МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 531.391

© 1993 г. В. М. РЯБОЙ

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРУГОИНЕРЦИОННЫХ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ В ДОРЕЗОНАНСНОЙ И ЗАРЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается теория механических линейных колебательных систем со многими степенями свободы, обладающих свойством виброизоляции. На основе разработанного в [1, 2] аналитического метода дается оценка минимальной возможной массы для линейно-упругих систем любого конечного числа степеней свободы, обладающих определенными виброизолирующими свойствами в данной области частот и удовлетворяющих заданному ограничению на частоты собственных колебаний. Особо исследуется случай, когда требования к виброизоляции заданы в области частот, меньших минимального допустимого значения первой собственной частоты системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель упругоинерционной виброизолирующей системы в виде конечного числа n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, упруго связанных между собой и с жестким основанием. Потенциальная энергия системы представляется положительно определенной квадратичной формой от перемещений общего вида. Система возбуждается в точке m_1 внешней гармонической силой с амплитудой f_1 и частотой ω. Предполагается для простоты, что материальные точки способны смещаться только в одном направлении, совпадающем с постоянной линией действия внешней силы. Это не уменьшает общности, но упрощает изложение.

Амплитуды стационарных гармонических колебаний с частотой ω описываются уравнением

$$C\mathbf{u} - \omega^2 M\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{1.1}$$

где C — положительно определенная матрица жесткости (вообще говоря, заполненная), M — диагональная матрица масс: $M = \operatorname{diag}[m_1, m_2, \ldots, m_n]$, $\mathbf{u}$ — n-мерный вектор-столбец амплитуд перемещений, $\mathbf{f} = \{f_1, 0, \ldots, 0\}^T$ — вектор амплитуд внешних сил.

При колебаниях системы на жесткое основание действует суммарная гармоническая сила с амплитудой f_0. Согласно принципу Даламбера и уравнению (1.1),

$$f_0 = \mathbf{e}^T C\mathbf{u}, \quad \mathbf{e}^T = \{1, 1, \ldots, 1\} \tag{1.2}$$

Величина $T(\omega) = f_0/f_1$ называется коэффициентом передачи системы и служит мерой виброизоляции на частоте ω. Имеем, в силу (1.1), (1.2):

$$T(\omega) = \mathbf{e}^T C (C - \omega^2 M)^{-1}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}^T \tag{1.3}$$

Следует отметить, что вследствие теоремы взаимности той же функцией $T(\omega)$ описывается отношение амплитуды колебаний u_1 точки m_1 к заданной амплитуде колебаний основания при кинематическом возбуждении системы со стороны основания. Требование виброизоляции в данной области частот Ω записывается в виде

$$|T(\omega)| \le \varepsilon(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{1.4}$$

где $\varepsilon(\omega)$ — заданная отделенная от нуля функция частоты, определяющая требуемую эффективность виброизоляции.

Кроме условия (1.4), виброизолирующая система должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям, обеспечивающим целостность всей системы. Таким условием может, например, являться условие заданной статистической жесткости системы в целом, использованное в [1, 2]. В публикуемой работе в качестве дополнительного условия принимается ограничение снизу на наименьшую из собственных частот системы ω_1:

$$\omega_1 \geq \omega_q \tag{1.5}$$

где ω_q — заданная положительная частота. Такое ограничение является традиционным в задачах оптимизации колебательных систем [3]. Кроме того, масса m_1 (масса изолируемого объекта) считается заданной. Другая постановка задачи с заданным m_1 предложена в монографии [4].

Анализ известных примеров виброизолирующих систем и физическая интуиция подсказывают, что полная масса системы $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, удовлетворяющей перечисленным свойствам, возрастает при повышении требований к эффективности виброизоляции вида (1.4), т. е. при уменьшении ε. В публикуемой работе дано доказательство и получена количественная оценка этого свойства рассматриваемого класса систем. Задача о предельных возможностях виброизоляции ставится, аналогично [1], как задача о минимуме полной массы системы.

