МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 539.3

 А. Д. ЧЕРНЫШОВ

ПРОСТЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Получено несколько вариантов простейших определяющих уравнений, когда зависимость напряжения — деформации содержит не более двух физических констант. Простейшие модели приведены в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа, для сжимаемых и несжимаемых упругих материалов. Для твердых тел с достаточно большой геометрической протяженностью в случаях, когда повороты материальных окрестностей тела в деформированном состоянии по отношению к их первоначальному недеформированному конечны, даже при малых деформациях необходимо использовать теорию конечных деформаций. По этой причине, полученные ниже двухконстантные модели применимы для таких твердых тел, у которых деформации малы, а повороты конечны, т. е., например для металлов и их сплавов.

1. Удобства использования упругих моделей с двумя физическими константами очевидны, так как значения коэффициентов Ламе можно найти в справочниках для широкого круга материалов. Для упругих материалов определяющие уравнения получают из законов термодинамики [1, 2]. Эти уравнения представляются зависимостью тензора истинных напряжений σ от тензора больших деформаций, при помощи производных от упругого потенциала W по компонентам выбранного тензора больших деформаций. Построение упругой модели заключается в выборе конкретной зависимости потенциала от инвариантов тензора больших деформаций. При этом необходимо учитывать, что упругий потенциал W — потенциальная энергия упругой деформации. Это обстоятельство накладывает два ограничения на возможную зависимость функции W от инвариантов тензора больших деформаций.

При отсутствии деформации упругая энергия равна нулю

$$W=0 \tag{1.1}$$

Для любых допустимых деформаций упругого тела упругая энергия должна быть положительно определенной функцией

$$W>0 \tag{1.2}$$

2. Для изотропной упругой среды при конечных деформациях в переменных Эйлера тензор истинных напряжений σ выражается через упругий потенциал W по формуле [1]:

$$\sigma=\rho\,\frac{\partial W}{\partial A}(I-2A),\quad I-2A=\left(\frac{\partial r_0}{\partial r}\right)^*\left(\frac{\partial r_0}{\partial r}\right) \tag{2.1}$$

где ρ — плотность среды, I — единичный тензор, r_0 и r — начальный и конечный радиус-векторы материальной частицы, звездочка над тензором означает операцию транспонирования, A — тензор деформаций Альманси [2]. Потенциал W зависит от инвариантов J_{1a}, J_{2a}, J_{3a} тензора Альманси

$$J_{1a}=A\colon I,\ J_{2a}=A^2\colon I,\ J_{3a}=A^3\colon I \tag{2.2}$$

При помощи уравнения сохранения массы в форме Лагранжа [3] плотность ρ выразим через начальную плотность и главные значения тензора Альманси A_1, A_2, A_3:

$$\rho = \rho_0 R, \quad R = [(1 - 2A_1)(1 - 2A_2)(1 - 2A_3)]^{1/2} \tag{2.3}$$

Подстановка $W = W(J_{1a}, J_{2a}, R)$ в (2.1) приводит к уравнению

$$\sigma = \lambda J_{1a} I + 2\mu A - 4\varkappa A^2, \quad \varkappa = \rho_0 R \partial W / \partial J_{2a} \tag{2.4}$$

$$\lambda = \frac{\rho_0 R}{J_{1a}} \left(\frac{\partial W}{\partial J_{1a}} - R \frac{\partial W}{\partial R} \right), \quad \mu = \rho_0 R \left(\frac{\partial W}{\partial J_{2a}} - \frac{\partial W}{\partial J_{1a}} \right)$$

При получении формул (2.4) использованы следующие выражения для производных от инвариантов

$$\frac{\partial J_{1a}}{\partial A} = I, \quad \frac{\partial J_{2a}}{\partial A} = 2A, \quad \frac{\partial R}{\partial A} = -R(I - 2A)^{-1}$$

Для получения одного из простейших выражений определяющего уравнения (2.4) представим упругий потенциал в виде разложения по степеням главных значений тензора Альманси

$$W = W_\alpha^* A_\alpha + 1/2 W_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta + \ldots$$

$$W_\alpha^* = \partial W / \partial A_\alpha \,|_{A_k=0}; \quad W_{\alpha\beta} = \partial^2 W / \partial A_\alpha \partial A_\beta \,|_{A_k=0} \tag{2.5}$$

Если в выражении тензора напряжений через тензор Альманси удерживать только члены с первой степенью компонент A_1, то необходимо в разложении (2.5) удерживать члены со второй степенью компонент.

