

УДК 531.35:539.374

© 1993 г. Е. В. СИНИЦЫН

**О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ТЕЛА  
 НА ЕГО БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ**

Исследуется эволюция быстрых вращений динамически симметричного вязкоупругого тела на круговой орбите. Материал тела моделируется многопараметрической моделью линейной теории вязкоупругости. Предполагается, что период свободных упругих колебаний тела и время их затухания много меньше характерного времени обращения тела вокруг центра масс. При помощи метода усреднения получены и исследованы уравнения, описывающие эволюцию движения в переменных Андуайе. Показано, что вязкоупругие свойства материала существенно влияют на характеристики эволюции движения.

1. Модель материала. Уравнения движения и метод исследования. Эволюция быстрых вращений некоторых вязкоупругих тел и твердых тел, несущих вязкоупругие элементы, рассматривалась в [1—3]. Материал тела предполагался удовлетворяющим модели Кельвина — Фогта и предполагалось, что характерное время затухания упругих колебаний тела много больше их характерного периода. Ниже указанное предположение не вводится и используется более общая модель линейной теории вязкоупругости. Показано, что свойства материала влияют как на количественные, так и на качественные характеристики эволюции движения рассматриваемого объекта.

Рассмотрим однородное изотропное вязкоупругое тело плотности  $\rho$  из материала со следующими свойствами [4]. Коэффициент Пуассона  $\nu$  является постоянным. Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости при малых деформациях [5—7] запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} &= \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \left( E \epsilon_{kk} + \eta \dot{\epsilon}_{kk} + \int_0^t \mu(t-\xi) \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \xi} d\xi \right) \\ s_{ij} &= 2 \left( E e_{ij} + \eta \dot{e}_{ij} + \int_0^t \mu(t-\xi) \frac{\partial e_{ij}}{\partial \xi} d\xi \right) \\ \mu(t-\xi) &= \sum_{l=1}^M G_l \exp \left( -\frac{t-\xi}{\tau_l} \right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

В выражениях (1.1)  $\sigma_{kk}$ ,  $\epsilon_{kk}$  и  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  шаровые части и компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно;  $\mu(t-\xi)$  — функция релаксации;  $E$ ,  $\eta$ ,  $G_l$ ,  $\tau_l$  ( $l=1, \dots, M$ ) — константы, характеризующие свойства материала.

пусть  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  — инерциальная система координат с началом в притягивающем центре и центр масс  $S$  тела движется относительно  $O$  по круговой орбите, лежащей в плоскости  $O\xi_1\xi_2$  ( $\omega_0$  — орбитальная угловая скорость центра масс). Предполагается, что движение центра масс не зависит от движения относительно центра масс. С телом свяжем среднюю систему координат  $Sx_1x_2x_3$  согласно условиям

$$\int u(r, t) \rho dx = 0, \quad \int r \times u(r, t) \rho dx = 0, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

где  $r = (x_1, x_2, x_3)^T$  — радиус вектор точки недеформированного тела,  $u(r, t)$  — ее смещение. Интегрирование здесь и далее ведется по области, занимаемой телом в недеформированном состоянии.

Будем искать перемещение в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) U_n(r)$$

где  $U_n(r) = (U_n^1, U_n^2, U_n^3)^T$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) собственные формы свободных упругих колебаний. Система собственных форм предполагается ортонормированной и полной в конфигурационном пространстве системы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением  $N$  первых форм колебаний. Условие выбора  $N$  будет дано ниже.

Для описания движения системы относительно центра масс введем канонические переменные Андуайе  $I_k, \varphi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ );  $I_2$  — модуль кинетического момента,  $I_1$  и  $I_3$  — его проекции на оси  $Cx_3$  и  $C\xi_3$  соответственно;  $\varphi_k$  — сопряженные к  $I_k$  переменные (см. напр. [2]).

