МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. А. Т. ВАСИЛЕНКО, Н. Д. ПАНКРАТОВА

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ИЛИ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Задачи о распределении напряжений в упругой среде с учетом полостей и включений являются предметом многочисленных исследований. Обзор полученных по ним результатов дан в [1—3]. Интерес к этому классу задач обусловлен, с одной стороны, необходимостью исследования концентрации напряжений в пространственной постановке и их значимостью для развития механики композиционных материалов [4, 5], а также приложением их к задачам горной механики [6, 7].

Задачи о температурных напряжениях, в том числе и обусловленных различием коэффициентов температурного расширения материалов среды и включения, рассматривались в [8—10]. Наиболее полно рассмотрены задачи данного вида в случае, когда упругая среда и включение являются однородными изотропными или трансверсально-изотропными. Аналитические подходы к решению таких задач основываются на использовании представления решений уравнений равновесия в перемещениях через потенциальные функции. Анизотропия и неоднородность материала существенно усложняют решение задач рассматриваемого класса с доведением их до конкретных числовых результатов [11, 12].

В публикуемой работе предлагается численно-аналитический подход к исследованию напряженного состояния неоднородной упругой среды в окрестности сферической полости или неоднородного сферического включения слоистой структуры. Напряженное состояние представляется в виде суперпозиции двух состояний: основного, записанного в аналитическом виде, и возмущенного, находящегося с помощью численного метода. Анализируется влияние неоднородности материала среды и структуры включения.

1. Рассматривается задача о распределении напряжений в окрестности сферической полости или сферического включения в трансверсально-изотропной среде, упругие характеристики которой являются заданными функциями расстояния от центра полости (включения). Включение представляет собой сплошной или полый упругий шар, собранный из трансверсально-изотропных жестко скрепленных между собой неоднородных слоев. Также предполагаем, что включение жестко скреплено со средой, вследствие чего исключаются его отрыв и проскальзывание.

В соответствии с принятой постановкой для такого класса задач предлагается, что на бесконечности среда является изотропной и однородной и подвергается действию растягивающих или сжимающих напряжений, что в декартовых координатах x, y, z записывается следующим образом:

$$\sigma_z = \sigma_0, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_0 \tag{1.1}$$

Для решения поставленной задачи используем прием, аналогичный применяемому в задаче о концентрации напряжений в пластинке, ослабленной круглым отверстием [13]. В соответствии с ним решение представим в виде суммы двух, одно из которых соответствует основному напряженному состоянию (1.1), а другое — возмущенному, вызванному наличием полости или включения. Основное напряженное состояние в сферических координатах r, φ, θ имеет компоненты ($P_n = P_n(\cos\varphi)$ — полиномы Лежандра):

$$\sigma_r^0(\varphi) = \tfrac{1}{3}(\sigma_0 + 2\tau_0)P_0 + \tfrac{2}{3}(\sigma_0 - \tau_0)P_2\cos\varphi \tag{1.2}$$

$$\tau_{r\varphi}^0(\varphi) = \tfrac{1}{3}(\sigma_0 - \tau_0)\,dP_2(\cos\varphi)/d\varphi$$

$$\sigma_\varphi^0(\varphi) = \tfrac{1}{3}(2\sigma_0 + \tau_0)P_0 - \tfrac{2}{3}(\sigma_0 - \tau_0)P_2(\cos\varphi)$$

$$\sigma_\theta^0(\varphi) = \tau_0$$

Представим себе в общем случае слоистую полую сферу, выделенную из рассматриваемой среды. Внутренний радиус такой сферы совпадает с радиусом полости $r = r_0$. Внешний радиус $r = r_N$ является достаточно большим по сравнению с радиусом полости. При этом внешняя $r = r_N$ и внутренняя $r = r_0$ поверхности сферы должны быть нагружены соответствующим образом, а именно внешняя поверхность должна быть свободна от напряжений

$$\sigma_r(r_N, \varphi) = \tau_{r\varphi}(r_N, \varphi) = 0 \tag{1.3}$$

а внутренняя подвержена действию нагрузок

$$\sigma_r(r_0, \varphi) = -\sigma_r^0(\varphi) + P_0(\varphi) \tag{1.4}$$

$$\tau_{r\varphi}(r_0, \varphi) = -\tau_{r\varphi}^0(\varphi) + q_0(\varphi)$$

где p_0, q_0 — заданные на поверхности полости самоуравновешенные воздействия. В частном случае свободной полости $p_0 = q_0 = 0$.