Задача 1. Найти нижнюю грань величины

$$m = \mathrm{e}^T M \mathrm{e} \tag{1.6}$$

по всем диагональным матрицам M с положительными элементами главной диагонали, первый из которых m_1 известен, и положительно определенным симметрическим матрицам C любых конечных порядков, таким, что функция $T(\omega)$, определяемая формулой (1.3), удовлетворяет неравенству (1.4), где $\varepsilon(\omega)$ — заданная отделенная от нуля положительная функция, Ω — заданная область частот, и ограничена при $0 \leq \omega \leq \omega_q$ (или, что эквивалентно, наименьшая собственная частота задачи (1.1) удовлетворяет условию (1.5) с данным ω_q).

Замечание 1. Можно считать матрицу M произвольной симметричной положительно-определенной, однако при этом величину m_1 следует определить выражением $m_1 = 1/(\mathrm{e}_1 M^{-1} \mathrm{e}_1)$, согласующимся с высокочастотной асимптотикой динамической податливости системы.

2. Эквивалентная формулировка. Нетрудно показать [1], что коэффициент передачи $T(\omega)$ представляется в виде

$$T(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{1 - \omega^2/\omega_k^2} \tag{2.1}$$

Здесь ω_k — собственные частоты системы, z_k — коэффициенты, определяемые собственными формами:

$$z_k = x_k y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

где $x_k = \varphi_{1k}$ — элементы первой строки матрицы собственных форм Φ, нормированной условием $\Phi^T M \Phi = E$ (E — единичная матрица), $y_k = \psi_{1k} + \ldots + \psi_{nk}$ — элементы вектора-строки, равного сумме строк взаимной матрицы $\Psi = (\Phi^T)^{-1}$. Справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 1 \tag{2.3}$$

Общая масса системы m и масса m_1 однозначно определяются величинами x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$m = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \tag{2.4}$$

$$m_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-1} \tag{2.5}$$

Следующая задача [5] является подготовительной по отношению к задаче *1*.

Задача 2. Пусть коэффициент передачи линейно-упругой системы дается формулой (2.1) с заданными ω_k, z_k, удовлетворяющими тождеству (2.3); в точке приложения внешней силы (или в точке контроля перемещений при кинематическом возбуждении) сосредоточена масса m_1. Требуется определить наименьшую возможную общую массу такой системы.

Решение сводится к непосредственной минимизации величины (2.4) по x_k, y_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ с ограничениями (2.2), (2.5) при помощи функции Лагранжа. Получим $\min(m) = m_1 \varkappa^2$, где

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \tag{2.6}$$

Минимум массы достигается при значениях x_k, y_k, удовлетворяющих соотношениям

$$y_k^2 = m_1 |z_k| \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k| \right), \quad x_k = z_k / y_k \tag{2.7}$$

(выбор знака y_k не играет роли).

Замечание 2. Из полученного решения следует, что в задаче *1* достаточно ограничиться случаем различных ω_k. В самом деле, пусть в выражении (2.1) для $T(\omega)$ две частоты ω_k и ω_{k+1} совпадают. Функция $T(\omega)$ не изменится, если слагаемое с ω_{k+1} отбросить, а z_k заменить суммой $(z_k + z_{k+1})$. Согласно формуле (2.6), это приводит к системе равной или меньшей массы при той же функции $T(\omega)$, поскольку $|z_k + z_{k+1}| \le |z_k| + |z_{k+1}|$.

Из решения задачи *2* вытекает следующая эквивалентная формулировка задачи *1*.

Задача 3. Найти нижнюю грань величины $\varkappa$ (2.6) по всем конечным наборам чисел $\omega_k \ge \omega_q$ и z_k, удовлетворяющим условию (2.3) и неравенству

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{1 - \omega^2/\omega_k^2} \right| \le \varepsilon(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{2.8}$$

где $\varepsilon(\omega), \Omega, \omega_q > 0$ считаются заданными.

