МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 531.381

© 1993 г. Н. К. МОЩУК, И. Н. СИНИЦЫН

О ФЛУКТУАЦИЯХ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Рассматривается движение твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Эйлера. Предполагается, что на тело со стороны случайной среды действуют некоторый случайный момент типа нормального белого шума и диссипативный момент. Получены достаточные условия существования стационарного в узком смысле распределения. Для некоторых частных случаев найдены точные выражения для всех конечномерных распределений вектора кинетического момента и кинетической энергии.

1. Рассмотрим движение твердого тела с одной неподвижной точкой в случайной среде, предполагая, что на тело со стороны среды действуют некоторый случайный и диссипативный моменты. Ограничимся случаем, когда центр масс тела совпадает с неподвижной точкой (случай Эйлера). Уравнения движения тела в жестко связанной с ним системе координат имеют вид

$$\mathbf{I}\omega^{\cdot} + \omega \times \mathbf{I}\omega = -\Phi\omega + \mathbf{V} \tag{1.1}$$

Здесь $\omega \in R^3$ — вектор угловой скорости, $\mathbf{I}$ — оператор инерции, Φ — некоторый положительно определенный оператор диссипации (в общем случае несамосопряженный), $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ — случайный момент. Пусть $\mathbf{V} = [V_1,\ V_2,\ V_3]^T$ представляет собой вектор нормальных белых шумов с постоянной матрицей интенсивности $\nu = [\nu_{ij}](i, j = 1, 2, 3)$. Тогда уравнения (1.1) представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито [1].

Если динамические уравнения (1.1) дополнить кинематическими уравнениями Пуассона

$$\gamma^{\cdot} + \omega \times \gamma = 0 \tag{1.2}$$

где $\gamma \in S^2$ — вектор направляющих косинусов некоторого постоянного в неподвижном пространстве направления, то уравнения (1.1) и (1.2) будут образовывать систему стохастических дифференциальных уравнений для вектора состояния $[\omega^T \gamma^T]^T$ на $R^3 \times S^2$.

Заметим, что источниками случайных воздействий, например, в задачах динамики полета могут служить: атмосферная турбулентность, акустическое излучение работающих двигателей; в гидродинамике судов — морское волнение; в измерительных приборах — шумы датчиков и т. д. В дальнейшем будем рассматривать лишь такие движения, для которых случайный момент $\mathbf{V}$ не зависит от γ и ω, т. е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$.

Поставим задачу о нахождении стационарных в узком смысле распределений флуктуаций в системе (1.1) (т. е. когда все конечномерные распределения зависят только от разностей аргументов $t_1, \ldots, t_n$). Другими словами, найдем условия существования и точные выражения для распределений, отвечающих классическому случаю Эйлера распределения масс в твердом теле. В дальнейшем для матриц операторов будут использоваться такие же обозначения, как и для самих операторов.

Утверждение 1. Если оператор диссипации Ф представим в виде

$$\Phi = \nu(\lambda E + \mu I) \qquad (1.3)$$

где E — единичный оператор, λ и μ — вещественные числа, такие, что оператор $\lambda I + \mu I^2$ является положительно определенным, то стационарный в узком смысле режим флуктуаций в системе (1.1) существует, а его одномерная плотность $f(\omega)$ является нормальной и определяется формулой

$$f(\omega) = c \exp(-\omega^T \Lambda \omega) \qquad (1.4)$$

$$c = (2\pi)^{-3/2} |\Lambda|^{1/2}, \quad \Lambda = \lambda I + \mu I^2 = I\nu^{-1}\Phi$$

Доказательство. Формально доказательство утверждения 1 можно провести непосредственной подстановкой функции (1.4) в стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова. Однако тогда был бы не ясен механизм возникновения плотности (1.4). Поэтому воспользуемся утверждением 1 из [2] о необходимых и достаточных условиях существования стационарных в узком смысле режимов в стохастических дифференциальных системах. Функция $f(\omega)$ будет одномерной плотностью стационарного в узком смысле распределения, если она является плотностью конечной инвариантной меры невозмущенной системы

$$I\omega^{\cdot} + \omega \times I\omega = -\Phi\omega - 1/2\nu \ \ \partial \ln f / \partial I\omega = -\Phi\omega + \nu(\lambda E + \mu I)\omega = 0$$

в качестве которой в рассматриваемом случае принята классическая система Эйлера — Пуансо, инвариантные меры которой (вследствие ее интегрируемости) хорошо известны. Таким образом, как и было предложено в [2], функция — $\ln f$ была найдена в виде связки Четаева интегралов энергии $T = \omega^T I\omega / 2$ и квадрата вектора кинетического момента $K = I\omega$. Найденное стационарное распределение переходит в известное распределение Гиббса [3] при $\mu = 0$.