Таким образом, возмущенное напряженное состояние определяется решением краевой задачи для осесимметрично нагруженной многослойной сферы, собранной из трансверсально-изотропных неоднородных материалов, при граничных условиях (1.3) и (1.4) и условиях совместной работы смежных слоев на поверхностях их контакта $r = r_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N-1$):

$$\sigma_r^i(r_i, \varphi) = \sigma_r^{i+1}(r_i, \varphi), \quad \tau_{r\varphi}^i(r_i, \varphi) = \tau_{r\varphi}^{i+1}(r_i, \varphi) \tag{1.5}$$

$$u_r^i(r_i, \varphi) = u_r^{i+1}(r_i, \varphi), \quad u_\varphi^i(r_i, \varphi) = u_\varphi^{i+1}(r_i, \varphi)$$

где i — номер слоя, u_r^i, u_φ^i — смещения i-го слоя. Используя соотношения теории упругости неоднородной анизотропной среды в сферической системе координат, для определения компонент возмущенного напряженного состояния получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных [14]:

$$\partial\bar{\sigma}^i/\partial r = A^i(r, \varphi)\,\bar{\sigma}^i, \quad \bar{\sigma}^i = \{\sigma_r^i, \tau_{r\varphi}^i, u_r^i, u_\varphi^i\} \tag{1.6}$$

Элементы матрицы A содержат также производные по координате φ.

Раскладывая искомые функции в ряды по полиномам Лежандра и их производным, разделяя переменные в уравнениях (1.6), граничных условиях (1.3), (1.4) и условиях сопряжения (1.5) приходим для каждого члена разложений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [14]:

$$d\bar{\sigma}_n^i/dr = B_n^i(r)\,\bar{\sigma}_n^i, \quad \bar{\sigma}_n^i = \{\sigma_{rn}^i, \tau_{r\varphi n}^i, u_{rn}^i, u_{\varphi n}^i\} \tag{1.7}$$

и условиям, сформулированным в точках r_i ($i = 0, 1, \ldots, N$) интервала $[r_0, r_N]$.

Решение одномерных краевых задач для (1.7) с учетом вышеназванных условий проводится устойчивым численным методом дискретной ортогонализации, обеспечивающим высокую точность получаемых результатов.

Решение задачи получим, складывая основное и возмущенное напряженные состояния

$$\sigma_r^{*l}(r,\varphi) = \sigma_r^0(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rn}^l(r) P_n(\cos\varphi) \tag{1.8}$$

$$\tau_{r\varphi}^{*l}(r,\varphi) = \tau_{r\varphi}^0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\varphi n}^l(r)\, dP_n(\cos\varphi)/d\varphi$$

$$u_r^{*l}(r,\varphi) = u_r^0(r,\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} u_r^l(r) P_n(\cos\varphi)$$

$$u_\varphi^{*l}(r,\varphi) = u_\varphi^0(r,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi n}^l(r)\, dP_n(\cos\varphi)/d\varphi$$

Здесь $u_r^0(r,\varphi)$, $u_\varphi^0(r,\varphi)$ — смещения, соответствующие основному напряженному состоянию.

Напряжения $\sigma_\varphi^{*l}(r,\varphi)$, $\sigma_\theta^{*l}(r,\varphi)$ находятся по вычисленным величинам (1.8). Отметим, что выбор разрешающих функций в предложенном виде дает возможность при численном решении автоматически удовлетворять условиям сопряжения слоев.

Можно ожидать, что при $r_N >> r_0$ распределение напряжений в окрестности полости даваемое (1.8) будет таким же, как и в неограниченной среде, ослабленной сферической полостью. Достоверность результатов решенной таким образом задачи можно подтверждать сопоставлением их в частном случае однородной среды с неподкрепленной полостью с известным точным решением. Также могут быть сопоставлены результаты решения задачи при различных значениях радиуса r_N. По степени их близости можно судить о точности полученного решения. Аналогичным образом может быть построено решение и для других условий нагружения среды на бесконечности. Так, например, рассматривая изгиб напряжениями

$$\sigma_x = \sigma_0 z,\ \sigma_y = \sigma_0 z,\ \sigma_0 = \text{const} \tag{1.9}$$

