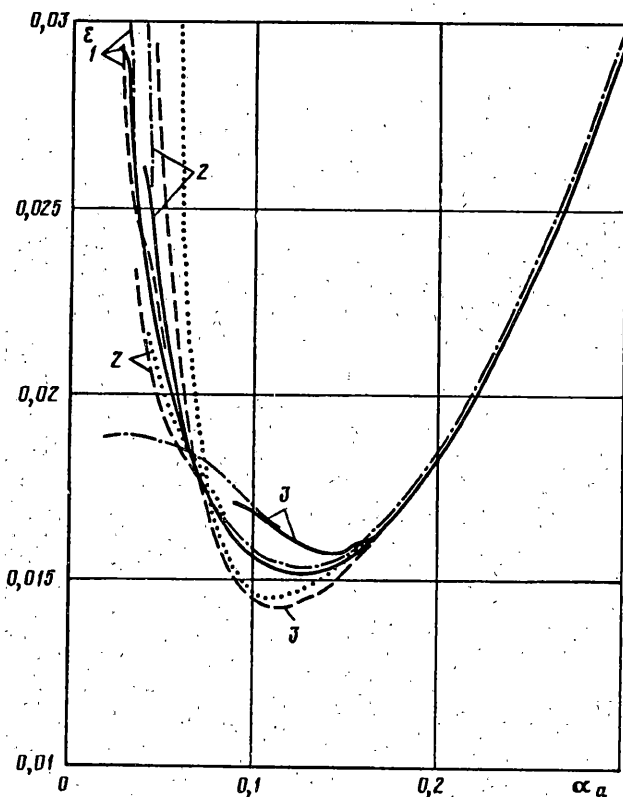
$$\begin{aligned} \gamma'_{11} &= (\omega_{3113} \omega_{1133} / \xi_{i+1}^a + \omega_{1111} \omega_{1313}) \operatorname{ch}(\alpha_a / \xi_{i+1}^a), \quad \gamma'_{31} = 0 \\ \gamma'_{21} &= (\omega_{3333} \omega_{3113} / \xi_{i+1}^a - \omega_{1111} \omega_{3333} + \omega_{1133}^2 + \omega_{1133} \omega_{1313}) / \xi_{i+1}^a \operatorname{sh}(\alpha_a / \xi_{i+1}^a), \\ \gamma'_{41} &= (\omega_{3113} / \xi_{i+1}^a - \omega_{1111}) \operatorname{ch}(\alpha_a / \xi_{i+1}^a) \\ \gamma'_{23}(\operatorname{ch}, \cos, \operatorname{sh}, \sin) &= R [\chi_{3113} (R^2 - 3M^2) - \chi_{1111} - \chi_{3333} + \chi_{1313} + \chi_{1133}] \times \\ &\times \operatorname{sh}(\alpha_m R) \cos(\alpha_m M) - M [\chi_{3113} (3R^2 - M^2) - \chi_{1111} - \chi_{3333} + \\ &+ \chi_{1313} + 2\chi_{1133}] \operatorname{ch}(\alpha_m R) \sin(\alpha_m M), \quad \gamma'_{33}(\operatorname{ch}, \cos, \operatorname{sh}, \sin) = \end{aligned} \quad (2.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$= - [\kappa_{3113} (R^2 - M^2) + \kappa_{1313}] \operatorname{ch}(\alpha_m R) \cos(\alpha_m M) + 2\kappa_{1313} R M \operatorname{sh}(\alpha_m R) \cos(\alpha_m M),$$

$$\gamma_{43}' (\operatorname{ch}, \cos, \operatorname{sh}, \sin) = \operatorname{ch}(\alpha_m R) \cos(\alpha_m M)$$

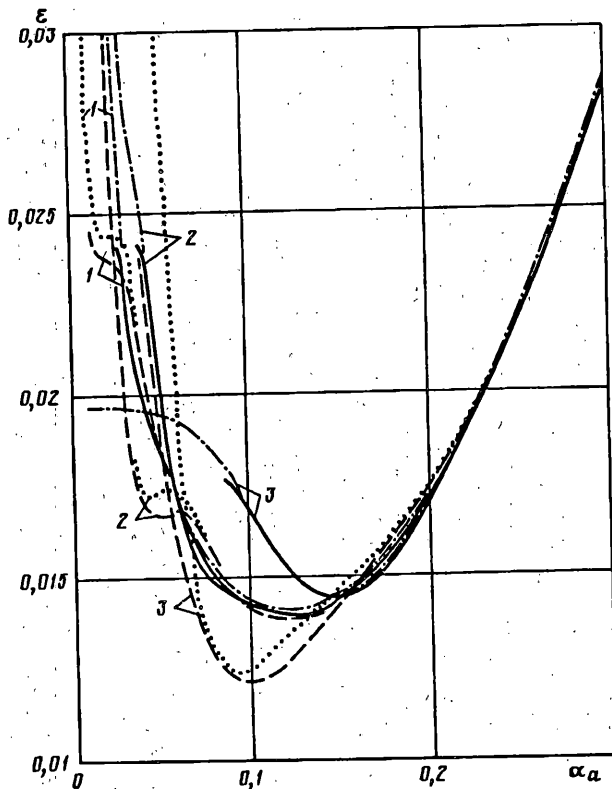
$$\gamma_{n4}' = \gamma_{n3}' (\operatorname{sh}, \sin, \operatorname{ch}, -\cos), \quad \gamma_{13}' = 0, \quad \gamma_{14}' = 0; \quad i = 1, 2; \quad n = 2, 3, 4$$

$$R = |\xi_2^m|^{-2} \operatorname{Re} \xi_2^m, \quad M = |\xi_2^m|^{-2} \operatorname{Im} \xi_2^m$$

Отметим, что формулы (2.5) и (2.8) приведены для формы потери устойчивости первого рода. Для других рассматриваемых форм потери устойчивости необходимо учесть замены, указанные после (2.3), что не меняет сделанных выводов.