Из условия изотропности среды в частности следует, что $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, если $A_1 = A_2 \neq A_3$. Это требование после подстановки (2.5) в (2.1) приводит к равенствам

$$W_i^* = 0, \quad W_{12} = W_{21} = W_{13} = W_{31} = W_{23} = W_{32} = \lambda_0 / \rho_0 \tag{2.6}$$

$$W_{11} = W_{22} = W_{33} = (\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0$$

Таким образом, в рассматриваемом случае упругий потенциал имеет вид квадратичной формы. Условие (1.2) означает, что матрица $\{W_{\alpha\beta}\}$ должна быть положительно определенной. Собственные значения α_i этой матрицы равны

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \mu_0, \quad \alpha_3 = (3\lambda_0 + 2\mu_0)/2 \tag{2.7}$$

Упругие коэффициенты Ламе λ_0 и μ_0 положительны, поэтому $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, а отсюда следует положительная определенность квадратичной формы

$$W = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{2\rho_0} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \frac{\lambda_0}{\rho_0} (A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3) \tag{2.8}$$

Чтобы записать выражение (2.8) в инвариантной форме, воспользуемся преобразованием

$$2(A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3) = (A_1 + A_2 + A_3)^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = J_{1a}^2 - J_{2a} \tag{2.9}$$

После подстановки (2.9) в (2.8) получим искомый вид упругого потенциала

$$W_1 = \frac{\lambda_0}{2\rho_0} J_{1a}^2 + \frac{\mu_0}{\rho_0} J_{2a} \tag{2.10}$$

Упругому потенциалу (2.10) при помощи (2.4) соответствует одно из простейших определяющих уравнений

$$\sigma = R\,(I - 2A)\,(\lambda_0 J_{1a} I + 2\mu_0 A) \tag{2.11}$$

Другое простейшее выражение для определяющего уравнения (2.4) получается, когда λJ_{1a} и μ зависят от инвариантов J_{1a} и R линейным образом

$$\lambda J_{1a} = a_1 J_{1a} + \lambda_0\,(1 - R),\ \mu = a_2 J_{1a} + \mu_0 R + C_2 \tag{2.12}$$

Коэффициенты в выражениях (2.12) выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$|\mu| < \infty,\ \lambda J_{1a} = 0 \text{ при } A = 0 \tag{2.13}$$

Условия (2.13) вытекают из требования, чтобы напряжения в упругом материале обращались в ноль при отсутствии деформаций. Подстановка (2.12) в (2.4) приводит к равенствам

$$a_1 = a_2 = C_2 = 0 \tag{2.14}$$

$$W_2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0}\left(\ln R + \frac{1}{R} - 1\right) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\,(J_{1a} + \ln R) \tag{2.15}$$

При помощи (2.15) из (2.1) получим второе простейшее определяющее уравнение в виде

$$\sigma = \lambda_0\,(1 - R)\,I + 2\mu_0 R A \tag{2.16}$$

При малых деформациях эти зависимости совпадают с известными соотношениями линейной теории упругости.

Докажем, что из (2.15) $W_2 \geq 0$ при любых допустимых значениях инвариантов J_{1a} и R при условии $\lambda_0 \geq 0$ и $\mu_0 \geq 0$. Для любых A_i, которые имеют геометрический смысл только при $-\infty < A_1 < 1/2$, справедливо неравенство $\ln\,(1 - 2A_i)^{1/2} + A_i \leq 0$. Суммируя такие неравенства при $i = 1, 2, 3$, придем к неравенству $J_{1a} + \ln R \leq 0$. Отметим, что для несжимаемой среды ($R = 1$) отсюда следует неравенство $J_{1a} \leq 0$.

Первое слагаемое в выражении для W_2 из (2.15) положительно для любых $R > 0$ при $\lambda_0 > 0$, а второе слагаемое, согласно неравенству $J_{1a} + \ln R \leq 0$ при $\mu_0 > 0$ — тоже положительное. Отсюда вытекает доказательство положительности упругого потенциала в (2.15). Для несжимаемой упругой среды простейший потенциал и определяющее уравнение из (2.15) и (2.16) принимают вид

$$W_3 = -\mu_0 J_{1a},\ \sigma = -p_1 I + 2\mu_0 A \tag{2.17}$$

где p_1 — неизвестная скалярная функция.