имеем следующие выражения для компонент основного напряженного состояния

$$\sigma_r^0(r,\varphi) = 2/5\, r\sigma_0\, [P_1(\cos\varphi) - P_3(\cos\varphi)]$$

$$\tau_{r\varphi}^0(r,\varphi) = -1/15\, r\tau_0\, [3P_1(\cos\varphi) + 2P_3(\cos\varphi)]$$

$$\sigma_\varphi^0(r,\varphi) = r\sigma_0 P_1(\cos\varphi)$$

$$\sigma_\theta^0(r,\varphi) = r\sigma_0\, [3P_1(\cos\varphi) + 2P_3(\cos\varphi)]/5 \tag{1.10}$$

Вместо граничных условий (1.4) имеем $\sigma_r(r_0,\varphi) = -\sigma_r^0(r,\varphi) + p_0(\varphi)$, $\tau_{r\varphi}(r_0,\varphi) = -\tau_{r\varphi}^0(r,\varphi) + q_0(\varphi)$. Дальнейший путь решения задачи подобен описанному выше для случая растяжения (сжатия) среды.

Аналогичным образом могут быть решены задачи о полиномиальном нагружении среды на бесконечности [3].

2. В ряде случаев, когда условия жесткого контакта (1.5) нарушаются, может иметь место проскальзывание слоев. Если при этом силы трения малы и их можно не учитывать, следует использовать модель идеального проскальзывания, которая для поверхности $r = r_l$ записывается в виде

$$\sigma_r^l(r_l,\varphi) = \sigma_r^{l+1}(r_l,\varphi),\quad u_r^l(r_l,\varphi) = u_r^{l+1}(r_l,\varphi)$$

$$\tau_{r\varphi}^{*l}(r_l,\varphi) = \tau_{r\varphi}^{*l+1}(r_l,\varphi) = 0 \tag{2.1}$$

Случай, когда необходимо учитывать проскальзывание слоев, можно рассматривать как промежуточный между жестким контактом и идеальным проскальзыванием.

Выполнение условий (2.1) приводит к скачку перемещений u_φ на поверхности $r = r_l$. Так как поле перемещений, соответствующее основному напряженному состоянию является непрерывным, следовательно, функция u^l_φ являющаяся решением системы уравнений (1.6) должна претерпевать при переходе через поверхность скачок такой величины чтобы напряжение $\tau^{*l}_{r\varphi}$ обратилось в нуль. В общем случае это приводит к необходимости решать многоточечную задачу для системы уравнений (1.6) с граничными условиями (1.3), (1.4) и условиями вида (1.5) или (2.1) на поверхностях контакта слоев. Решение данной задачи сводится к решению ряда двухточечных. С этой целью условия (2.1) сводятся к виду (1.5) следующим образом:

$$\sigma^l_r(r_l, \varphi) = \sigma^{l+1}_r(r_l, \varphi), \quad \tau^l_{r\varphi}(r_l, \varphi) = \tau^{l+1}_{r\varphi}(r_l, \varphi) \qquad (2.2)$$

$$u^l_r(r_l, \varphi) = u^l_r(r_l, \varphi), \quad u^{l+1}_\varphi(r_l, \varphi) - u^l_\varphi(r_l, \varphi) = \Delta u^l_\varphi$$

где Δu^l_φ — пока неопределенная функция φ. Раскладываем далее условия (2.2) в ряды по полиномам Лежандра и их производным. Тогда

$$\Delta u^l_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u^l_{0n} dP_n(\cos\varphi)/d\varphi$$

где Δu^l_{0n} — постоянные величины, подлежащие определению.

Таким образом, интегрируя одномерную краевую задачу для системы уравнений (1.7), получаем решение для искомых функций, в частности, для $\tau^{*l}_{r\varphi}$:

$$\tau^{*l}_{r\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^0_{r\varphi n} dP_n(\cos\varphi)/d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^l_{r\varphi n}(r, \Delta u^l_{0n})\, dP_n(\cos\varphi)/d\varphi$$

где $\tau^0_{r\varphi n}$ — коэффициенты разложения в ряд по $dP_n(\cos\varphi)/d\varphi$ функции $\tau^0_{r\varphi}(\varphi)$. Неизвестные постоянные находятся из линейного алгебраического уравнения

$$\tau^l_{r\varphi n}(r_l, \Delta u^l_{0n}) + \tau^0_{r\varphi n} = 0 \qquad (2.3)$$

После определения из (2.3) Δu^l_{0n}, находим окончательное решение задачи.

