

УДК 531.391

© 1993 г. Д. В. БАЛАНДИН

ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ЗАЗОРЕ

Исследуются периодические фрикционные автоколебания твердого тела, перемещающегося в зазоре с твердыми стенками. В предположении о малой крутизне характеристики силы сухого трения с помощью приближенных методов определены значения коэффициента восстановления скорости тела при ударе о стенки зазора, при которых в системе возможен устойчивый периодический режим. Установлено, что в системе имеет место жесткое возбуждение автоколебаний, что соответствует на фазовой плоскости наличию неустойчивого и устойчивого предельных циклов. Приведены формулы для определения частоты фрикционных автоколебаний в зависимости от параметров механической системы.

К настоящему времени достаточно подробно исследованы фрикционные автоколебания осциллятора под действием силы сухого трения, которая меняется с изменением относительной скорости [1, 2]. Менее изученным остается вопрос о периодических фрикционных автоколебаниях твердого тела, перемещающегося в зазоре. Между тем исследование условий возникновения подобных колебаний может оказаться полезным для объяснения различных явлений в дисковых тормозах, шлифовальных агрегатах и других машинах с фрикционными парами.

Рассмотрим следующую механическую систему: к платформе массы m , способной перемещаться в прямоугольном зазоре с твердыми стенками, в некоторый момент времени прижимают плиту, движущуюся с постоянной скоростью V_0 (фиг. 1).

Математическая модель этой механической системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка с соответствующими граничными условиями:

$$m\ddot{x} = F(|V_0 - \dot{x}|) \operatorname{sgn}(V_0 - \dot{x}) \quad \text{при } |x| < \Delta, \quad \dot{x} \neq V_0 \quad (1)$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{при } |x| < \Delta, \quad \dot{x} = V_0 \quad (2)$$

$$\dot{x}_+ = -kx_-, \quad |x| = \Delta \quad \text{и} \quad \dot{x}_- x > 0$$

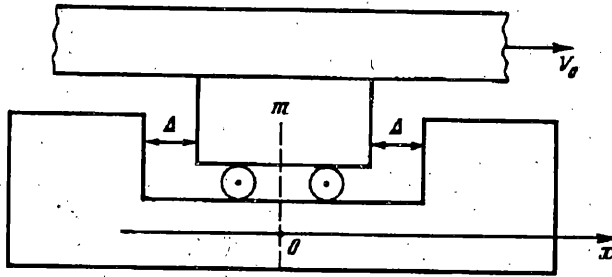
Здесь m — масса платформы, 2Δ — линейный размер зазора, k — коэффициент восстановления скорости платформы при ударе, $F(V)$ — зависимость силы сухого трения от модуля относительной скорости.

Будем считать, что $F(V)$ определяется выражением

$$F(V) = \begin{cases} F_0 - \alpha V, & 0 < V \leq V_1 \\ F_0 - \alpha V_1, & V > V_1 \end{cases}, \quad \alpha = \operatorname{const} > 0$$

Для последующего анализа удобно привести уравнения (1), (2) к безразмерному виду путем замены переменных

$$y = x/\Delta, \quad \tau = t [F_0 \alpha_0 / (m\Delta)]^{1/2}$$



Фиг. 1

где $\alpha_0 = F_*/F_0$, а $F_* = F(V_0)$; α_0 — характеризует крутизну зависимости $F(V)$ при $V = V_0$. Введем также безразмерные параметры

$$\gamma^2 = F_0 \Delta / (mV_0^2), \quad \mu = (1 - \alpha_0)/\alpha_0, \quad \varepsilon = \mu\gamma\alpha_0^{1/2}$$

$$v = \gamma^{-1}\alpha_0^{-1/2}, \quad \eta_0 = (V_0 - V_1)/V_0$$

В новых переменных уравнения (1), (2) примут вид

$$y'' = \varphi(y') \operatorname{sgn}(v - y') \quad \text{при } |y| < 1, \quad y' \neq v \quad (3)$$

$$y'' = 0 \quad \text{при } |y| < 1, \quad y' = v \quad (4)$$

$$y'_+ = -ky'_- \quad \text{при } |y| = 1 \text{ и } y'_- y'_+ > 0$$

Здесь штрих обозначает производную по переменной τ , зависимость $\varphi(y')$ имеет вид

$$\varphi(y') = \begin{cases} 1 + \varepsilon y', & \eta_0 v \leq y' \leq v \\ 1 + \varepsilon \eta_0, & y' < \eta_0 v, \quad y' > v \quad (2 - \eta_0) \\ 1 + 2\varepsilon v - \varepsilon y', & v < y' \leq v \quad (2 - \eta_0) \end{cases}$$