Заметим, что интересной особенностью этой нелинейной задачи является наличие стационарного режима флуктуаций с нормально распределенными компонентами угловой скорости.

Частный случай существования стационарного режима при $\mu = 0$ отмечен в [4], а при $\mu = 0$, $A = B$ — в [5, 6]. Флуктуации гироскопа в кардановом подвесе изучались в [7].

Утверждение 1 остается справедливым и в случае, когда матрица ν вырожденная, т. е. когда случайный момент относительно некоторой оси в теле отсутствует. При этом выражения (1.3) и (1.4) остаются без изменений, за исключением последнего равенства в (1.4), которое не имеет места.

Аналогично утверждению 1 доказывается

Утверждение 2. При выполнении условий утверждения 1 стационарный в узком смысле режим флуктуаций существует и в системе (1.1), (1.2), а его одномерная плотность равна $f_*(\omega, \gamma) = f(\omega)/(4\pi)$.

В этом случае флуктуации переменных γ и ω будут статистически независимы, а относительно γ получаем равномерное распределение на сфере с постоянной плотностью $(4\pi)^{-1}$.

Заметим, что найденное стационарное распределение флуктуаций единственное и эргодическое, т. е. является предельным для любого начального распределения [4]. При выполнении условий утверждений 1 и 2 флуктуации будут статистически обратимыми в смысле А. М. Яглома [4].

Рассмотрим несколько важных частных случаев утверждения 1, отвечающих различным моделям случайной среды.

2. Пусть диссипативная функция Релея пропорциональна кинетической энергии тела, т. е. $\Phi = \varphi_0 I$ ($\varphi_0 = \mathrm{const}$) [8]. В этом случае $\lambda = 0$ и уравнения движения в проекциях на главные оси инерции тела примут вид

$$Ap^{\cdot} + (C - B)\,qr = -\varphi_0 Ap + V_1 \qquad (2.1)$$

$$Bq^\cdot + (A - C)\,pr = -\varphi_0 Bq + V_2$$

$$Cr^\cdot + (B - A)\,pq = -\varphi_0 Cr + V_3$$

Примем сначала, что интенсивность всех шумов одинакова $\nu = \nu_0 \mathrm{E}$, $\nu_0 = \mathrm{const}$. Заметим, что в этом случае вид случайного момента не изменяется при переходе к любой другой прямоугольной системе координат (той же ориентации, что и исходная). Это следствие того, что переход от одной системы координат к другой задается ортогональной матрицей. Из утверждения 1 тотчас вытекает следующее выражение для одномерной плотности стационарного режима флуктуаций составляющих угловой скорости

$$f(p, q, r) = c \exp(-\varphi_0 \eta/\nu_0), \quad \eta \equiv \mathbf{K}^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

$$c = [\varphi_0/(\pi\nu_0)]^{3/2} ABC$$

Однако в этом случае можно утверждать большее. В самом деле, перейдем в неподвижную систему координат. Тогда уравнения движения (2.1) станут линейными и примут вид

$$\mathbf{K}^\cdot = -\varphi_0 \mathbf{K} + \mathbf{V}, \quad \mathbf{K}(t_0) = \mathbf{K}_0 \tag{2.2}$$

Для системы (2.2) можно выписать все стационарные и нестационарные конечномерные распределения флуктуаций [1] как для случая, когда $\mathbf{V}$ — вектор нормальных белых шумов, так и для случая, когда $\mathbf{V}$ — слабая средняя квадратическая производная любого процесса с независимыми приращениями.