3. Рассмотрим задачу о распределении напряжений в изотропной неоднородной среде вокруг сферической полости при действии растягивающих напряжений σ_0. Модуль упругости среды является функцией $rE = E_0(b + ar/r_0)$, $E = \text{const}$. Коэффициент Пуассона принимается постоянным $\nu = 0{,}3$. Решение задачи выполнено для различных значений радиуса $r_N = gr_0$ $(g = 2, 3, \ldots, 11)$ и трех вариантов a и b: $a = 0$, $b = 1$; $a = b = 0{,}5$; $a = -1$, $b = 2$. Отметим, что при $a = 0$, $b = 1$ имеем однородную среду. Также во всех вариантах модуль упругости на поверхности полости одинаков и равен E_0.

Для однородной среды получено следующее распределение напряжений на поверхности полости

$$\sigma^*_\varphi/\sigma_0 = 2{,}694 - 3{,}652\cos^2\varphi, \quad \sigma^*_\theta/\sigma_0 = -0{,}034 - 0{,}921\cos^2\varphi \quad (r = 2r_0)$$

$$\sigma^*_\varphi/\sigma_0 = 2{,}137 - 2{,}869\cos^2\varphi, \quad \sigma^*_\theta/\sigma_0 = 0{,}122 - 0{,}856\cos^2\varphi \quad (r = 4r_0)$$

$$\sigma^*_\varphi/\sigma_0 = 2{,}073 - 2{,}771\cos^2\varphi, \quad \sigma^*_\theta/\sigma_0 = 0{,}132 - 0{,}831\cos^2\varphi \quad (r = 6r_0)$$

$$\sigma^*_\varphi/\sigma_0 = 2{,}050 - 2{,}732\cos^2\varphi, \quad \sigma^*_\theta/\sigma_0 = 0{,}135 - 0{,}819\cos^2\varphi \quad (r = 10r_0)$$

$$\sigma^*_\varphi/\sigma_0 = 2{,}047 - 2{,}729\cos^2\varphi, \quad \sigma^*_\theta/\sigma_0 = 0{,}135 - 0{,}817\cos^2\varphi \quad (r = 11r_0)$$

d	p	q	m	n
		$h/r_0 = 0{,}1$		
2	—1,593	1,905	—0,046	0,358
4	—1,477	1,718	—0,021	0,262
6	—1,404	1,603	—0,007	0,206
8	—1,359	1,524	0,001	0,170
10	—1,315	1,466	0,006	0,144
		$h/r_0 = 0{,}5$		
2	—1,125	1,132	0,013	—0,103
4	—1,078	1,075	0,016	—0,020
6	—1,057	1,051	0,016	—0,022
8	—1,045	1,038	0,015	—0,022
10	—1,037	1,030	0,011	—0,020
		$h/r_0 = 1$		
2	—1,033	1,015	0,011	—0,029
4	—	—	0,010	—0,026
6	—	—	0,008	—0,022
8	—	—	0,007	—0,019
10	—	—	0,006	—0,016

Точное решение записывается следующим образом [15]:

$$\sigma_\varphi^*/\sigma_0 = 2{,}045 - 2{,}722\cos^2\varphi,\quad \sigma_\theta^*/\sigma_0 = 0{,}136 - 0{,}818\cos^2\varphi \tag{3.1}$$

Как следует из приведенных данных, точность полученного решения возрастает с увеличением r_N. При $r_N/r_0 = 11$ вычисленное предложенным способом решение практически совпадает с точным.