В дальнейшем будем полагать, что параметр $\mu \ll 1$, а $\eta_0 \leq -1$, то есть рабочим является только падающий участок характеристики силы сухого трения.

Поставим задачу изучения структуры фазовой плоскости системы (3), (4) с целью обнаружения периодических режимов, исследования их устойчивости и определения условий возникновения. Покажем далее, что в рассматриваемой динамической системе возможны четыре типа периодических движений:

тип 1. с одним ударом за период; состояние относительного покоя платформы и плиты отсутствует (фиг. 2, а);

тип 2. с одним ударом за период; в определенные промежутки времени имеет место относительный покой платформы и плиты (фиг. 2, б);

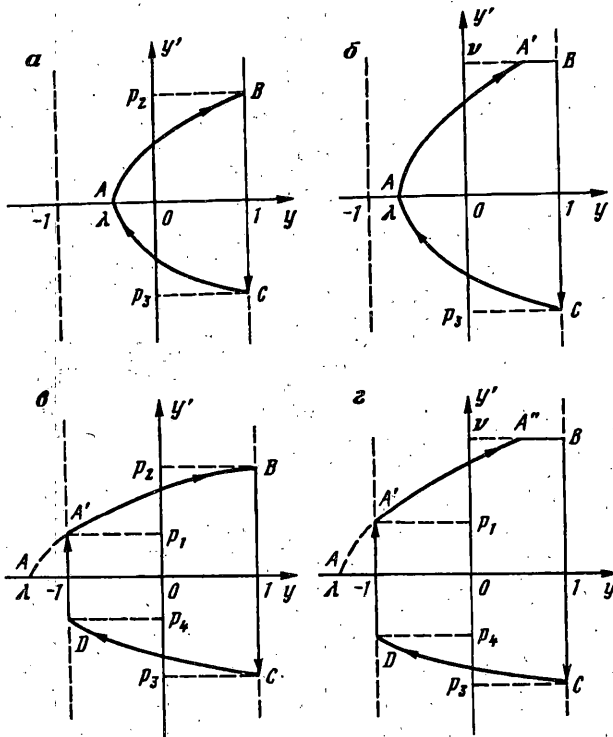
тип 3. с двумя ударами за период; состояние относительного покоя платформы и плиты отсутствует (фиг. 2, в);

тип 4. с двумя ударами за период; в определенные промежутки времени имеет место относительный покой платформы и плиты (фиг. 2, г).

Иследуем вначале периодические движения типа 1, 3 и определим значения параметра k , отвечающие замкнутым фазовым траекториям $ABCA$ (фиг. 2, а) и $A'BCDA'$ (фиг. 2, в). Пусть точка A , лежащая на оси x , имеет координаты $\{\lambda, 0\}$. Построим уравнение для определения параметра k . Если обозначить ординаты точек B и C через p_2 и p_3 , то $p_2 = p_2(\lambda)$ есть функция λ , а

$$p_3 = -kp_2(\lambda) \quad (5)$$

Обозначим далее решение задачи Коши уравнения (3) с начальными условиями $y_0 = 1, y'_0 = p_3; y = y(\tau, 1, p_3)$. Для замыкания фазовой траектории, исходящей из точки A , необходимо положить



Фиг. 2

$$y(\tau, 1, p_3) = \lambda, y'(\tau, 1, p_3) = 0 \quad (6)$$

Исключая τ из уравнений (6), найдем зависимость $p_3 = g_1(\lambda)$ и, следовательно, с учетом (5) получим

$$g_1(\lambda) = -kp_2(\lambda) \quad (7)$$

искомое уравнение для определения параметра k .