Нижняя грань величины $\varkappa$ равна нижней грани $(m/m_1)^{1/2}$ по всем линейно-упругим системам, удовлетворяющим (1.4), (1.5).

3. Оценка решения. Для построения оценки нижней грани снизу удобно перейти к двойственной задаче, в которой нахождение минимума заменяется нахождением максимума. С этой целью заметим сначала, что решение задачи *3* можно рассматривать как нижнюю грань по всевозможным наборам собственных частот ω_k следующей вспомогательной задачи.

Задача 4. Найти минимум величины (2.6) по всевозможным наборам из n действительных чисел z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющим условиям (2.3), (2.8), где n задано, ω_k — заданные различные положительные числа, Ω — заданная область положительной полуоси, не содержащая ω_k.

К этой задаче применима следующая теорема двойственности для задач чебышевской аппроксимации с ограничениями [6].

Теорема. Значение нижней грани в задаче аппроксимации с ограничениями

$$\left\|\xi' - \sum_{k=1}^{n} z_k \xi_k \right\|_E \to \inf, \quad \sum_{k=1}^{n} z_k a_k(\omega) \geq \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Omega_0)$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k a_{ik} = \sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{3.1}$$

где ξ_k, ξ' — элементы банахова пространства E, ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы, $a_k(\omega), \sigma(\omega)$ — непрерывные функции на компакте Ω_0, равенства (3.1) линейно независимы, совпадает со значением верхней грани в следующей двойственной задаче:

$$g(\xi') + \int_{\Omega_0} \sigma(\omega)\, d\lambda^+ + \sum_{i=1}^{r} \lambda \rho_i \longrightarrow \sup$$

$$g(\xi_k) + \int_{\Omega_0} a_k(\omega)\, d\lambda^+ + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ik} = 0$$

$$\|g\|_{E^*} \leq 1, \quad \lambda^+ \in V^+(\Omega), \quad g \in E^*$$

где sup берется по $g, \lambda^+, \lambda_i, E^*$ — двойственное пространство к E, а через $V^+(\Omega)$ обозначено множество неотрицательных счетно-аддитивных функций (мер) с ограниченным изменением на σ — алгебре борелевских подмножеств компакта Ω_0 [6].

Будем предполагать, что область виброизоляции Ω состоит из конечного числа интервалов, на каждом из которых функция $\varepsilon(\omega)$ непрерывна. Собственные частоты ω_k предполагаются различными (см. замечание *2*) и конечными. Тогда задача *4* удовлетворяет условиям теоремы двойственности с $\xi' = 0, \sigma(\omega) = -\varepsilon(\omega)$, а множество Ω_0 представляет собой два экземпляра области Ω: $\Omega_0 = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$, $a_k(\omega) = 1/(1 - \omega^2/\omega_k^2)$, $\lambda^+ = \lambda^{(1)}$ на $\Omega^{(1)}$; $a_k(\omega) = -1/(1 - \omega^2/\omega_k^2), \lambda^+ = \lambda^{(2)}$ на $\Omega^{(2)}$.

Двойственная задача имеет вид

$$\varkappa' = -\int_{\Omega} \varepsilon(\omega)\, [d\lambda^{(1)} + d\lambda^{(2)}] + \lambda_1 \longrightarrow \sup \tag{3.2}$$

$$g_k + \int_{\Omega} \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_k^2}\, [d\lambda^{(1)} - d\lambda^{(2)}] + \lambda_1 = 0 \tag{3.3}$$

$$|g_k| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

В (3.3) входит лишь разность двух мер на Ω, а в (3.2) — их сумма со знаком минус. Это позволяет ввести вместо двух функций одну, положив $d\lambda^{(1)} - d\lambda^{(2)} = d\lambda$, $d\lambda^{(1)} + d\lambda^{(2)} = |d\lambda|$. Выразим переменные g_k из равенства (2.12) и подставим в (3.4); λ_1 принимает максимальное значение, допускаемое полученным неравенством. После этих преобразований двойственная задача записывается в виде