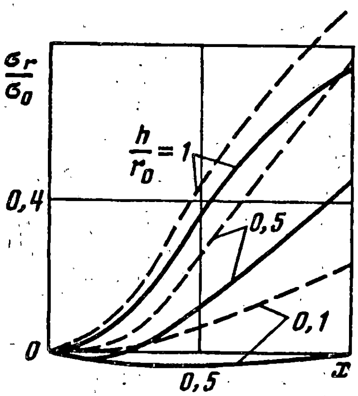
Для неоднородной среды значения напряжений на поверхности полости определяются формулами

$$\sigma_\varphi^*/\sigma_0 = 2{,}214 - 2{,}912\cos^2\varphi,\quad \sigma_\theta^*/\sigma_0 = 0{,}123 - 0{,}812\cos^2\varphi\quad (a = b = 0{,}5)$$

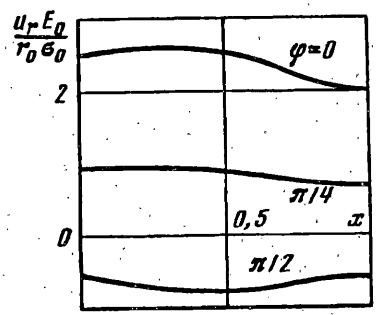
$$\sigma_\varphi^*/\sigma_0 = 1{,}852 - 2{,}519\cos^2\varphi,\quad \sigma_\theta^*/\sigma_0 = 0{,}137 - 0{,}805\cos^2\varphi\quad (a = -1;\ b = 2)$$

Неоднородность среды мало влияет на значения напряжений σ_θ^*. Если модуль упругости уменьшается при удалении от полости, то напряжения σ_φ^* возрастают. При увеличении E имеет место обратное. Максимальные значения σ_φ^* в указанных случаях изменяются соответственно на 8,2% и 9,4%. На расстоянии от полости порядка ее радиуса значения напряжений практически не зависят от степени неоднородности.

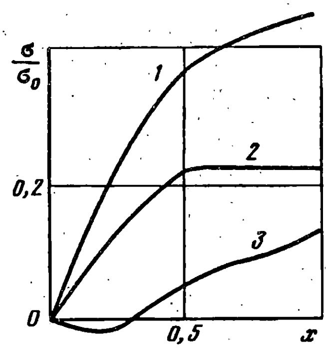
Далее рассмотрим задачу о напряженном состоянии в окрестности полости, подкрепленной сферической оболочкой толщины h. Модуль упругости материала оболочки равен dE_0, где E_0 — модуль упругости среды. Коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Вычисления проведены для $d = 2$; 4; 6; 8; 10; $h/r_0 = 0{,}1$; 0,5; 1. Результаты решения задачи представлены на фиг. 1 в виде распределения по толщине подкрепления в сечении $\varphi = 0$ радиальных напряжений σ_r для $d = 2$ (сплошные линии) и $d = 10$ (штриховые линии). При этом $x = (r - r_0)/(r - r_0 + h)$. Приведенные данные показывают, что с увеличением толщины подкрепления и его модуля увеличиваются и радиальные напряжения. При $h/r_0 = 1$ и $d = 20$ на поверхности сопряжения подкрепления и среды напряжения σ_r близки к своим значениям на бесконечности $\sigma_r = \sigma_0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Напряжения σ_φ^* и σ_θ^* в среде на поверхности ее контакта с подкреплением представим в виде

$$\sigma_\varphi^* = (p + q\cos^2\varphi)\,\sigma_0, \quad \sigma_\theta^* = (m + n\cos^2\varphi)\,\sigma_0 \tag{3.2}$$

Значения постоянных p, q, m, n в зависимости от d и h даны в таблице. Анализ приведенных данных и их сопоставление с решением (3.1) для неподкрепленной полости показывают, что наличие подкрепления существенно снижает концентрацию напряжений. Так, если толщина подкрепления равна 0,1 радиуса полости, то максимальные значения σ_φ^* уменьшаются на 45% при $d=2$ и 30% при $d=10$. Увеличение толщины подкрепления приводит еще к более существенному уменьшению σ_φ^*. Так, для $h/r_0=0{,}5$ при $d >> 6$ максимальные значения σ_φ^* всего лишь на несколько процентов превосходят свои значения, соответствующие основному напряженному состоянию. Для $h/r_0=1$ уже при $d=2\sigma_\varphi^*$ практически совпадает с σ_φ^0. Аналогичные выводы можно сделать и для напряжения σ_θ^*.

Представляет интерес рассмотреть задачу, когда между подкрепляющей оболочкой и средой находится сферический слой с упругими свойствами, отличными от свойств подкрепления и среды. Выполним решение задачи для случая изотропных материалов, имеющих модули упругости равными для среды E_0, для подкрепления dE_0 и промежуточного слоя cE_0. Коэффициенты Пуассона примем равными $\nu=0{,}3$. Радиусы поверхностей контакта слоев равны $r_1=1{,}1\,r_0$, $r_2=1{,}2\,r_0$. Расчеты выполнены для $d=2$ и двух значений $c=0{,}1$; 0,08. Результаты решения для указанных значений c оказались близкими между собой, поэтому приведем их для $c=0{,}1$.