Для периодического движения типа 3, обозначив ординаты точек A', B, C, D соответственно p_1, p_2, p_3, p_4 , будем иметь

$$p_1 = p_1(\lambda), p_2 = p_2(\lambda), p_3 = -kp_2(\lambda)$$

здесь λ_* есть по-прежнему абсцисса точки A (фиг. 2, в), а движение из точки A в точку A' формально определяется согласно уравнению (3) при игнорировании ограничения $|y| < 1$. Для замыкания фазовой траектории, исходящей из точки A' , необходимо положить $y(\tau, 1, p_3) = -1, y'(\tau, 1, p_3) = p_4 = -p_1(\lambda)/k$. Исключая τ из двух последних уравнений, найдем $p_4 = g_2(p_3) = g_2[-kp_2(\lambda)] = g_3(k, \lambda)$. Окончательно уравнение для определения параметра k имеет вид

$$p_1(\lambda) = -kg_3(k, \lambda) \quad (8)$$

Пользуясь малостью параметра μ , разрешим уравнения (7), (8) в явном виде и построим зависимость параметра k от λ . Решение задачи Коши уравнения (3) с начальными условиями $y(0) = v, y'(0) = u$ (при $u < v$) имеет вид

$$y(\tau) = v - \frac{1}{\varepsilon}\tau + \frac{1}{\varepsilon} \left(u + \frac{1}{\varepsilon}\right) (e^{\varepsilon\tau} - 1) \quad (9)$$

при этом

$$y'(\tau) = -\frac{1}{\varepsilon} + \left(u + \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{\tau} \quad (10)$$

Положим $v = \lambda$, $\dot{u} = 0$ и найдем время движения по фазовой траектории от точки A до точки B , а также ординату точки B (фиг. 2, a). Пользуясь малостью параметра μ , разложим экспоненту в выражении (9) в ряд и, отбрасывая члены порядка $o[(\varepsilon\tau)^2]$, получим

$$1 = \lambda - \frac{1}{\varepsilon}\tau + \left(\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon^2\tau^2}{2}\right)\varepsilon^{-2}$$

Откуда искомое время τ_{20} в нулевом приближении определится, как $\tau_{20} = [2(1-\lambda)]^{1/2}$.

Подставляя значение τ_{20} в выражение (10) и используя разложение в ряд экспоненты, найдем ординату p_{20} точки B : $p_{20} = \tau_{20}$. Оценим величину ошибки, совершаемой при отбрасывании членов ряда Тейлора, начиная с $\varepsilon^3\tau^3/6$. Поскольку $\tau_{20} = p_{20} \leq v$, то $\varepsilon\tau_{20} \leq \varepsilon v = \mu$ и

$$1 = \lambda - \frac{1}{\varepsilon}\tau + \left[\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon^2\tau^2}{2} + \varepsilon^2\tau^2 R\mu\right]\varepsilon^{-2}$$

Поделив последнее равенство на τ^2 , получим

$$2(1-\lambda)/\tau^2 = 1 + R\mu$$

Следовательно, τ_{20} определяется с относительной ошибкой порядка μ . Наряду с нулевым приближением τ_{20} , p_{20} найдем также следующие приближения τ_{21} и p_{21} , получаемые с точностью до малого параметра μ . Удержим в разложении экспоненты в выражении (9) член $\varepsilon^3\tau^3/6$, тогда для определения τ_{21} получим уравнение $1 = \lambda + \tau_{21}^2/2 + \varepsilon\tau_{21}^3/6$, откуда следует

$$\tau_{21}^2 = \tau_{20}^2(1 - \varepsilon\tau_{20}/3)$$

Подставляя далее τ_{21} в выражение (10), найдем

$$p_{21} = \tau_{20}(1 + \varepsilon\tau_{20}/3)$$

Заметим, что ошибка в определении τ_{21} и p_{21} имеет уже порядок μ^2 . Естественно предположить, что искомый параметр k в первом приближении имеет вид: $k = 1 - \beta\mu$. Повторяя рассуждения с разложением в ряд экспонент в выражениях (6), с учетом (7) найдем $\beta = 2\tau_{20}/(3v)$. Таким образом