Пусть тело в недеформированном состоянии является динамически симметричным. Опуская промежуточные выкладки составим уравнения, описывающие изменение переменных  $I_k, \varphi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $q_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$I_k \dot{\phantom{I}} = -\partial R / \partial \varphi_k, \quad \varphi_k \dot{\phantom{\varphi}} = \partial R / \partial I_k \quad (1.2)$$

$$q_n \ddot{\phantom{q}} + \lambda_n^2 \left( E q_n + \eta q_n \dot{\phantom{q}} + \int_0^t \mu(t - \xi) dq_n \right) = Q_n \quad (1.3)$$

$$R = R_0 - \sum_{n=1}^N q_n Q_n$$

$$R_0 = \frac{I_2^2}{2A} + \frac{I_1^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \gamma_3^2$$

Выражения для  $Q_n$  совпадают с полученными в [2] и без линейных по  $q_n, q_n \dot{\phantom{q}}$  членов имеют вид

$$Q_n = \omega_0^2 (H_{11}^n (3\gamma_1^2 - 1) + H_{22}^n (3\gamma_2^2 - 1) + H_{33}^n (3\gamma_3^2 - 1) + \quad (1.4)$$

$$+ 6H_{12}^n \gamma_1 \gamma_2 + 6H_{13}^n \gamma_1 \gamma_3 + 6H_{23}^n \gamma_2 \gamma_3) +$$

$$+ A^{-2} (I_2^2 - I_1^2) (H_{22}^n \sin^2 \varphi_1 - H_{12}^n \sin 2\varphi_1 + H_{11}^n \cos^2 \varphi_1 + H_{33}^n) +$$

$$+ C^{-2} I_1^2 (H_{11}^n + H_{22}^n) - 2I_1 \sqrt{I_2^2 - I_1^2} A^{-1} C^{-1} (H_{13}^n \sin \varphi_1 + H_{23}^n \cos \varphi_1)$$

$$H_{ij}^n = \int x_i U_j^n \rho dx \quad (i, j = 1, 2, 3; n = 1, \dots, N)$$

$$\gamma_1 = (\cos \alpha \cos \varphi_2 - \sin \alpha \sin \varphi_2 \cos \delta_1) \cos \varphi_1 - [(\cos \alpha \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \cos \delta_2 - \sin \alpha \sin \delta_1 \sin \delta_2] \sin \varphi_1$$

$$\gamma_2 = -(\cos \alpha \cos \varphi_2 - \sin \alpha \sin \varphi_2 \cos \delta_1) \sin \varphi_1 - [(\cos \alpha \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \cos \delta_2 - \sin \alpha \sin \delta_1 \sin \delta_2] \cos \varphi_1$$

$$\gamma_3 = (\cos \alpha \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \varphi_2 \cos \delta_1) \sin \delta_2 + \sin \alpha \sin \delta_1 \cos \delta_2$$

$$\alpha = \varphi_3 - \omega_0 t, \quad \cos \delta_1 = I_3 / I_2, \quad \cos \delta_2 = I_1 / I_2$$

где  $A$  и  $C$  моменты инерции недеформированного тела относительно осей  $Cx_1$  и  $Cx_3$  соответственно,  $\lambda_n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — собственные значения оператора теории упругости. Анализ уравнений (1.2) проведем в предположении: период свободных упругих колебаний и характерное время их затухания много меньше характерного времени обращения тела вокруг центра масс, а последний, в свою очередь, много меньше периода движения центра масс по орбите. Введем два малых параметра

$$\epsilon_1 = (I_2(0)/A\Omega_1)^2, \quad \epsilon_2 = (A\omega_0/I_2(0))^2, \quad 0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll 1$$

где  $\Omega_1$  — наименьшая частота свободных упругих колебаний тела. Положим в (1.1):

$$E = \frac{1}{\epsilon_1} E^0, \quad \eta = \frac{1}{\epsilon_1} \eta^0, \quad \mu(t - \xi) = \frac{1}{\epsilon_1} \mu^0(t - \xi), \quad G_l = \frac{1}{\epsilon_1} G_l^0$$