$$\varkappa' = -\int_{\Omega} \varepsilon(\omega)\, |d\lambda| + \min_k \left[-\int_{\Omega} \frac{d\lambda}{1 - \omega^2/\omega_k^2} \right] + 1 \longrightarrow \sup \tag{3.5}$$

$$\operatorname*{Var}_k \left[\int_\Omega \frac{d\lambda}{1 - \omega^2/\omega_k^2} \right] \le 2 \tag{3.6}$$

где Var означает разность между максимальным и минимальным значениями.

Решение задачи *3* требует нахождения нижней грани решений задач (3.5), (3.6) по всевозможным наборам $[\omega_k]$, где $\omega_k \ge \omega_q$. При расширении множества $[\omega_k]$ множество допустимых λ в силу (3.6) может лишь сузиться, а входящий в (3.5) минимум на множестве $[\omega_k]$ может лишь уменьшиться. Следовательно, искомая верхняя грань (3.5) может лишь уменьшиться, если заменить конечное множество $[\omega_k]$ множеством всех допустимых значений собственных частот $\Omega' = [\omega_q, +\infty)\backslash\Omega$. Таким образом, оценка снизу решения задачи (3.5), (3.6) получится, если заменить ω_k переменной $\omega' \in \Omega'$.

Введем обозначения $\omega^2 = s$, $(\omega')^2 = p$; при этом Ω перейдет в область S, Ω' — в S'; $\varepsilon(\omega) = e(s)$, $\omega_q^2 = q$; ограничимся лишь теми λ, которые определяются достаточно гладкими функциями, так что $d\lambda = s^{-1}h(s)ds$, где $h(s)$ удовлетворяет условию Гельдера (это также может лишь уменьшить sup). Далее, удобно ввести функцию комплексного переменного

$$H(z) = \int_S \frac{h(s)\,ds}{s - z} \tag{3.7}$$

В результате получим оценку величины $\varkappa$ снизу $\varkappa \ge \varkappa_-$;

$$\varkappa_- = \sup_H \left[1 + \inf_{p \in S'} H(p) - H(0) - \frac{1}{\pi} \int_S e(s)\, |\operatorname{Im} H(s)|\, \frac{ds}{s} \right] \tag{3.8}$$

где верхняя грань берется по всем функциям $H(z)$, аналитическим в расширенной комплексной плоскости с разрезом вдоль S, непрерывным вплоть до S с граничными значениями, удовлетворяющими условию Гельдера на S, и принимающим на действительной оси вне S действительные значения, удовлетворяющие неравенству

$$\operatorname*{Var}_{p \in S'} H(p) \le 2 \tag{3.9}$$

которое вытекает из (3.6). Под $H(s)$, $s \in S$, понимается любое предельное значение $H(z)$ при $z \to s$.

Перечисленные требования к функции $H(z)$ удовлетворяются, если

$$H(z) = 1 - \cos\left[\sqrt{z - q}\, F(z)\right] \tag{3.10}$$

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{f(s)\,ds}{s - z} \tag{3.11}$$

где $f(s)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на S. Представление $H(s)$ в виде (3.10) позволяет оценить величину $\varkappa$ снизу решением задачи на безусловный максимум. Предположим, что область виброизоляции лежит выше минимального допустимого значения собственной частоты, т. е. $\omega_a \ge \omega_q$, где ω_a — нижняя граница области Ω. Тогда, пользуясь соотношениями (3.7), (3.8), (3.10), (3.11) и формулами Сохоцкого — Племеля, можно записать эту оценку в виде $\varkappa \ge \varkappa_-'$, где

$$\varkappa_-' = \sup_f \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{q}}{\pi} \int_S \frac{F(s)\,ds}{s} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_S e(s) \left| \operatorname{sh}\left(\sqrt{s - q}\, f(s)\right) \sin\left(\frac{\sqrt{s - q}}{\pi} \int_S \frac{f(s)\,ds}{s - t} \right) \right| \frac{ds}{s} \right] \tag{3.12}$$