$$k = 1 - 2\mu [2(1-\lambda)]^{1/2}/(3v), \lambda \in [-1, 1] \quad (11)$$

Опуская подробные выкладки, аналогичные проведенным выше, приведем окончательный результат решения уравнения (8) относительно k

$$k = 1 + \mu(\tau_{20}^3 - \tau_{10}^3)/(3v), \lambda < -1 \quad (12)$$

$$\tau_{20}^3 = 2(1-\lambda), \tau_{10}^3 = -2(1+\lambda)$$

Отметим, что формулы (11) и (12) справедливы лишь в том случае, когда справедливо неравенство

$$p_{21} = \tau_{20}(1 + \varepsilon\tau_{20}/3) \leq v \quad (13)$$

При нарушении последнего неравенства происходит переход от движений типа 1, 3 к движениям типа 2, 4. Разрешая неравенство (13) относительно λ , получим

$$\lambda = 1 - v^2/2 + \mu v^2/3 = \lambda_0 \quad (14)$$

Итак, если $\lambda < \lambda_0$, неравенство (13) нарушается. Для вычисления параметра k , отвечающего периодическим движениям типа 2, 4, поступим следующим образом: построим зависимость абсциссы точки A (обозначае́мой как и прежде λ) от параметра β , считая, что $k = 1 - \mu\beta$, $p_3 = -kv$, а фазовая траектория выходит из точки C (фиг. 2, б). Пользуясь приемом разложения в ряд экспоненты в выражениях (9), (10), для периодического движения типа 2 будем иметь $\lambda = 1 - v^2/2 + \mu v^2 (\beta - 1/3)$. Разрешая относительно β , получим

$$k = 1/2 - (\lambda - 1)/v^2 - \mu/3 \quad (15)$$

Найдем также значение λ_1 , соответствующее $k = 1$:

$$\lambda_1 = 1 - v^2/2 - \mu v^2/3 \quad (16)$$

Для периодического движения типа 4 вычислим сначала p_4 в зависимости от $k = 1 - \mu\beta$, а затем, исходя из уравнения

$$p_1 = \tau_{10}(1 + \epsilon\tau_{10}/3) = -p_4 k, \tau_{10}^2 = -2(1 + \lambda)$$

найдем k в зависимости от параметра λ . Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат

$$k = \begin{cases} 1 - L_0, & v \leq 2 \\ 1 - L_0 + \frac{\mu}{3} v^2 (1 - 4/v^2)^{3/2} (v^2 + \tau_{10}^2)^{-1}, & v > 2 \end{cases} \quad (17)$$

$$L_0 = [v^2 (1 + 2\mu/2) - \tau_{10}^2 (1 + 2\mu\tau_{10}/(3v)) - 4] [2 (v^2 + \tau_{10}^2)]^{-1}$$

Прежде чем выписать общую сводку формул, определяющих $k = k_0(\lambda)$, заметим, что в зависимости от значения v возможны следующие варианты:

а) $0 < v < 2(1 + 2\mu/3)^{-1/2}$, тогда $\lambda_0, \lambda_1 \geq -1$

б) $2(1 + 2\mu/3)^{-1/2} < v \leq 2(1 - 2\mu/3)^{-1/2}$, тогда $\lambda_0 \geq -1, \lambda_1 < -1$

в) $v > 2(1 - 2\mu/3)^{-1/2}$, тогда $\lambda_0, \lambda_1 < -1$

Таким образом, λ_0 и λ_1 определяются соотношениями (14), (16), а зависимость $k = k_0(\lambda)$ для упомянутого варианта а) с учетом (11), (12), (15), (17) имеет вид