Ограничимся здесь выражением для n-мерной характеристической функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ флуктуационного процесса $K_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ при нормально распределенном белом шуме $\mathbf{V}$:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\varphi_0 t_k}\lambda_k\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\nu_0}{4\varphi_0} \sum_{h,l=1}^{n} \left(e^{-\varphi_0|t_h - t_l|} - e^{-\varphi_0(t_h + t_l)}\right)\lambda_h\lambda_l\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Здесь $g_0(\lambda)$ — характеристическая функция начального значения $K_i(t_0)$ $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда видно, что математическое ожидание вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ экспоненциально стремится к нулю, $M\mathbf{K} \to 0$, а дисперсия составляющих K_i, DK_i — к константе $\nu_0/(2\varphi_0)$. В системе (2.2) с течением времени устанавливается стационарный флуктуационный режим. Выпишем для него соответствующую плотность распределения квадрата вектора кинетического момента $\eta = \mathbf{K}^2$. Используя формулу плотности функции случайного аргумента [9], получаем

$$f_\eta(\eta) = (\varphi_0/\nu_0)^{3/2}\Gamma^{-1}(3/2)\sqrt{\eta}\exp(-\varphi_0\eta/\nu_0) \quad (\eta \geq 0)$$

где Γ — гамма-функция. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины η равны соответственно $M\eta = 3\nu_0/(2\varphi_0)$ и $D\eta = 3\nu_0/(4\varphi_0)$.

3. Пусть по-прежнему $\Phi = \varphi_0 \mathrm{I}$, а интенсивность ν белого шума пропорциональна тензору инерции I, т. е. $\nu = \nu_0 \mathrm{I}$ $(\nu_0 = \mathrm{const})$. В этом случае $\mu = 0$ и из утверждения 1 следует, что существует стационарный режим флуктуаций и его одномерная плотность определяется формулой Гиббса

$$f(p, q, r) = c \exp\left(-\frac{2\varphi_0}{\nu_0} T\right), \quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad c = \sqrt{ABC}\left(\frac{\varphi_0}{\pi\nu_0}\right)^{3/2}$$

В этом случае, кроме того, можно найти точные выражения для n-мерных характеристических функций величины кинетической энергии T. Для этого перейдем в (2.1) от угловых скоростей p, q, r к специальным координатам $\mathbf{Z} = [T, \alpha, \beta]^T$ по формулам

$$\sqrt{A}\ p = \sqrt{2T} \sin\alpha \cos\beta, \quad \sqrt{B}\ q = \sqrt{2T} \sin\alpha \sin\beta, \quad \sqrt{C}\ r = \sqrt{2T} \cos\alpha.$$

В результате, с учетом формулы Ито [1] для вычисления дифференциала сложной функции переменных, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению Ито, получаем

$$\mathbf{Z}^{\cdot} = \mathrm{a}(\mathbf{Z}) + \mathrm{b}(\mathbf{Z})\,\mathrm{V}(t), \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0 \tag{3.1}$$

где $\mathrm{a} = [a_1(T),\ a_2(\mathbf{Z}),\ a_3(\mathbf{Z})]^T$ и $\mathrm{b} = \mathrm{b}(\mathbf{Z})$ — матричные функции, причем

$$a_1 = -2\varphi_0 T + 3\nu_0/2, \quad a_2 = (B - A)\sqrt{2T} \sin\alpha \sin\beta \cos\beta / \sqrt{ABC} + \nu_0 \operatorname{ctg}\alpha/(2T)$$

$$a_3 = [(C - B)\sin^2\beta + (C - A)\cos^2\beta] \cos\alpha / \sqrt{2TABC}$$

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2T}\sin\alpha\cos\beta & \sqrt{2T}\sin\alpha\sin\beta & \sqrt{2T}\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta/\sqrt{2T} & \cos\alpha\sin\beta/\sqrt{2T} & -\sin\alpha/\sqrt{2T} \\ -\sin\beta/(\sqrt{2T}\sin\alpha) & \cos\beta/(\sqrt{2T}\sin\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{b}\nu\mathrm{b}^T = \operatorname{diag}\nu_0\ [2T, (2T)^{-1}, (2T\sin^2\alpha)^{-1}]$$

Так как все конечномерные распределения вектора $\mathbf{Z}$ в (3.1) зависят только от функций a и $\mathrm{b}\nu\mathrm{b}^T$, то в уравнениях (3.1) можно заменить b на $\mathrm{b} = \operatorname{diag}\nu_0\ [\sqrt{2T},\ 1/\sqrt{2T},\ 1/(\sqrt{2T}\sin\alpha)]$. Вследствие этого скалярное уравнение для кинетической энергии T отделяется от уравнений для α, β и имеет вид

$$T^{\cdot} = -2\varphi_0 T + 3\nu_0/2 + \sqrt{2T}\ V_1, \quad T(t_0) = T_0 \tag{3.2}$$

где V_1 — нормальный белый шум интенсивности ν_0.

