

УДК 531.38

© 1993 г. А. П. ИВАНОВ

О БЕЗУДАРНЫХ ПРЫЖКАХ НЕОДНОРОДНОГО КОЛЕСА. 2. ШЕРОХОВАТАЯ ОПОРА

Рассматривается движение тяжелого круглого неоднородного диска на горизонтальной опоре с учетом возможности прекращения контакта. Получены условия перехода от опорной фазы к прыжку и условия безударного приземления диска. Показано, что модель абсолютной шероховатости, исключающей возможность проскальзывания в точке контакта, приводит к парадоксальным ситуациям неразрешимости основной задачи динамики. Для кулоновского трения выявлены все случаи безударных прыжков.

1. Введение. Среди возможных перемещений тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости есть и такие, при которых контакт с опорой прекращается. В динамике подскоки тела обусловлены силами инерции, нормальная составляющая которых не скомпенсирована весом тела [1]. При возврате на опору в общем случае происходит соударение. Практический интерес представляют безударные прыжки [2]; их исследование для случая гладкой плоскости проведено в первой части данной работы [3]. Ниже изучаются безударные перелеты неоднородного колеса на плоскости с трением.

2. Описание системы. Выберем начало инерциальной системы координат $OXYZ$ в опорной плоскости, направляя ось Y вертикально вверх. Пусть диск имеет радиус R , массу m , центральный радиус инерции k , а расстояние между центром масс G и геометрическим центром C равно $r > 0$; движение происходит в плоскости $Z = 0$. Составляющие реакции связаны зависимостью

$$F_x = F_x(F_y, x, y, \varphi, x', y', \varphi') \quad (2.1)$$

где x, y — координаты точки C , φ — угол между вектором CG и осью X (см. фигуру). При $F_y = 0$ имеем $F_x = 0$.

Из теоремы о движении центра масс и теоремы моментов для точки G следуют соотношения

$$\begin{aligned} m x_G'' &= m(x + r \cos \varphi)'' = F_x, \quad m y_G'' = m(y + r \sin \varphi)'' = F_y - mg, \quad m k^2 \varphi'' = \\ &= F_x y_G - F_y r \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

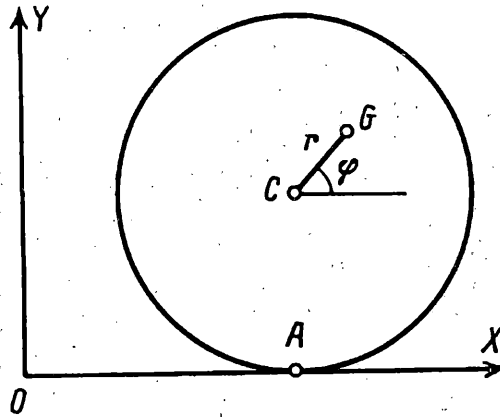
а область возможных движений ограничена условием $y \geq R$.

Возможны два случая:

1) Если $F_y = 0$, то $F_x = 0$ и система (2.2) принимает вид

$$x'' = r \varphi'^2 \cos \varphi, \quad y'' = r \varphi'^2 \sin \varphi - g, \quad \varphi'' = 0 \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) описывают перелеты тела ($y > R$) или участки контакта ($y = R, y' = 0$). Причем во втором случае величина y'' должна быть неотрицательна, иначе равенство $F_y = 0$ противоречило бы характеру связи $y \geq R$.



2) Если $F_Y > 0$, то $y'' = 0$ и уравнения (2.2) выглядят так

$$x'' - r\varphi'' \sin \varphi = r\varphi'^2 \cos \varphi - m^{-1}F_X, \quad mk^2\varphi'' = F_X y_G - F_Y r \cos \varphi \quad (2.4)$$

$$F_Y(k^2 + r^2 \cos^2 \varphi) - r y_G F_X \cos \varphi = mk^2(g - r\varphi'^2 \sin \varphi)$$

В системе (2.4) определяющим является третье уравнение относительно неизвестной F_Y . Система (2.4) однозначно определяет движение, если это уравнение имеет единственный неотрицательный корень. В противном случае возникают ситуации, известные для кулоновского трения в случае скольжения как парадоксы Пэнлеве [4]. При этом теоремы динамики оказываются недостаточными для определения движения и необходимо использовать некоторые дополнительные гипотезы (см. дискуссию в [4]).

