МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 531.37

© 1993 г. В. А. КОНОПЛЕВ

НОВАЯ ФОРМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗЕЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ С ТЕЛАМИ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Предлагается новый эффективный метод составления (компьютерного конструирования) дифференциальных уравнений стационарных и нестационарных, голономных и неголономных связей системы тел с телами внешней среды в обход указанных трудностей.

1. Введение. Стандартная форма дифференциальных уравнений движения системы тел в избыточных обобщенных координатах, а также стационарных и нестационарных, голономных и линейных по обобщенным скоростям неголономных связей имеет вид [1]:

$$\mathrm{A}(\mathrm{q})\mathrm{q}^{\cdot\cdot} + \mathrm{b}(\mathrm{q},\ \mathrm{q}^{\cdot}) = \mathrm{Q} + \mathrm{u} + \mathrm{D}_{\mu}\mu \tag{1.1}$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{q},\ t) = 0,\ \mathrm{K}(\mathrm{q})\mathrm{q}^{\cdot} + \mathrm{N}(\mathrm{q},\ t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathrm{D}_{\mu} = \|(d\mathrm{f}/d\mathrm{q})^{T} \,|\, \mathrm{K}^{\mathrm{T}}(\mathrm{q})\| \tag{1.3}$$

Дифференциальные уравнения стационарных и нестационарных связей в этом случае, согласно общей теории [1], имеют вид

$$\mathrm{D}_{\mu}\mathrm{q}^{\cdot} = 0,\ \mathrm{D}_{\mu}\mathrm{q}^{\cdot} = \mathrm{M}(\mathrm{q},\ \nu) \tag{1.4}$$

где ν — параметр (время, длина пути системы в инерциальной системе координат $E_{10} = (o_{10}, [e^{10}])$ и так далее.

Для крупномасштабных систем твердых тел составление уравнений (1.2) и символьное конструирование матрицы D_{μ} и вектора $\mathrm{M}(\mathrm{q}, \nu)$ является трудоемкой самостоятельной задачей.

Например, для 25-звенного шестистепенного стенда (48 избыточных координат) необходимо построить 42 скалярных уравнения связей, сконструировать 39 аналитических выражения (для одной опоры) и вычислить 234 (для шести опор) частных производных [2].

Если уравнения движения системы тел (1.1) записаны в агрегативной форме [3—5]:

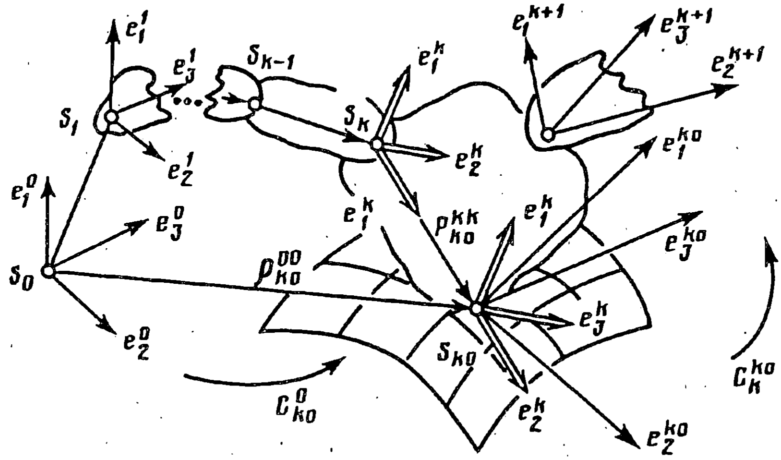
$$\mathrm{A}(\mathrm{q})\mathrm{q}^{\cdot\cdot} + \mathrm{B}(\mathrm{q},\ \mathrm{q}^{\cdot})\mathrm{q}^{\cdot} = S(\mathrm{T} + \mathrm{H} + \mathrm{P}) + \mathrm{u} + \mathrm{Q}_{\mathrm{R}} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{A}\ (\mathrm{q}) = SAS^{T},\ \ \mathrm{B}\ (\mathrm{q},\ \mathrm{q}^{\cdot}) = \dot{S}BS^{T} + SAS^{T\cdot}$$

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{R}} = S_{R}\mathrm{R} = \mathrm{D}_{\lambda}\lambda,\ \ \lambda = (\ldots, \lambda_{k}, \ldots)$$

или любой другой форме, содержащей аналог матрицы S, то дифференциальные уравнения связей

$$\mathrm{D}_{\lambda}\mathrm{q}^{\cdot} = 0,\ \mathrm{D}_{\lambda}\mathrm{q}^{\cdot} = \mathrm{F}(\mathrm{q},\ \nu) \tag{1.6}$$



Фиг. 1

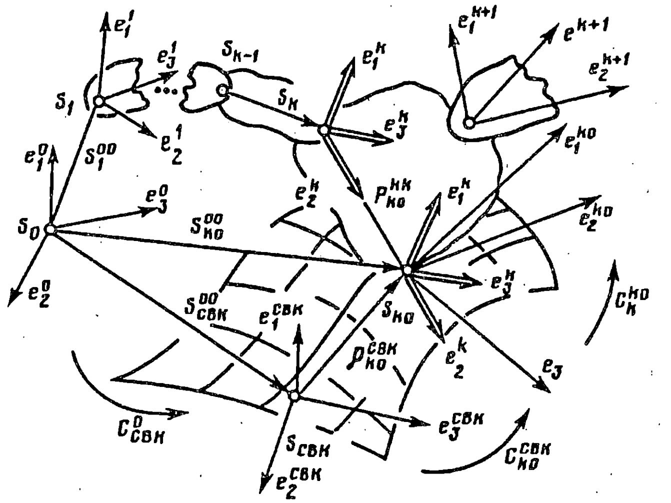
где $D_\mu\mu = D_\lambda\lambda$, но вообще говоря $D_\lambda \neq D_\mu, F(q,\nu) \neq M(q,\nu), \lambda \neq \mu$, (1.4) могут быть получены непосредственно с помощью структурной матрицы S системы, построенной на этапе конструирования уравнений (1.5), минуя трудоемкую стадию составления самих уравнений связей (1.2) и конструирования матрицы D_μ. Для этого в выражении $Q_R = S_R R$ в (1.5) достаточно найти связь вектора R, составленного из динамических винтов $R_k^k(kc, k)$ реакций (κc)-тел внешней среды на (k)-тела системы в точках o_{ko} с кинематическими характеристиками кинематических пар (E_k, E_{ko}). Здесь и далее использованы обозначения, принятые в [3—5].