Далее будем следовать работе [4]. Сделаем замену переменных  $q_n = \epsilon_1 q_n^*$  и преобразуем систему (1.2), (1.3) в систему сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Построение асимптотики решений проведем по методу [8]. Без учета быстро затухающей части асимптотического разложения типа погранслоя, решения для  $q_n^*$  (с погрешностью порядка  $\epsilon_1$  на интервале времени  $\sim \epsilon_1^{-1}$ ) определяются из уравнения

$$\bar{q}_n^*(s) = \lambda_n^{-2} \left( \sum_{l=1}^{M+1} \frac{C_l \Delta_l}{s + \Delta_l} \right) \bar{Q}_n(s) \quad (1.5)$$

В (1.5) чертой обозначено преобразование Лапласа по времени,  $s$  — параметр преобразования. Константы  $C_l, \Delta_l$  ( $l = 1, \dots, M+1$ ) выражаются через  $E^0, \eta^0, G_l^0, \tau_l$  и определяют свойства материала [5]. Обобщенные силы  $Q_n$  в (1.5) определяются на порождающем движении — решении уравнений (1.2) при  $\epsilon_1 = 0$ . Оригинал (1.6) даст искомое приближенное решение для  $q_n^*$  соответствующих квазистатическому режиму деформаций тела. Точное решение уравнений (1.2) при  $\epsilon_1 = 0$  ( $u(r, t) = 0$ ) нам неизвестно, однако предположение о «быстрой закрутке» ( $\epsilon_2 \ll 1$ ) позволяет найти приближенное решение и использовать его в качестве порождающего.

Получив  $q_n^*$  ( $n = 1, \dots, N$ ), подставим их в систему (1.2) и получим замкнутую систему уравнений, которую будем исследовать при помощи метода усреднения. Так как  $\lambda_i^2 \leq \lambda_j^2$  ( $i < j$ ), то число  $N$  выберем из условия  $\lambda_N^{-2} \sim \epsilon_1$ .

Ограничение числа рассматриваемых форм колебаний числом связано с тем, что используемые результаты теории сингулярно возмущенных уравнений получены для систем конечного числа уравнений. Вопрос об асимптотических разложениях решений систем сингулярно возмущенных уравнений в банаховом пространстве рассматривался в [9]. Если воспользоваться результатами этой работы, то при выборе  $N$  из условия  $\lambda_N^{-2} \sim \epsilon_1$  норма той части асимптотического решения, которая определяется отброшенными формами колебаний будет порядка  $\epsilon_1^2$ , что гарантирует выполнение оценки из [4].

**2. Быстрая эволюция.** Исследование эволюции переменных «действие» можно упростить, если разбить эволюцию на два этапа. Заметим, что уравнение, описывающее изменение переменной  $I_1$ , содержит члены порядка  $\epsilon_1$ , а уравнения, описывающие изменение  $I_2$  и  $I_3$  — порядка  $\epsilon_1 \epsilon_2$  (этот факт устанавливается аналогично [1, 3]). Следовательно эволюция переменной происходит на порядок быстрее. На первом этапе будем рассматривать эволюцию  $I_1$ , на втором —  $I_2, I_3$ , причем эволюцию  $I_1$  будем считать закончившейся.

Если  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  имеем случай Эйлера и уравнения (1.2) интегрируются в квадратурах

$$I_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \varphi_3 = \text{const}$$

$$\varphi_2^* = I_2 C^{-1}, \quad \varphi_1^* = I_1 (C^{-1} - A^{-1})$$

Такое решение отличается от точного порождающего решения на величину порядка  $\sqrt{\epsilon_2}$  на бесконечном интервале времени [10]. Выполнив преобразования, описанные в п. 1, после усреднения по быстрым фазам, получаем уравнение (см. также [4]):

$$I_1^* = k_0 \{ A^{-2} (I_2^2 - I_1^2)^2 \alpha_1 \Phi(2I_1) + 2C^{-2} I_1^2 (I_2^2 - I_1^2) \alpha_2 \Phi(I_1) \} \quad (2.1)$$

$$k_0 = \frac{C - A}{A^3 C} \epsilon_1, \quad \Phi(x) = \sum_{l=1}^{M+1} \frac{C \Delta x_l}{\Delta_l^2 + (C - A)^2 A^{-2} C^{-2} x^2}$$