В регулярном случае из существования конечных ускорений x'' , y'' , φ'' следует непрерывность скоростей x' , y' , φ' , так что система не испытывает ударов. Помимо упомянутых парадоксальных ситуаций, удары могут сопровождать смену двух безударных фаз движения (2.3) и (2.4) (т. е. при отрывах и приземлениях диска). Исследуем безударные прыжки при различных типах зависимости (2.1).

3. Случай абсолютной шероховатости. Если условия контакта исключают возможность проскальзывания диска, то при $y = R$ выполнено равенство

$$x_A' = x' + R\varphi' = 0 \quad (3.1)$$

где A — точка контакта.

Подставляя равенство (3.1) в систему (2.4), получим для компонент реакции такие выражения

$$F_X = F_X^0 = \frac{mr \cos \varphi}{k^2 + y_G^2 + r^2 \cos^2 \varphi} [RU + gr \sin \varphi - (k^2 + r^2) \varphi'^2] \quad (3.2)$$

$$F_Y = \frac{m(k^2 + y_G^2)}{k^2 + y_G^2 + r^2 \cos^2 \varphi} \left(U - \varphi'^2 \frac{r^2 y_G \cos \varphi}{k^2 + y_G^2} \right), \quad U = g - r\varphi'^2 \sin \varphi$$

Величина F_Y остается неотрицательной, пока выполнено неравенство

$$U \geq \varphi'^2 r^2 y_G \cos^2 \varphi / (k^2 + y_G^2) \quad (3.3)$$

при этом диск катится по плоскости. Изменение знака неравенства (3.3) при $t = t_0$ свидетельствует о невозможности сохранения контакта при $t > t_0$ в случае непрерывности фазовых переменных.

С другой стороны, если $\cos \varphi \neq 0$ при $t = t_0$, то $U > 0$, и в системе (2.3) второе уравнение имеет вид $y'' = -U < 0$, так что при $t > t_0$ невозможен и отрыв диска от опоры.

Данный парадокс обусловлен принятием гипотезы абсолютной шероховатости, обеспечивающей сколь угодно большой коэффициент трения, необходимый для отсутствия проскальзывания колеса: при $F_Y \rightarrow 0$, $\cos \varphi_0 \neq 0$ формулы (3.2) приводят к значению $F_X \rightarrow F_X^* \neq 0$.

Решение парадокса состоит, по-видимому, в выборе более реалистичной модели контактных напряжений (см., например [5]).

Допустим теперь, что при $t = t_0$ величина $\cos \varphi$ обращается в ноль, а неравенство (3.3) — в равенство. Тогда $F_X = F_Y = 0$, а точки C и G лежат на одной вертикали. По соображениям симметрии при $t > t_0$ знак неравенства (3.3) сохранится и диск продолжит качение.

Следовательно, для диска, катящегося по опоре, безударное прекращение контакта невозможно.

4. Случай кулоновского трения. Для трения по закону Амонтона — Кулона зависимость (2.1) такова

$$F_X = \begin{cases} -\mu F_Y \operatorname{sign}(x' + R\dot{\varphi}'), & \text{если } x' + R\dot{\varphi}' \neq 0 \\ F_X^*, & \text{если } x' + R\dot{\varphi}' = 0, \quad |F_X^*| \leq \mu F_Y \end{cases} \quad (4.1)$$

где μ — коэффициент трения, а величина F_X^* определена в (3.2). Первое выражение в формуле (4.1) соответствует скольжению диска, а второе — качению.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, приходим к выводу, что отрыв диска от опоры при его качении невозможен.