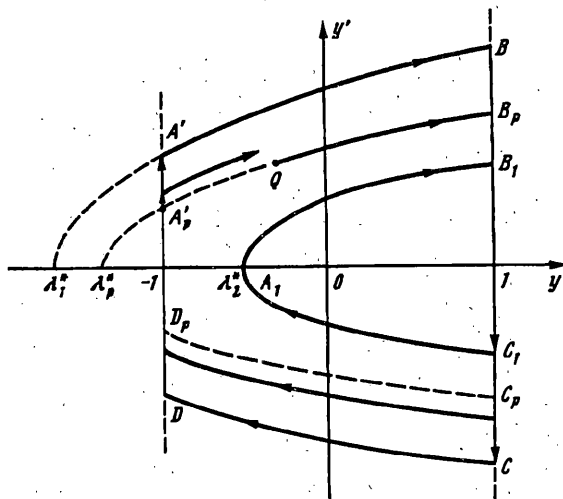
$$k = \begin{cases} 1 - 2\mu [2(1 - \lambda)]^{1/2}/(3v), & \lambda_0 \leq \lambda \leq 1 \\ 1/2 - (\lambda - 1)/v^2 - \mu/3, & \lambda_m \leq \lambda < \lambda_0 \end{cases} \quad (18)$$

где $\lambda_m = \lambda_1$; укажем также минимальное значение $k_0(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_m, 1]$, которое, как следует из приведенной формулы, достигается при $\lambda_- = \lambda_0$:

$$k_- = \min_{\lambda \in [\lambda_m, 1]} k_0(\lambda) = k_0(\lambda_-) = 1 - \frac{2}{3}\mu$$

Для варианта б) получаем

$$k = \begin{cases} 1 - 2\mu [2(1 - \lambda)]^{1/2}/(3v), & \lambda_0 \leq \lambda \leq 1 \\ 1/2 - (\lambda - 1)/v^2 - \mu/3, & -1 \leq \lambda < \lambda_0 \\ 1 - L_0, & \lambda_m \leq \lambda < -1, \quad \lambda_m = \lambda_1 \end{cases} \quad (19)$$



Фиг. 3

$$k_- = \min_{\lambda \in [0, \lambda_m]} k_0(\lambda) = k_0(\lambda_-) = 1 - \frac{2}{3}\mu, \quad \lambda_- = \lambda_0$$

Для варианта в) находим следующие формулы

$$k = \begin{cases} 1 - 2\mu [2(1-\lambda)]^{1/2}/(3\nu), & -1 \leq \lambda \leq 1 \\ 1 + \mu (\tau_{20}^3 - \tau_{10}^3)/(6\lambda\nu), & \lambda_0 \leq \lambda < -1 \\ 1 - L_0 + 1/3\mu\nu^2 (1 - 4/\nu^2)^{3/2} (\nu^2 + \tau_{10}^2)^{-1}, & \lambda_m \leq \lambda < \lambda_0 \end{cases} \quad (20)$$

где $\lambda_m = 1 - 1/2\nu^2 [1 + 1/3\mu [1 - 2(1 - 4/\nu^2)^{3/2}]]$ определяется как наименьший корень уравнения $k_0(\lambda) = 1$, при этом

$$k_- = \min_{\lambda \in [0, \lambda_m]} k_0(\lambda) = k_0(\lambda_-) = 1 - \frac{4}{3}\frac{\mu}{\nu}, \quad \lambda_- = -1$$

Итак, для каждого значения $\lambda \in [\lambda_m, 1]$ определен параметр k и замкнутая траектория на фазовой плоскости, соответствующая одному из четырех типов периодического движения. Следует отметить, что во всех трех приведенных вариантах зависимость $k_0(\lambda)$ является унимодальной, то есть $k_0(\lambda)$ убывает при $\lambda < \lambda_-$, возрастает при $\lambda > \lambda_-$ и, кроме того, $k_0(1) = k_0(\lambda_m) = 1$. Таким образом, каждому значению $k^* \in (k_-, 1)$ отвечают два значения λ_1^* и λ_2^* , для которых $k_0(\lambda_1^*) = k_0(\lambda_2^*) = k^*$. Положим для определенности $\lambda_1^* < \lambda_-$, $\lambda_2^* > \lambda_-$ и покажем далее, что периодическое движение, отвечающее λ_1^* (падающий участок $k_0(\lambda)$), устойчиво, а периодическое движение, отвечающее λ_2^* (возрастающий участок $k_0(\lambda)$), неустойчиво. Рассмотрим на фазовой плоскости произвольную точку Q , расположенную между двумя замкнутыми траекториями $A_1 B_1 C_1 A_1$ и $A' B C D A'$, соответствующими одному и тому же значению k^* (фиг. 3). Заметим, что точка Q принадлежит замкнутой траектории $A_p' B_p C_p D_p A_p'$, определяемой параметрами λ_p^* и $k_p^* = k_0(\lambda_p^*)$, при этом