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{H_{11}^n - H_{22}^n}{2\lambda_n} \right)^2 + \left( \frac{H_{12}^n}{\lambda_n} \right)^2 \right), \quad \alpha_2 = \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{H_{13}^n}{\lambda_n} \right)^2 + \left( \frac{H_{23}^n}{\lambda_n} \right)^2 \right)$$

Уравнение (2.1) описывает изменение переменной  $I_1$  на первом этапе эволюции с погрешностью  $\sim \sqrt{\epsilon_2}$  на интервале времени порядка  $\epsilon_1^{-1}$ . Если  $A < C$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = \pm I_2$  в зависимости от того  $I_1(0)$  больше или меньше нуля соответственно. В этом случае тело стремится к вращению вокруг вектора момента количества движения тела, который сонаправлен с осью динамической симметрии тела. При  $A > C$   $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0$ , т. е. ось симметрии в пределе ортогональна вектору момента количества движения. Решение  $I_1 = 0$  асимптотически устойчиво при  $A > C$  и неустойчиво при  $A < C$ , а решения  $I_1 = \pm I_2$  асимптотически устойчивы при  $A < C$  и неустойчивы при  $A > C$ .

3. Медленная эволюция. Перейдем к рассмотрению второго этапа эволюции. Пусть  $A > C$  и  $I_1 = 0$ . Введем новую фазу  $\alpha = \varphi_3 - \omega_0 t$ , тогда

$$\alpha^* = \frac{\partial}{\partial I_3} (R - \omega_0 I_3)$$

В качестве порождающего возьмем решение

$$I_k = \text{const} \quad (k = 2, 3), \quad \alpha^* = -\omega_0, \quad \varphi_2^* = I_2 A^{-1} \quad (3.1)$$

При  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 \ll 1$  имеем случай «собственного вырождения» гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Как следует из результатов теории гамильтоновых систем, решение (3.1) отличается от точного порождающего решения на величину порядка  $\epsilon_2$  на бесконечном интервале времени [10]. Тем самым дано обоснование учета членов порядка  $\sqrt{\epsilon_2}$  при выводе уравнений, описывающих этап медленной диссипативной эволюции.

Величины (1.4) с учетом  $I_1 = 0$  примут вид

$$\gamma_1 = \cos \alpha \cos \varphi_2 - \sin \alpha \cos \delta_1 \sin \varphi_2 \quad (3.2)$$

$$\gamma_2 = \sin \alpha \sin \delta_1, \quad \gamma_3 = \cos \alpha \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \delta_1 \cos \varphi_2$$

При помощи (3.1), (3.2), (1.6) находим  $q_n^*$  ( $n = 1, \dots, N$ ) ( $Q_n$  — периодическая функция времени и оригинал (1.6) легко выписывается по формуле из [11, стр. 520]).

После усреднения правых частей уравнений (1.2) получаем уравнения

$$I_2^* = -k_1 I_2^{-4} \beta_1 (\Psi(2\omega - 2\omega_0) (I_2 + I_3)^4 + \Psi(2\omega + 2\omega_0) (I_2 - I_3)^4 + \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& + 4\Psi(2\omega)(I_2^2 - I_3^2)^2 + \beta_2(I_2^2 - I_3^2)(\Psi(\omega - 2\omega_0)(I_2 + I_3)^2 + \\
& + \Psi(\omega + 2\omega_0)(I_2 - I_3)^2 + 4\Psi(\omega)I_3^2) \\
I_3^* & = k_1 I_2^{-4} \{ \beta_1(\Psi(2\omega + 2\omega_0)(I_2 - I_3)^4 - \Psi(2\omega - 2\omega_0)(I_2 + I_3)^4) + \\
& + \beta_2(I_2^2 - I_3^2)(\Psi(\omega + 2\omega_0)(I_2 - I_3)^2 - \Psi(\omega - 2\omega_0)(I_2 + I_3)^2) + \\
& + \beta_3\Psi(2\omega_0)(I_2^2 - I_3^2)^2 \}, \quad k_1 = 9\omega_0^4 \varepsilon_1, \quad \omega = I_2 A^{-1}
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{64} \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{H_{11}^n - H_{33}^n}{\lambda_n} \right)^2 + \left( \frac{2H_{13}^n}{\lambda_n} \right)^2 \right), \quad \beta_2 = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^n \frac{H_{12}^n + H_{23}^n}{\lambda_n^2}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^N \left( \frac{H_{11}^n - H_{22}^n + H_{33}^n}{\lambda_n} \right)^2, \quad \Psi(x) = \sum_{l=1}^{M+1} \frac{C_l \Delta_l x}{\Delta_l^2 + x^2}$$