Выражение под знаком sup дает оценку $\varkappa$ снизу при любой пробной функции f. Необходимо выбрать f так, чтобы получить из (3.12) возможно более сильную оценку, отражающую возрастание $\varkappa$ при малых e. Непосредственное варьирование функции $f(s)$ в (3.12) затруднительно, поэтому $f(s)$ разыскивается из условия экстремума упрощенного выражения, полученного в предположении, что $f(s)$ принимает достаточно большие значения, путем замены модуля быстро осциллирующего синуса в правой части (3.12) его средним по полупериоду значением $2/\pi$. Варьирование этого упрощенного выражения приводит к трансцендентному уравнению относительно функции $f(s)$. Воспользовавшись снова предположением о том, что значения $f(s)$ достаточно велики, и заменив в этом уравнении гиперболические функции экспонентой, можно выразить $f(s)$ через $e(s)$ в следующем явном виде:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{s-q}} \ln \frac{c\pi\sqrt{q}}{e(s)\sqrt{s-q}}, \quad s \in S \tag{3.13}$$

$$c = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\sqrt{q}}{\pi V} \int_S \ln \frac{\pi\sqrt{q}}{2e(s)\sqrt{s-q}} \frac{ds}{s\sqrt{s-q}} \right)$$

$$V = 1 - \frac{\sqrt{q}}{\pi} \int_S \frac{ds}{s\sqrt{s-q}}$$

Подстановка (3.13) в выражение под знаком sup (3.12) дает искомую оценку снизу величины $\varkappa$, а следовательно и $(m/m_1)^{1/2}$:

$$(m/m_1)^{1/2} \geq Vc + \tfrac{1}{4} c^{-1} + r + O(e^2) \tag{3.14}$$

где через $O(e^2)$ обозначены квадратуры от функций, пропорциональных $[e(t)]^2$, очевидно, пренебрежимо малые при малых e; r — остаточный член, обусловленный заменой модуля быстро осциллирующей функции его средним значением $2/\pi$:

$$r = \frac{c\sqrt{q}}{2} \int_S \left[\frac{2}{\pi} - \left| \sin \left(\frac{\sqrt{s-q}}{\pi} \int_S \frac{f(s)\,ds}{s-t} \right) \right| \right] \frac{ds}{s\sqrt{s-q}}$$

Асимптотическая оценка [1] величины r показывает, что с учетом выражения (3.13) $r = cO(1/|\ln e_0|)$, если $e(s) = e_0 e_1(s)$, где $e_1(s)$ — фиксированная функция, $e_0 \to 0$.

Первое слагаемое в правой части (3.14) дает главный член асимптотики при малых ε. В прежних переменных имеем

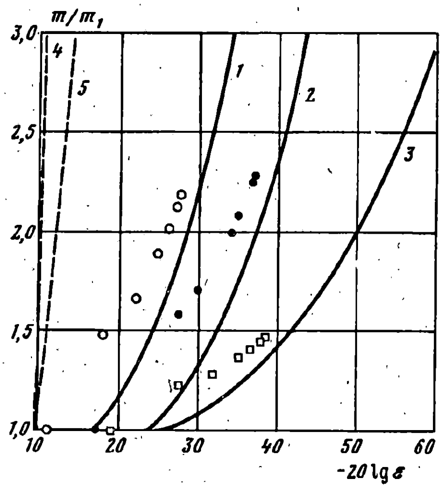
$$\left(\frac{m}{m_1}\right)^{1/2} \geq \frac{V}{2} \exp \left[\frac{2\omega_q}{\pi V} \int_\Omega \ln \left(\frac{\pi\omega_q}{2\varepsilon(\omega)\sqrt{\omega^2-\omega_q^2}} \right) \frac{d\omega}{\omega\sqrt{\omega^2-\omega_q^2}} \right] (1+\alpha)$$

$$V = 1 - \frac{2\omega_q}{\pi} \int_\Omega \frac{d\omega}{\omega\sqrt{\omega^2-\omega_q^2}} \tag{3.15}$$