Изучим возможность отрыва при скольжении. Третье из уравнений (2.4) при подстановке зависимости (4.1) принимает вид

$$V_{F_Y} = mk^2 U, \quad V = k^2 + r^2 \cos^2 \varphi + \mu r y_G \cos \varphi \cdot \operatorname{sign}(\dot{x} + R\dot{\varphi})$$

Непрерывному скольжению по опоре соответствуют значения $V > 0$, $U > 0$ [4]. Безударный отрыв при $t \geq t_0$ возникает, если величина U меняет знак, а $V(t_0) > 0$. Таким образом, необходимое условие отрыва

$$U(t_0) = 0, \quad V(t_0) > 0 \quad (4.2)$$

отличается от случая гладкой плоскости (см. [3]) ограничением на знак величины $V(t_0)$.

Поскольку движение диска в отрыве от опоры не зависит от наличия шероховатости, все безударные прыжки описываются формулой [3]:

$$\varphi_1^{(n)} = \pi - \varphi_0^{(n)} + 2\pi n, \quad \varphi_0^{(n)} + \operatorname{ctg} \varphi_0^{(n)} = 1/\sqrt{\pi} + \pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

где φ_0, φ_1 — значения угла φ в моменты отрыва $t = t_0$ и приземления $t = t_1$.

Кроме неравенства (4.2), необходимо исключить случаи тангенциального удара при $t = t_1$, накладывая требование

$$V(t_1) > 0 \quad (4.4)$$

Так как в фазе прыжка $\varphi' = \operatorname{const}$, $x' = \operatorname{const}$, а для значений (4.3) выполнены равенства $\cos \varphi_1 = -\cos \varphi_0$, $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_0$, то условия (4.2), (4.4) сводятся к одному неравенству

$$k^2 + r^2 \cos^2 \varphi_0 > \mu r(R + r \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 \quad (4.5)$$

Последовательность $\{\varphi_0^{(n)}\}$ корней уравнения (4.3) монотонно стремится к

нулю, а ее первый член равен приблизительно 0,22. Отбор этих корней при помощи неравенства (4.5) приводит к следующему результату.

Теорема. 1) При выполнении неравенства

$$k^2 > 1/4\mu^2 R^2 + 1/2\mu r^2 \quad (4.6)$$

все значения $\varphi_0^{(n)}$ в (4.3) соответствуют безударным прыжкам колеса на плоскости с кулоновским трением.

2) Если выполнено неравенство

$$k^2 + r^2 > \mu r R \quad (4.7)$$

то безударным прыжкам соответствуют все значения $\varphi_0^{(n)}$, начиная с некоторого номера; при противоположном знаке неравенства (4.7) число таких значений конечно.

3) В случае

$$k^2 + r^2 < 0,96\mu r R \quad (4.8)$$

безударных прыжков нет.

Заметим, что если оба неравенства (4.6) и (4.8) не выполнены, то условие 2) позволяет лишь оценить число подходящих корней, а их номера можно определить из дополнительного анализа формулы (4.5).

Подведем итог. Неоднородное колесо не может двигаться по горизонтальной опоре с произвольной угловой скоростью: при достаточно интенсивном вращении возникают силы инерции, которые не компенсируются весом колеса и приводят к его отрыву от опоры. Приземление колеса после перелета не обязательно сопровождается ударом: возможен и плавный переход от полета к опорной фазе.

Условия существования безударных прыжков зависят от характера контакта в опорной фазе движения. Так, в отсутствие трения существует счетное множество периодических движений колеса с безударными перелетами. Каждое из этих движений обладает притягивающими свойствами, аналогичными полустойчивым предельным циклам.

Для абсолютно шероховатой опорной плоскости безударный отрыв от опоры невозможен.

Для плоскости с кулоновским трением безударные подскоки возможны, а условия их реализации зависят от параметров системы и коэффициента трения. В отличие от гладкого случая, периодических движений с перелетами здесь нет, так как безударное прекращение и возобновление контакта возможны лишь при скольжении колеса, сопровождающемся диссипацией энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. Part II. New York: McMillan, 1905.
2. Schiehlen W., Gao J. Simulation des stoßfreien Hüpfens // ZAMM. 1989. В. 69. Н. 5. S. 302—303.
3. Иванов А. П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры // Изв. РАН. МТТ. 1992. №1. С. 25—31.
4. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
5. Фуфаев Н. А. Теория движения систем с качением // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 56—65.