Решения уравнений (3.3) аппроксимируют функции  $I_2, I_3$  с погрешностью  $\sim \varepsilon_2$  на интервале времени  $\sim \varepsilon_1^{-1}$ .

Можно показать, что единственной, асимптотически устойчивой особой точкой системы (3.3) будет  $I_2 = I_3 = A\omega_0$ , т. е. тело неподвижно в орбитальной системе координат, а его ось динамической симметрии располагается в плоскости орбиты.

Для определения положения оси симметрии тела относительно орбитальной системы координат введем угол  $\beta$  между вектором  $\vec{\gamma} = OC$  и осью  $Sx_3$ ,  $\beta = \pi/2 - \alpha - \varphi_2$ . Для  $\beta$  получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& \beta'' + \frac{3(A-C)}{2A} \omega_0^2 \sin 2\beta + k_1 A^{-1} \Psi(2\beta) \times \\
& \times \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-2} \left\{ \frac{1}{2} (H_{33}^n - H_{11}^n)^2 \sin^2 2\beta - H_{13}^n (H_{33}^n - H_{11}^n) \sin 4\beta + 2H_{13}^n \cos^2 2\beta \right\} = 0
\end{aligned} \quad (3.4)$$

В коэффициентах уравнения (3.4) оставлены только главные члены относительно малых параметров задачи.

Из уравнения (3.4) следует, что в стационарном движении  $\beta = \{\pi k\}$ ,  $k \in Z$  (ось  $Sx_3$  сонаправлена  $\vec{\gamma}$ ) или  $\beta = \{\pi/2 + \pi k\}$ ,  $k \in Z$  (ось  $Sx_3$  направлена по касательной к орбите). Первая серия положений равновесия уравнения (3.4) асимптотически устойчива при  $H_{13}^n \neq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и устойчива в линейном приближении при  $H_{13}^n = 0$ . Вторая серия — неустойчива.

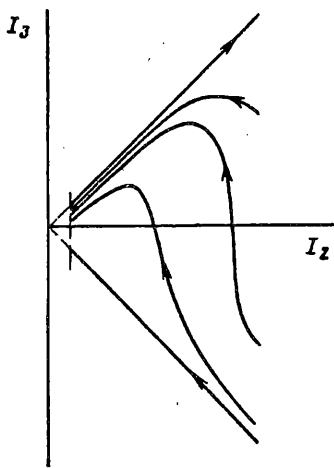
Рассмотрим случай  $A < C$  и  $I_1 = I_2$  — результаты первого этапа эволюции переменной  $I_1$ . Направляющие косинусы радиус-вектора центра масс (2.6) примут вид

$$\begin{aligned}
\gamma_1 & = \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \cos \delta_1 \\
\gamma_2 & = -\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi \cos \delta_1 \\
\gamma_3 & = \sin \alpha \sin \delta_1, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi^* = I_2 C^{-1}
\end{aligned}$$