$$\lambda_1^* < \lambda_p^* < \lambda_2^*, \quad k_p^* < k^*$$

Если в системе реализуется значение параметра $k = k^*$, то изображающая точка фазовой траектории, исходящей из точки Q и приходящей в точку B_p , после ударного взаимодействия при $y = 1$ попадает в область $C_p CDD_p$. Следовательно, изображающая точка удаляется от замкнутой траектории $A_1 B_1 C_1 A_1$ и приближается к $A'BCDA'$. Аналогичным образом можно рассмотреть случаи, когда точка Q находится внутри области, ограниченной траекторией $A_1 B_1 C_1 A_1$ и вне области, ограниченной траекторией $A'BCDA'$. В первом из них изображающая точка, удаляясь от траектории $A_1 B_1 C_1 A_1$, стремится к состоянию равновесия $y = 1, y' = 0$, во втором — изображающая точка приближается к траектории $A'BCDA'$.

Итак, для любого значения $k^* \in (k_-, 1)$ на фазовой плоскости системы имеем неустойчивый и устойчивый предельные циклы. При увеличении параметра k , начиная с некоторого $k = k^* < k_-$ и до $k = 1$, в соответствии с приведенной зависимостью $k_0(\lambda)$ наблюдается увеличение размеров устойчивого цикла и уменьшение неустойчивого цикла (при $k = 1$ цикл вырождается в точку с координатами $y = 1, y' = 0$). При уменьшении параметра k устойчивый и неустойчивый циклы сближаются и при $k = k_-$ сливаются в один полуустойчивый цикл (k_- есть бифуркационное значение параметра k). При значениях $k < k_-$ периодические движения в системе исчезают — остается единственное устойчивое состояние равновесия.

В заключение приведем выражение для частоты фрикционных автоколебаний. Записанная в размерной форме частота $f = f_0/\theta_0$, где $f_0 = [F_0 \alpha_0 / (m\Delta)]^{1/2}$, а θ_0 — период автоколебаний в безразмерной форме, который в нулевом приближении (с относительной ошибкой порядка μ) в зависимости от v и заданного параметра k^* с учетом (18)–(20) определяется следующим образом:

$$\theta_0 = \begin{cases} 2v, & v < 2 \\ 2 \left[[2(1 - \lambda_*)]^{1/2} - [-2(1 + \lambda_*)]^{1/2} \right], & v \geq 2 \end{cases}$$

здесь λ_* — наименьший корень уравнения $k^* = k_0(\lambda)$, а $k_0(\lambda)$ задано соотношением (20) и при этом $\lambda_* \leq -1$. Заметим также, что минимальное значение $\lambda_* = \lambda_m$ и в нулевом приближении имеем $\lambda_m = 1 - v^2/2$, а соответствующее значение безразмерного периода колебаний равно $\theta_0 = 2[v - (v^2 - 4)^{1/2}]$.

Таким образом, если в системе возникают периодические автоколебания, то их частота f лежит в диапазоне $f_0/\theta_0^* \leq f \leq f_0/\theta_0^-$, где

$$\theta_0^+ = \begin{cases} 2v, & v \leq 2 \\ 4, & v > 2 \end{cases}, \quad \theta_0^- = \begin{cases} 2v, & v \leq 2 \\ 2[v - (v^2 - 4)^{1/2}], & v > 2 \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крагельский И. В., Гитис Н. В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 183 с.
2. Нагаев Р. Ф., Сарафян Г. С. Фрикционные автоколебания в системе кусочно-линейной характеристики трения // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 10. С. 84–90.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
13.VI.1991