Если в качестве тензора деформаций использовать тензор Коши C [4], то уравнение (2.1) примет вид

$$\sigma = -2\rho C\,\partial W/\partial C,\quad W = W\,(J_{1C}, J_{2C}, R) \tag{2.18}$$

$$J_{1C} = C : I,\quad J_{2C} = C^2 : I,\quad R = (C_1 C_2 C_3)^{1/2}$$

$$\frac{\partial J_{1C}}{\partial C} = I,\quad \frac{\partial J_{2C}}{\partial C} = 2C,\quad \frac{\partial R}{\partial C} = \frac{1}{2} R C^{-1}$$

где C_1, C_2 и C_3 — главные значения тензора C.

Тензоры Альманси A и Коши C и их инварианты связаны между собой зависимостями

$$C = I - 2A,\quad A = 1/2\,(I - C)$$

$$J_{1c} = 3 - 2J_{1a},\ J_{2c} = 3 - 4J_{1a} + 4J_{2a}$$

$$J_{1a} = 1/2\ (3 - J_{1c}),\ J_{2a} = 1/4\ (3 - 2J_{1c} + J_{2c}) \qquad (2.19)$$

При использовании тензора C упругий потенциал W_1 из (2.10) и определяющее уравнение (2.11) запишутся в форме

$$W_1 = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{8\rho_0}(3 - 2J_{1c}) + \frac{\lambda_0}{8\rho_0} J_{1c}^2 + \frac{\mu_0}{4\rho_0} J_{2c} \qquad (2.20)$$

$$\sigma = RC\ [(3/2\lambda_0 + \mu_0 - 1/2\lambda_0 J_{1c})\, I - \mu_0 C]$$

Упругий потенциал W_2 из (2.15) и определяющее уравнение (2.16) принимают выражения

$$W_2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0}(\ln R + \frac{1}{R} - 1) - \frac{\mu_0}{\rho_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} J_{1c} + \ln R\right)$$

$$\sigma = \lambda_0 (1 - R)\, I + \mu_0 R\, (I - C) \qquad (2.21)$$

Для несжимаемой упругой среды простейший потенциал W_3 и определяющее уравнение из (2.17) приводятся к виду

$$W_3 = -{}^1/_2\, \mu_0\, (3 - J_{1c})/\rho_0,\ \sigma = -p_2 I - \mu_0 C \qquad (2.22)$$

где p_2 — неизвестная скалярная функция.

Особый интерес представляет использование тензора деформаций E, который выражается через тензор Коши C по формуле

$$E = -{}^1/_2 \ln C,\ E_i = -{}^1/_2 \ln C_i \qquad (2.23)$$

Второе равенство в (2.23) дает связь главных значений E_i и C_i тензоров E и C при помощи элементарной функции натурального логарифма, тогда как в первом равенстве под логарифмом понимается тензорная функция натурального логарифма. Введем инварианты

$$J_{1e} = E : I,\ J_{2e} = E^2 : I,\ J_{3e} = E^3 : I \qquad (2.24)$$

Относительная плотность среды R выражается через E по формуле

$$J_{1e} = -\ln R,\ R = \exp\, (-J_{1e}) \qquad (2.25)$$

При использовании тензора E возникают определенные удобства при обработке экспериментальных данных. Удобства заключаются также в том, что инварианты E_i при растяжении изменяются в пределах $(0, \infty)$, а при сжатии в пределах $(-\infty, 0)$, т. е. имеется примерная симметрия изменения инвариантов E_i при растяжении и сжатии, чего нет у тензоров A и C. Кроме того при малом деформировании тензор E совпадает с тензором малых деформаций. Общий вид определяющего уравнения (2.1) в данном случае принимает наиболее простую форму

$$\sigma = \rho_0 R\left(\frac{\partial W}{\partial J_{1e}} I + 2\frac{\partial W}{\partial J_{2e}} E + 3\frac{\partial W}{\partial J_{3e}} E^2\right) \qquad (2.26)$$

Для случая, когда

$$W = W_4 = \lambda_0 J_{1e}^2/2\rho_0 + \mu_0 J_{2e}/\rho_0 \qquad (2.27)$$

имеем еще один пример простейшего выражения для определяющего уравнения

$$\sigma = R\, (\lambda_0 J_{1e} I + 2\mu_0 E) \qquad (2.28)$$

Для несжимаемого упругого материала уравнение (2.28) принимает вид

$$\sigma = -pI + 2\mu_0 E \tag{2.29}$$

где p — гидростатическое давление, так как при этом $R = 1$ и $J_{1e} = 0$.