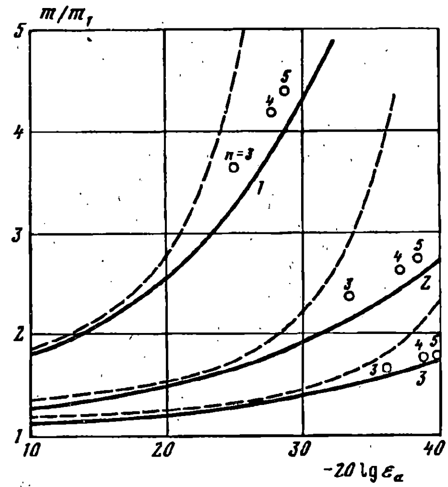
причем $\alpha = O(1/|\ln \varepsilon_0|)$, если $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_1(\omega)$ — заданная функция, $\varepsilon_0 \to 0$.

Полученная оценка ограничивает возможные величины m/m_1 снизу. Важно определить точность этой оценки, т. е. выяснить, существуют ли механические системы с параметрами, приближающимися к найденным пределам. Приведенный вывод оценки решения двойственной задачи содержит указания на способ построения таких систем. Действуя аналогично [2], разместим собственные частоты

[1] *Рябой В. М.* Предельные возможности и оптимальные структуры упругоинерционных виброизолирующих систем: Дис. д-ра физ.-мат. н. М., 1988. С. 100—102.



Фиг. 1



Фиг. 2

системы в точках экстремума функции $H(p)$, т. е. возьмем в качестве частот $\omega_k (k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$ конечное число решений уравнения

$$|\cos(\sqrt{\omega^2 - \omega_q^2}\,F(\omega^2)| = 1 \qquad (3.16)$$

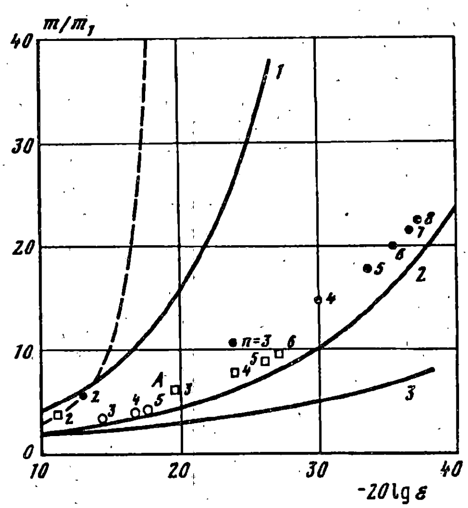
Затем функция $T(\omega)$ определяется в виде (2.1) с помощью алгоритмов аппроксимации. Например, при $\varepsilon = \mathrm{const}$ функция $T(\omega)$ разыскивается как функция, наименее уклоняющаяся от нуля на Ω. После этого определяются параметры x_k, y_k по формулам (2.8), и строятся матрицы M, C, а также динамические схемы путем решения обратной задачи механики, подробно описанного в [3].