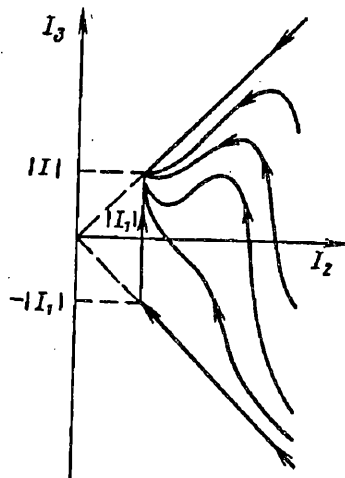
Проделав выкладки, аналогичные проделанным выше в случае  $A > C$ , получаем уравнения (3.3), в которых

$$\beta_1 = \frac{1}{64} \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{H_{11}^n - H_{22}^n}{\lambda_n} \right)^2 + \left( \frac{2H_{12}^n}{\lambda_n} \right)^2 \right), \quad \beta_2 = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^N \frac{H_{13}^n + H_{23}^n}{\lambda_n^2}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^N \left( \frac{H_{11}^n + H_{22}^n - H_{33}^n}{\lambda_n} \right)^2, \quad \omega = I_2 C^{-1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В пределе решения этих уравнений стремятся к единственной, асимптотически устойчивой особой точке  $I_2 = I_3 = C\omega_0$ , которая соответствует положению равновесия тела в орбитальной системе координат, когда ось динамической симметрии ортогональна плоскости орбиты.

Траектории системы (3.3) как результат численного интегрирования для некоторых тел (кольцо, цилиндрическая оболочка, цилиндр) качественно изображены на фиг. 1. При исследовании эволюционных движений цилиндра использовался общий вид собственных форм колебаний (всех типов) из [12], что позволило выяснить, какие из коэффициентов  $\beta_i$  отличны от нуля и установить качественный характер эволюции.

Опишем принятую модель материала. Нетрудно показать, что зависимость механической добротности  $Q^{-1}$  от частоты  $\omega$  для модели материала (1.1) в области малых амплитуд имеет вид

$$Q^{-1}(\omega) = \left( E + \sum_{l=1}^M G_l \right) \left( \sum_{l=1}^{M+1} C_l \frac{\Delta_l \omega}{\Delta_l^2 + \omega^2} \right) \quad (3.5)$$

Используемый метод [4] не накладывает никаких дополнительных ограничений на параметры, входящие в (3.5), поэтому при выборе модели оказался возможным учет экспериментальных данных о внутреннем трении в реальных материалах (в частности, металлах) [13]. Так как зависимость  $Q^{-1}(\omega)$  для металлов имеет один максимум в области малых частот ( $\omega < 0,1$  Гц) [13] ограничимся в (3.5)  $M = 0$ . Численные значения параметров получены из экспериментального значения  $Q^{-1}(\omega)$  при  $\omega = 0,2$  Гц для меди (в области  $\omega < 0,2$  Гц нет экспериментальных точек). Следует отметить, что такой подход имеет иллюстративный характер, так как не учитывает температурные эффекты.

Как видно из фиг. 1 модуль кинетического момента  $I_2$  убывает все время движения. Обратное вращение переходит в прямое. Угол между кинетическим моментом и нормалью к плоскости орбиты уменьшается. Направление эволюции угла  $\delta_1$  противоположно полученному в [1]<sup>1</sup>. Таким образом, различие вязко

<sup>1</sup> См. также Сидоренко В. В. Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: ИПМ АН СССР. 1987.

упругих свойств материалов, удовлетворяющих модели [1—3] и модели настоящей работы, полученной с использованием экспериментальных данных о вязкоупругом поведении металлов, привело к качественно различным эволюционным процессам.

В ходе диссипативной эволюции угловая скорость собственного вращения уменьшается и становится сопоставимой с орбитальной угловой скоростью центра масс. Условие «быстрой закрутки» нарушается и уравнения (3.3) неприменимы (область, лежащая слева от вертикальной штриховой линии на фиг. 1).