Соответствующее (3.2) известное уравнение Пугачева для n-мерной характеристической функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ случайного процесса $T(t)$, описываемого уравнением (3.2), и соответствующие начальные условия имеют вид [1, 10]:

$$\partial g_n/\partial t_n = \lambda_n(-2\varphi_0 + i\nu_0\lambda_n)\,\partial g_n/\partial\lambda_n + 3/2\, i\nu_0\lambda g_n \tag{3.3}$$

$$g_1(\lambda; t_0) = g_0(\lambda), \quad g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) =$$

$$= g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1} + \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1})$$

где $g_0(\lambda)$ — характеристическая функция начального значения $T_0 = T(t_0)$, представляющего случайную величину, независимую от значений белого шума $V_1(t)$ при $t \geq t_0$.

Линейное уравнение в частных производных первого порядка (3.3) интегрируется стандартным методом. В результате получаем

$$g_1(\lambda; t) = g_0(\lambda e^{-2\varphi_0(t-t_0)}\psi^{-1}(\lambda, t - t_0))\psi^{-3/2}(\lambda, t - t_0)) \tag{3.4}$$

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1} + \lambda_n e^{-2\varphi_0(t_n - t_{n-1})}\psi^{-1}(\lambda_n, t_n - t_{n-1});$$

$$t_1, \ldots, t_{n-1})\,\psi^{-3/2}(\lambda_n, t_n - t_{n-1})$$

$$\psi(\lambda, \tau) = 1 - i\lambda\nu_0(1 - e^{-2\varphi_0\tau})/(2\varphi_0) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

Если предположить, что в начальный момент времени переменные $p(t_0)$, $q(t_0)$, $r(t_0)$ распределены нормально с нулевыми математическими ожиданиями и с ковариационной матрицей, пропорциональной Γ^{-1}, то $g_0(\lambda) = (1 - i\lambda\delta)^{-3/2}$ (δ = const) и для $g_1(\lambda;\,t)$ можно получить следующее выражение

$$g_1(\lambda;\,t) = \left[1 - i\lambda\,\frac{\nu_0}{2\varphi_0} + i\lambda\,\left(\frac{\nu_0}{2\varphi_0} - \delta\right)\,e^{-2\varphi_0(t-t_0)}\right]^{-3/2} \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) видно, что с течением времени устанавливается стационарный режим флуктуаций с характеристической функцией $g_1(\lambda) = (1 - i\lambda\nu_0/2\varphi_0)^{-3/2}$, соответствующей χ^2 — распределению с тремя степенями свободы [9].

Для математического ожидания m, дисперсии D и начального момента второго порядка α переменной T получаются следующие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$m^{\cdot} = -2\varphi_0 m + 3\nu_0/2,\quad \alpha^{\cdot} = -4\varphi_0\alpha + 5\nu_0 m,\quad D^{\cdot} = -4\varphi_0 D + 2\nu_0 m$$

4. В случае произвольных I, Ф, ν найти условия существования и точные выражения для одномерной плотности стационарного в узком смысле распределения флуктуаций на удается. Заметим, что в случае полной диссипации ($|\Phi| \neq 0$) существование предельного стационарного режима следует из теоремы Хасьминского [11] (в качестве функции Ляпунова можно взять кинетическую энергию тела T).