3. При использовании переменных Лагранжа будем считать, что для изотропной упругой среды тензор напряжений σ зависит только от тензора деформаций Фингера [5] F:

$$F = \tfrac{1}{2}\,[(\partial r/\partial r_0)\,(\partial r/\partial r_0)^* - I] \tag{3.1}$$

В данном случае тензор σ выражается через упругий потенциал W по формуле

$$\sigma = \rho\;(I + 2F)\;\partial W/\partial F,\;\; W = W(J_{1f}, J_{2f}, R) \tag{3.2}$$

$$J_{1f} = F : I,\; J_{2f} = F^2 : I,\; R = [(1 + 2F_1)\;(1 + 2F_2)\;(1 + 2F_3)\,]^{-1/2},\; \partial R/\partial F = -R\;(I + 2F)^{-1}$$

где F_1, F_2, F_3 — главные значения тензора Фингера.

Тензоры Альманси и Фингера A и F связаны между собой функционально тензорной зависимостью

$$(I - 2A)\;(I + 2F) = I \tag{3.3}$$

Подобно (2.10) первый простейший упругий потенциал в переменных Лагранжа имеет положительно определенную квадратичную форму

$$W = U_1 = \frac{\lambda_0}{2\rho_0} J_{1f}^2 + \frac{\mu_0}{\rho_0} J_{2f} \tag{3.4}$$

Этому потенциалу соответствует определяющее уравнение

$$\sigma = R\,(I + 2F)\,(\lambda_0 J_{1f} I + 2\mu_0 F) \tag{3.5}$$

По аналогии с (2.15) найдем вторую форму упругого потенциала

$$W = U_2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0}\left(\ln R + \frac{1}{R} - 1\right) + \frac{\mu_0}{\rho_0}\,(J_{1f} + \ln R) \tag{3.6}$$

и соответствующего ему определяющего уравнения

$$\sigma = \lambda_0\,(1 - R)\,I + 2\mu_0 RF \tag{3.7}$$

Можно проверить из (3.6), что $U_2 = 0$ при отсутствии деформации, когда $R = 1$ и $J_{1f} = 0$, т. е. условие (1.1) выполнено. Покажем, что U_2 из (3.6) удовлетворяет также и условию (1.2).

Для любых F_i, которые имеют геометрический смысл только при $-1/2 < F_i < \infty$, справедливо неравенство $F_i - \ln\,(1 + 2F_i)^{1/2} \geq 0$. Суммируя такие неравенства при $i = 1, 2, 3$, придем к неравенству

$$J_{1f} + \ln R \geq 0 \tag{3.8}$$

Первое слагаемое в (3.6) положительно при любых $R > 0$, что совместно с (3.8) обеспечивает выполнение неравенства (1.2). В частности, для случая несжимаемого материала из (3.8) получаем

$$J_{1f} \geq 0 \text{ при } R = 1 \tag{3.9}$$

а из (3.6) и (3.7) для несжимаемого материала получим третью форму простейшего упругого потенциала и определяющего уравнения

$$W = U_3 = \mu_0 J_{1f}/\rho_0,\;\; \sigma = -p_3 I + 2\mu_0 F \tag{3.10}$$

где p_3 — неизвестная скалярная функция.