4. Эволюция быстрых вращений тела, совершающего продольные колебания. Отдельно рассмотрим случай, когда  $\sigma = 1/64 \sum (H_{33}^n \lambda_n^{-1})^2 \neq 0$  ( $n = 1 \dots N$ ), а остальные  $H_{ij}^n$  ( $i, j = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots$ ) равны нулю (т. е. тело совершает продольные колебания вдоль оси симметрии [2]). В этом случае уравнения (1.2) имеют интеграл  $I_1 = \text{const}$ . Этап быстрой эволюции отсутствует. Для переменных  $I_2, I_3$  получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 I_2^* &= -k\sigma I_2^{-8} \{ (I_2^2 - I_1^2)^2 (\Psi(2\omega - 2\omega_0) (I_2 + I_3)^4 + \\
 &+ \Psi(2\omega + 2\omega_0) (I_2 - I_3)^4 + 4\Psi(2\omega) (I_2^2 - I_3^2)^2) + \\
 &+ 8I_1^2 (I_2^2 - I_1^2) (\Psi(\omega - 2\omega_0) (I_2 + I_3)^2 + \\
 &+ \Psi(\omega + 2\omega_0) (I_2 - I_3)^2 + \Psi(\omega) I_3^2) (I_2^2 - I_3^2) \} \\
 I_3^* &= k\sigma I_2^{-8} \{ (I_2^2 - I_1^2)^2 (\Psi(2\omega + 2\omega_0) (I_2 - I_3)^4 - \\
 &- \Psi(2\omega - 2\omega_0) (I_2 + I_3)^4) + 16I_1^2 (I_2^2 - I_1^2) (I_2^2 - I_3^2) (\Psi(\omega + 2\omega_0) (I_2 - I_3)^2 - \\
 &- \Psi(\omega - 2\omega_0) (I_2 + I_3)^2) + 4\Psi(2\omega_0) (I_2^2 - I_3^2)^2 (I_2^2 - 3I_1^2) \}, \quad \omega = I_2 A^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Положения равновесия системы (4.1) —  $I_2 = |I_1|, I_3 = I_1$ , что соответствует равномерному вращению вокруг оси  $Sx_3$  ортогональной плоскости орбиты. Погрешность аппроксимации решений уравнений (1.2) решениями (4.1) и характерный интервал времени, на котором она справедлива, такие же, как и в п. 3.

Траектории системы (4.1) для модели материала, принятой в п. 3, изображены на фиг. 2. Характер эволюционного процесса при первоначально большой угловой скорости собственного вращения аналогичен этапу медленной эволюции. Интересно, что стремление угла  $\delta_1$  к нулю при некоторых начальных данных может быть немонотонным: на некотором промежуточном этапе угол между кинетическим моментом и нормалью к плоскости орбиты увеличивается. Отличия характера эволюции, показанного на фиг. 2, от результатов работы [2] обусловлены различием вязкоупругих свойств, а также учетом членов порядка  $\sqrt{\epsilon_2}$  при выводе уравнений. Обоснование такого учета дано выше.

На сравнительно небольших промежутках времени имеет место так называемая «консервативная эволюция», в процессе которой кинетический момент прецессирует вокруг нормали к плоскости орбиты [14].

Уравнения (3.3), (4.1) при наличии достоверных данных о свойствах материала позволяют проследить эволюцию во вращательном движении динамически симметричного вязкоупругого тела. Зависимость характера эволюции от свойств материала проиллюстрирована на сравнении результатов работ [1—2] и результатов настоящей работы, полученных с использованием экспериментальных данных о внутреннем трении в металлах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* Эволюция быстрых вращений вязкоупругой цилиндрической оболочки в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 139—146.
2. *Маркеев А. П.* Влияние продольных упругих колебаний тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 38—45.
3. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
4. *Синицын Е. В.* Асимптотика сингулярных возмущений в исследовании поступательно-вращательного движения вязкоупругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 104—110.
5. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965, 199 с.
6. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 339 с.
7. *Ильющин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970, 280 с.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
9. *Шатина А. В.* Об асимптотических свойствах решений одного класса механических систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. № 4. С. 85—89.
10. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
11. *Лазрентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
13. *Постников В. С.* Внутреннее трение в металлах. М.: Metallургия, 1974, 351 с.
14. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.IV.1991