В среде на поверхности ее сопряжения с включением возникают напряжения

$$\sigma_\varphi^*/\sigma_0 = -1{,}377 + 1{,}538\cos^2\varphi \qquad (3.3)$$

$$\sigma_\theta^*/\sigma_0 = -0{,}010 + 0{,}173\cos^2\varphi, \quad \sigma_r^*/\sigma_0 = -0{,}213 + 0{,}089\cos^2\varphi$$

Сравнивая (3.3) с (3.1), (3.2) и данными таблицы, приходим к выводу, что наличие между средой и подкреплением податливого слоя приводит к заметному уменьшению напряжений.

На фиг. 2 дано распределение радиальных перемещений u_r по толщине пакета в трех сечениях. При этом учтено, что радиальные перемещения, соответствующие основному напряженному состоянию, равны $u_r^0(r,\varphi) = \sigma_0 r[-\nu + (1+\nu)\cos^2\varphi]/E_0$. Как видно, изменение u_r по толщине не столь значительно, как σ_r. Наиболее заметно оно в менее жестком слое, причем там происходит его уменьшение. Значения u_r в сечениях $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$ отличаются знаками.

Распределение напряжений σ_r и $\tau_{r\varphi}$ в некоторых сечениях $\varphi = \mathrm{const}$ по толщине включения представлены на фиг. 3 $(x = (r - r_0)/(r_2 - r_0))$. Кривая *1* соответствует напряжению $\tau_{r\varphi}(\pi/4)$, а кривые *2*, *3* — $\sigma_r(\pi/2)$ и $\sigma_r(0)$. Из приведенных данных следует, что указанные величины изменяются по довольно сложным законам.

Отметим, что при $\varphi = 0$ во втором слое σ_r изменяется по линейному закону, в то время как при $\varphi = \pi/2$ оно практически постоянное. Распределение $\tau_{r\varphi}$ по толщине каждого слоя близко к линейному. Отмеченные обстоятельства, по-видимому, и приводят к снижению концентрации напряжений для такой структуры включения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Steruberg E.* Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity // Appl. Mech. Rev. 1958. No. 11. P. 1—4.
2. *Neuber H., Hahn H. G.* Stress concentration in scientific research and engineering // Appl. Mech. Rev. 1966. No. 19. P. 187—199.
3. *Подильчук Ю. Н.* Граничные задачи статики упругих тел. Киев: Наук. думка, 1984. 304 с.
4. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. I. Механика материалов / Гузь А. Н., Хорошун Л. П., Ванин Т. А. и др. Киев: Наук. думка, 1982. 368 с.
5. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
6. *Барбакадзе В. Ш., Мурамаки С.* Расчет и проектирование строительных конструкций в деформируемых средах. М.: Стройиздат, 1989. 472 с.
7. *Евтушенко Б. В.* Влияние неподкрепленной выработки на напряженное состояние массива с переменным модулем упругости // Горный ж., 1990. № 8. С. 30—32.
8. *Канаун С. К., Кудрявцева Л. Т.* Упругие и термоупругие характеристики композитов, армированных однонаправленными слоистыми волокнами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 798—807.
9. *Канаун С. К., Кудрявцева Л. Т.* Температурные напряжения в композитах со сферически-слоистыми включениями // Изв. АН СССР МТТ. 1987. № 4. С. 113—121.
10. *Кирилюк В. С.* Две задачи термоупругости для изотропной среды со сферическим включением при совершенном и несовершенном тепловом и механическом контакте на границе раздела сред // Теор. и прикл. мех. 1989. Вып. 20. С. 14—18.
11. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1977. 368 с.
12. *Евтушенко А. А., Паук В. И.* Влияние неоднородности материала на распределение напряжений вблизи тонкого упругого включения // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 651—657.
13. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 575 с.
14. *Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д.* Напряженное состояние трансверсально-изотропных неоднородных толстостенных сферических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 59—65.
15. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Киев

Поступила в редакцию
25.IV.1991