Если в качестве тензора деформаций использовать второй тензор Фингера B [5], который с первым тензором Фингера F связан зависимостью

$$B = I + 2F,\ F = {}^1/_2\,(B - I) \tag{3.11}$$

то уравнение (2.1) примет вид

$$\sigma = 2\rho B\partial W/\partial B,\ W = W(J_{1b}, J_{2b}, R)$$

$$J_{1b} = B : I,\ J_{2b} = B^2 : I,\ R = (B_1B_2B_3)^{-1/2} = (|B|)^{-1/2}$$

$$\partial J_{1b}/\partial B = I,\ \partial J_{2b}/\partial B = 2B,\ \partial R/\partial B = -\,{}^1\!/_2RB^{-1}$$

где B_1, B_2 и B_3 — главные значения тензора B, $|B|$ — определитель тензора B. Инварианты тензоров F и B в силу (3.11) выражаются по формулам

$$J_{1b} = 3 + 2J_{1f},\ J_{2b} = 3 + 4J_{1f} + 4J_{2f}$$

$$J_{1f} = {}^1/_2\,(J_{1b} - 3),\ J_{2f} = {}^1/_4\,(3 - 2J_{1b} + J_{2b}) \tag{3.12}$$

При использовании тензора B упругий потенциал U_1 из (3.4) и определяющее уравнение (3.5) запишутся в форме

$$U_1 = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{8\rho_0}(3 - 2J_{1b}) + \frac{\lambda_0}{8\rho_0}J_{1b}^2 + \frac{\mu_0}{4\rho_0}J_{2b} \tag{3.13}$$

$$\sigma = {}^1\!/_2\lambda_0R\,(J_{1b} - 3)\,B + \mu_0RB\,(B - I)$$

Упругий потенциал U_2 из (3.6) и определяющее уравнение (3.7) принимают выражения

$$U_2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0}\left(\ln R + \frac{1}{R} - 1\right) + \frac{\mu_0}{\rho_0}\left(\ln R + {}^1\!/_2J_{1b} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\sigma = \lambda_0\,(1 - R)\,I + \mu_0R\,(B - I) \tag{3.14}$$

В случае несжимаемого материала простейшая форма упругого потенциала U_3 и определяющего уравнения (3.10) приводятся к виду

$$U_3 = \frac{\mu_0}{2\rho_0}(J_{1b} - 3),\ \sigma = -p_4I + \mu_0B \tag{3.15}$$

где p_4 — неизвестная скалярная функция.

В переменных Лагранжа особый интерес представляет тензор деформаций E, который выражается через тензор B по формуле

$$\bar{E} = {}^1\!/_2\ln B,\ \bar{E}_i = {}^1\!/_2\ln B_i \tag{3.16}$$

Здесь в первом равенстве под ln понимается тензорная функция натурального логарифма, тогда как во втором равенстве связь главных значений $\bar{E}_i$ и B_i тензоров $\bar{E}$ и B дается при помощи элементарной функции натурального логарифма.

Докажем, что тензоры E и $\bar{E}$ из (2.23) и (3.16) тождественно равны между собой. Для доказательства воспользуемся равенством $CB = I$. Отсюда имеем $\ln C + \ln B = 0$, т. е. $E = \bar{E}$.

Следовательно в равенствах (2.26)—(2.29) можно всюду тензор E заменить на тензор E. При использовании тензора E определяющее уравнение (2.1) принимает форму

$$\sigma = \rho_0R\partial W(J_{1e}, J_{2e}, J_{3e})/\partial\bar{E} \tag{3.17}$$

$$J_{1e} = \bar{E} : I = -\ln R,\ J_{2e} = \bar{E}^2 : I,\ J_{3e} = \bar{E}^3 : I$$

Простейшее выражение упругого потенциала и определяющего уравнения из (2.27) и (2.28) получим в виде

$$W = W_4 = U_4 = \frac{\lambda_0}{2\rho_0} J_{1e}^2 + \frac{\mu_0}{\rho_0} J_{2e}$$

$$\sigma = R\,(\lambda_0 J_{1e} I + 2\mu_0 \bar{E}) \qquad (3.18)$$

В случае несжимаемого упругого материала, когда $R = 1$ и $J_{1e} = 0$ уравнения (3.18) принимают форму

$$W = U_5 = (\mu_0/\rho_0)\, J_{2e}, \quad \sigma = -pI + 2\mu_0 \bar{E}$$

где p — неизвестная скалярная функция, имеющая смысл гидростатического давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: ИЛ, 1963. 312 с.
2. *Almansi S.* Rend. Lincei (5A), 20(1), (1911), 705.
3. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
4. *Cauchy A.* Exercises de mathematiques. V. 2, Paris: 1827. 108 p.
5. *Finger J.* Sitzber. Wien Akad. Wiss. (IIa), (1894), 1073.

Воронеж

Поступила в редакцию
13.03.91