Уравнение (2.7) при обозначениях (2.8) дает возможность определить критические параметры нагружения в случае пространственной неосесимметричной задачи. Аналогичным образом можно построить характеристический определитель для плоской задачи устойчивости слоистого массива. При сравнении его вида с (2.7), можно заметить, что в случае замены в (2.8) параметров $1/\xi_i^a$ и $\xi_i^m/|\xi_i^m|^2$ соответственно на η_i^a и η_i^m ($i = 2, 3$), входящие в основные уравнения плоской задачи трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел [4], а также индексов «три» на «два» в компонентах тензоров ω и κ , характеристические определители для пространственной неосесимметричной (2.8) и плоской задач совпадают.

Таким образом, построены характеристические определители в единой форме (2.7) для пространственной неосесимметричной (при обозначениях (2.8)) и плоской задач внутренней неустойчивости слоистых массивов с проскальзыванием слоев. Однако числовые результаты представить в общей форме для пространственной и плоской задач нельзя, т. к. ввиду нелинейности определяющих уравнений для



Фиг. 4

связующего, установить соответствие между параметрами нагружения при пространственной и плоской задачах возможно не всегда.

3. Сравнение числовых результатов для идеального контакта и проскальзывания слоев. Проведем вычисление верхней и нижней границы критической деформации бороалюминиевого композита с дефектами между слоями. По своей структуре композит соответствует постановке задачи в п. 1. Бор (наполнитель) будем моделировать сжимаемым изотропным линейно-упругим телом

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} E\nu / (1 + \nu) / (1 - 2\nu) \varepsilon_{nn} + E / (1 + \nu) \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

алюминий (связующее) — несжимаемым изотропным упругопластическим телом со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sigma_u = A \varepsilon_u^k \quad (3.2)$$

что является частным случаем моделей, рассмотренных в п.п. 1, 2. Согласно [6], для бора модуль Юнга $E = 400$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,21$; для отожженного алюминия $A = 130$ МПа, $k = 0,43$; для неотожженного алюминия $A = 70$ МПа, $k = 0,25$. Чтобы найти зависимости $\varepsilon(\alpha_a)$ для каждой из рассматриваемых форм потери устойчивости при проскальзывании слоев, необходимо подготовить выражения компонентов тензоров ω и κ (вычисленные при (3.1) и (3.2) в [5]) в характеристический определитель (2.7). Причем для пространственной неосесимметричной задачи элементы γ_{pq}' имеют вид (2.8), а для плоской задачи требуется произвести замены, указанные в конце п. 2. Для нахождения подобных зависимостей при идеальном контакте слоев, решается характеристическое уравнение, приведенное в [3] для пространственной неосесимметричной и в [2] для плоской задач. Критическая деформация в каждом случае условий на границе слоев вычисляется следующим образом — сначала определяются локальные минимумы зависимостей $\varepsilon(\alpha_a)$ при $\alpha_a \neq 0$ для каждой из рассматриваемых форм потери устойчивости, а затем из них выбирается

наименьший. Отметим также, что форма потери устойчивости первого рода [1] в случае проскальзывающих слоев при малых α_a (тогда из (2.3), (2.6) $l_i \rightarrow \infty, i = 1, 2$) соответствует потере устойчивости шарнирно закрепленной плиты, и нисходящая ветвь зависимостей $\epsilon(\alpha_a)$ при малых α_a для этой формы рассматриваться не будет.

Зависимости $\epsilon(\alpha_a)$ при различных концентрациях наполнителя в случае матрицы из отожженного алюминия приведены на фиг. 1 для пространственной неосесимметричной и на фиг. 2 для плоской задач; в случае же матрицы из неотожженного алюминия — соответственно, на фиг. 3 и фиг. 4. Кривые $\epsilon(\alpha_a)$ показаны: при проскальзывании слоев — сплошной линией для формы потери устойчивости первого рода, штриховой — для формы потери устойчивости второго рода; при жестком сцеплении слоев — штрихпунктирной линией для формы потери устойчивости первого рода и пунктирной — для формы потери устойчивости второго рода. Цифры 1, 2, 3 на фиг. 1—4 соответствуют $h_a/h_m = 0,01; 0,02; 0,05$. При жестком контакте слоев кривые приведены лишь на тех участках, где они отличаются от кривых при проскальзывающих слоях. Для форм потери устойчивости третьего и четвертого рода корней характеристического уравнения в диапазоне $0 < \epsilon < 0,1$ не обнаружено. Как видно из графиков, критическая деформация при проскальзывающих слоях для всех рассмотренных концентраций всегда меньше, чем при жестком сцеплении, что соответствует соображениям, приведенным в начале статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. Киев, Наук. думка, 1989. 632 с.
2. Гузь А. Н., Гузь И. А. Обоснование континуальной теории разрушения при сжатии слоистых композитных материалов с металлической матрицей//Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 11. С. 9—16.
3. Гузь И. А. Пространственные неосесимметричные задачи теории устойчивости композитных материалов с металлической матрицей//Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 35—41.
4. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев, Вища школа, 1986. 511 с.
5. Гузь И. А. Исследование устойчивости слоистых композитных материалов с металлической матрицей//Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 5. С. 111—115.
6. Гузь А. Н., Черевко М. А., Марголин Г. Г., Ромашко И. М. Разрушение однонаправленных бороалюминиевых композитов при сжатии//Механика композит. материалов. 1986. № 2. С. 226—230.

Киев

Поступила в редакцию
8.1.1991