4. **Примеры.** Пусть $\varepsilon = \mathrm{const}, \Omega = [\omega_a, \varphi_b], \omega_q < \omega_a$. Тогда в результате вычислений по формуле (3.14) получаются оценки, показанные на фиг. 1 сплошными линиями. Кривая *1* соответствует $\omega_a/\omega_q = 1,4$ и $\omega_b/\omega_a = 2$; кривая *2* — $\omega_a/\omega_q = 2$ и $\omega_b/\omega_a = 4$; кривая *3* — $\omega_a/\omega_q = \omega_b/\omega_a = 2$. Штриховые линии построены для обычного виброизолятора с динамическим гасителем колебаний, отвечающего условиям $|T(\omega)| \leq \varepsilon(\omega_a \leq \omega \leq \omega_b), \omega_1 = \omega_q$ при $\omega_a/\omega_q = 2, \omega_b/\omega_a = 4$ (кривая *4*) и $\omega_a/\omega_q = \omega_b/\omega_a = 2$ (кривая *5*). Значками показаны три последовательности точек, полученные в результате построения механических систем с параметрами, приближающимися к предельно возможным. Собственные частоты определялись из уравнения (3.16) при $\omega_a/\omega_q = 1,4; \omega_b/\omega_a = 2; \varepsilon = 0,316$ (светлые точки), при $\omega_a/\omega_q = 2; \omega_b/\omega_a = 4; \varepsilon = 0,01$ (темные точки) и при $\omega_a/\omega_q = 2; \omega_b/\omega_a = 2; \varepsilon = 0,01$ (квадраты). В каждом случае n изменялось от 2 (на оси абсцисс) до 8. Результаты расчетов показывают, что уже при небольших значениях n различие между эффективностью синтезированных систем и теоретической оценкой предельных возможностей мало по сравнению с соответствующей разностью для традиционных систем той же массы.

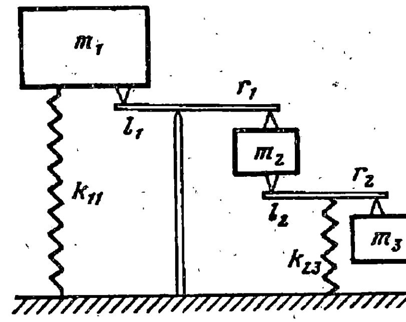
Для примера точного сравнения предельных возможностей рассматриваемого класса систем с возможностями простейших схем возьмем в качестве функции $\varepsilon(\omega)$ коэффициент передачи двухкаскадной системы виброизоляции в зарезонансной области:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \qquad (\omega_a \leq \omega < \infty)$$

где $\omega_1 < \omega_2 < \omega_a$. Приняв $\omega_1 = \omega_q$, нетрудно показать, что $\omega_2^2 = \omega_a^2\varepsilon_a(\omega_a^2 - \omega_q^2)/[\omega_q^2 + \varepsilon_a(\omega_a^2 - \omega_q^2)]$, где величина $\varepsilon_q = \varepsilon(\omega_a)$ может служить ме-



Фиг. 3



Фиг. 4

рой виброизоляции. Наименьшая общая масса m двухкаскадной системы при заданных m_1, ω_1, ω_2 является функцией ε_a и ω_a/ω_q. Графики этой функции показаны на фиг. 2 штриховыми линиями. Результаты оценки предельных возможностей по формуле (3.14) показаны на фиг. 2 сплошными линиями. Кривые *1* соответствуют $\omega_a/\omega_q = 3$, кривые *2* — $\omega_a/\omega_q = 4$, кривые *3* — $\omega_a/\omega_q = 5$. Светлыми точками показаны результаты синтеза систем методом, аналогичным использованному в предыдущем примере; цифры рядом с точками показывают значения n. Собственные частоты определялись из уравнения (3.16) при $\omega_q = \omega_1 \le \omega < \omega_a$. Для определения функции $T(\omega)$ применялся алгоритм Ремеза [7], модифицированный применительно к случаю бесконечного интервала. С помощью этого алгоритма функция $T(\omega)$ подбиралась так, чтобы неравенство $|T(\omega)|/\varepsilon(\omega)| \le 1$ выполнялось при наименьшем возможном ε_a. Приведенные данные показывают, что уже при небольших n эффективность синтезированных систем близка к полученной оценке предельной эффективности и значительно превышает эффективность простейшей двухкаскадной системы в заданном диапазоне частот.