Для анализа процессов в стохастической системе (1.1) в общем случае можно использовать приближенные методы [1, гл. 6]. Проиллюстрируем это на примере уравнения (1.1) в случае, когда собственные векторы операторов I, Ф, ν одинаково направлены (но собственные значения, вообще говоря, различны). Тогда уравнения движения в главных осях инерции тела имеют вид

$$\begin{gathered} p^{\cdot} = e_1 qr - \varphi_1 p + V_1,\quad q^{\cdot} = e_2 pr - \varphi_2 q + V_2 \\ r^{\cdot} = e_3 pq - \varphi_3 r + V_3,\quad e_1 = (B - C)/A \\ e_2 = (C - A)/B,\quad e_3 = (A - B)/C \end{gathered} \tag{4.1}$$

где φ_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) — удельные коэффициенты вязкого трения, V_i — удельные случайные моменты, представляющие собой независимые нормальные белые шумы постоянной интенсивности ν_i. К системе (4.1) утверждения 1 и 2 не применимы и для нахождения стационарных в узком смысле режимов флуктуаций будем использовать метод моментов [1]. Из (4.1) следует такая бесконечная система уравнений для начальных моментов $\alpha_{nmk} = M\,p^n\,q^m\,r^k$ ($n,\ m,\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$):

$$\begin{aligned} \alpha_{nmk}^{\cdot} = &-(n\varphi_1 + m\varphi_2 + k\varphi_3)\,\alpha_{nmk} + ne_1\alpha_{n-1,m+1,k+1} + me_2\alpha_{n+1,m-1,k+1} + ke_3\alpha_{n+1,m+1,k-1} + \\ &+ 1/2\nu_1 n\,(n-1)\,\alpha_{n-2,m,k} + 1/2\nu_2 m\,(m-1)\,\alpha_{n,m-2,k} + 1/2\nu_3 k\,(k-1)\,\alpha_{n,m,k-2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

В стационарном режиме все $\alpha_{nmk}^{\cdot} = 0$. При применении метода моментов до некоторого порядка N включительно необходимая конечная система уравнений выводится замыканием первых $(N+3)!/(N!3!) - 1$ уравнений бесконечной системы (4.2) соотношениями, выражающими моменты порядка $N+1$ через моменты низших порядков. Для этого в качестве аппроксимирующей плотности $f(p,\ q,\ r,\ t)$ функции можно взять конечный отрезок ее ортогонального разложения по полиномам Эрмита [1, с. 365].

Нетрудно проверить, что если ограничиться моментами до второго порядка включительно, то полученная таким образом конечная система имеет асимптотически устойчивую точку $\alpha_{100} = \alpha_{010} = \alpha_{001} = \alpha_{110} = \alpha_{101} = \alpha_{011} = 0$, $\alpha_{200} = \nu_1/(2\varphi_1)$, $\alpha_{020} = \nu_2/(2\varphi_2)$, $\alpha_{002} = \nu_3/(2\varphi_3)$. Аналогичный результат можно получить и при учете моментов до четвертого порядка включительно.

Полученные результаты подтверждены вычислительными экспериментами, выполненными с помощью разработанного программного обеспечения «СтС — Анализ» и «Момент» [1, 12], и могут быть использованы для решения обратных задач статистической динамики твердого тела, в частности, по идентификации параметров: моментов инерции, интенсивностей белого шума, коэффициентов диссипации (см., например, [13, 14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.
2. *Мощук Н. К., Синицын И. Н.* О стационарных и приводимых к стационарным режимах в нормальных стохастических дифференциальных системах//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 895—903.
3. *Гиббс Дж.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
4. *Яглом А. М.* О статистической обратимости броуновского движения//Мат. сб. 1949. Т. 24. Вып. 3. С. 457—492.
5. *Крутков Ю. А.* Об одном частном случае броуновского вращательного движения//Докл. АН СССР. 1934. Т. 3. N 3. С. 153—159.
6. *Крутков Ю. А.* Броуновское вращательное движение частицы с осью симметрии//Докл. АН СССР. 1935. Т. 1. N 6. С. 366—371.
7. *Синицын И. Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. N 3. С. 23—31.
8. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
9. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.
10. *Siluynova I. D.* The finite-dimensional distributions of the outputs of one class of non-linear systems//Probl. Control and Inform. Theory. 1982. V. 11. N 6. P. 407—418.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
12. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Интеллектуализированные программные средства для исследования стохастических систем//Фундаментальные науки — народному хозяйству. М.: Наука, 1990. С. 141—142.
13. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978, 352 с.
14. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1991