5. Виброизоляция в дорезонансной области. Как правило, механические системы обладают свойствами виброизоляции в зарезонансной области частот. Значительный интерес вызывает вопрос о том, возможна ли дорезонансная виброизоляция, т. е. можно ли построить механическую систему, обладающую свойством виброизоляции в области частот, меньших первой собственной частоты этой системы [8]. Примеры таких систем приведены в [3], однако вопрос о предельных возможностях виброизоляции в дорезонансной области частот не исследован. С точки зрения условий задачи *1* требование дорезонансной виброизоляции означает, что область виброизоляции Ω лежит (полностью или частично) левее граничной частоты ω_q. В этом случае проведенные выше рассуждения остаются в силе вплоть до выражения (3.12), которое при $\Omega \subset [0, \omega_q]$ принимает вид

$$\varkappa_-' = \sup_f \Bigg[\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{q}}{\pi}\int_S \frac{f(s)\,ds}{s}\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_S e(s) \left| \sin\left(\sqrt{q-s}\, f(s)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{q-s}}{\pi}\int_S \frac{f(s)\,ds}{s-t}\right)\right| \frac{ds}{s}\Bigg]$$

и дальнейшие выкладки несколько усложняются. Однако существует частный случай, в котором полученную выше оценку можно использовать практически без изменений. Именно, предположим, что $\Omega = [\omega_a, \omega_b]$, $\omega_a = \omega_q$. Тогда выкладки п. 3 остаются справедливыми, но фактически выполняется условие $\omega_1 \geq \omega_b$. Таким образом, общая масса системы, удовлетворяющей условиям $|T(\omega)| \leq \varepsilon(\omega_a \leq \omega \leq \omega_b)$, $\omega_1 \geq \omega_b$, оценивается снизу неравенствами (3.14), (3.15), где $\Omega = [\omega_a, \omega_b]$, $\omega_q = \omega_a$. Результаты вычислений при $\varepsilon = \mathrm{const}$ показаны на фиг. 3 сплошными линиями. Кривым *1*, *2*, *3* соответствуют параметры $\omega_b/\omega_a = 1{,}2$; 1,1; 1,05. Штриховая линия соответствует случаю $\omega_b/\omega_a = 1{,}1$ для простейшей системы с нулем коэффициента передачи в дорезонансной области ($n = 2$), значки — результатам синтеза при помощи той же процедуры, что и в первом примере (цифры указывают значения n). Динамическая схема одной из синтезированных систем (точка A на фиг. 3) приведена на фиг. 4. Здесь $m_1 = 1$; $m_2 = 4{,}654$; $m_3 = 0{,}610$; $k_{11} = 4{,}942 m_1\omega_a^2$; $k_{23} = 1{,}287 m_1\omega_a^2$; $l_1/r_1 = 1{,}52$; $l_2/r_2 = 3{,}74$.

Представленные результаты показывают, что построение системы с собственными частотами, лежащими выше области виброизоляции (даже если эта область очень узкая), требует использования большой дополнительной массы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рябой В. М.* О наименьшей массе упругоинерционных виброизолирующих систем//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 59—67.
2. *Рябой В. М.* О предельных возможностях упругоинерционной виброзащиты//Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 37—44.
3. *Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 260 с.
4. *Генкин М. Д., Рябой В. М.* Упругоинерционные виброизолирующие системы. Предельные возможности, оптимальные структуры.— М.: Наука, 1988. 191 с.
5. *Рябой В. М.* Некоторые обратные и оптимальные задачи для линейных виброзащитных систем//Акустический журнал. 1984. Т. 30, № 5. С. 711—712.
6. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
7. *Ланнэ А. А.* Оптимальный синтез линейных электрических цепей. М.: Связь, 1969. С. 66—68.
8. *Елисеев С. В., Нерубенко Г. П.* Динамические гасители колебаний.— Новосибирск: Наука, 1982. 144 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1991