Вектор $P = \|\ldots, P_k^k, \ldots\|^T$ в (1.5) составлен из динамических винтов P_k^k воздействия на тела системы внешних тел при наличии пробуксовывания и проскальзывания первых и деформации вторых.

2. Дифференциальные уравнения стационарных голономных и неголономных связей. Начнем со случая, допускающего замену опорной площадки между телами системы и внешней среды точечной опорой. Введем следующие обозначения: (kc)-тело — тело внешней среды с которым имеет точечный контакт (k) — тело системы; o_{ko} — точка контакта вышеуказанных тел; $E_{kc} = (o_{kc}, [e^{kc}])$ — система координат, неподвижная относительно (kc)-тела, движение которой относительно E_{10} задано радиус-вектором o_{kc}^{oo} и матрицей c_{kc}^o; $E_{ko} = (o_{ko}, [e^{ko}])$ — система координат с началом в точке o_{ko}, которая принадлежит (kc)-телу, базис $[e^{ko}]$ выбирается исходя из удобства записи условий, определяющих накладываемые на (k)-тело связи. В качестве e_1^{ko} удобно выбрать нормаль к поверхности (kc)-тела в точке o_{ko}. Если $x_1 = \nu(x_2, x_3)$ — уравнение поверхности (kc)-тела в E_{kc}, то

$$e_1^{ko} = \|1, -\partial\nu/\partial x_2, -\partial^\nu/\partial x_3\|^T (1 + (\partial\nu/\partial x_2)^2 + (\partial\nu/\partial x_3)^2)^{-1/2} \tag{2.1}$$

и $e_2^{ko}, o_{ko}, e_3^{ko}$ — плоскость местного горизонта в точке o_{ko}. Выбор ортов e_2^{ko} и e_3^{ko} вообще говоря, произволен. Если o_{ko} — цилиндрический шарнир, то e_3^{ko} — орт его оси вращения, если o_{ko} — точка контакта при качении (k)-тела (kc)-телу, то $[e^{ko}]$ — естественный трехгранник (нормаль, бинормаль, касательная). Здесь и далее индекс l ствола системы для упрощения письма опущен, $E_{lk} \equiv E_k$.



Фиг. 2

Если базис $[e^{ko}]$ выбран, то определена матрица $c_{ko}^{kc} = c_1(\psi_4^{ko})c_2(\psi_5^{ko})c_3(\psi_6^{ko})$ ориентации $[e^{ko}]$ в $[e^{kc}]$, $[e^{ko}] = [e^{kc}]c_{ko}^{kc}, \psi_{ko}^{kc} = (\psi_4^{ko}, \psi_5^{ko}, \psi_6^{ko})$ — углы указанной ориентации. В частности, если x_1 — константа, то $e_1^{ko} \uparrow\uparrow e_1^{kc}$ и $c_{ko}^{kc} = c_1(\psi_4^{ko})$.

Система координат E_{k_o} перемещается относительно E_{kc} за счет качения (k)-тела по поверхности (kc)-тела, проскальзывания (k)-тела по поверхности (kc)-тела и деформации (kc)-тела в окрестности точки o_{k_o} под воздействием (k)-тела (по всем или части направлений $[e^{ko}]$).

Задача состоит в том, чтобы каждый винт $R_k^k(kc, k)$ в векторе R (1.5) выразить через обобщенные реакции (kc)-тела на (k)-тело, отнесенные к естественным избыточным обобщенным координатам q_k кинематической пары (E_k, E_{k_o}) с последующим выделением из них ненулевых составляющих — собственно усилий реакций связей $\lambda_k = (\ldots, \lambda_\alpha^k, \ldots)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$; $\dim \lambda_k \leq 6$. Функции λ_α^k необходимо выбрать так, чтобы соответствующие избыточные обобщенные скорости из $q_k^\bullet$ запрещенных связями движений были равны нулю.

Обозначим $o_{k_{oo}}$ точку (k)-тела, совпадающую с точкой o_{k_o} контакта с (kc)-телом. Мгновенно $o_{k_{oo}} \equiv o_{k_o}$, но $o_{koo}^{kc\,\bullet} \neq o_{ko}^{kc\bullet}$. В качестве первой тройки, функций в q_k выберем радиус-вектор $o_{koo}^{ko.ko}$ точки $o_{k_{oo}}$ в E_{k_o} и базисе $[e^{ko}]$, в качестве второй тройки — углы ориентации $[e^k]$ в $[e^{ko}]$, $\psi_k^{ko} = (\psi_4^k, \psi_5^k, \psi_6^k)$:

$$q_k = (o_{koo}^{ko.ko}, \psi_k^{ko})^T \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующие матрицы и векторы из [3—5]:

$$M_k^{ko} = \begin{Vmatrix} c_k^{ko,T} & 0 \\ 0 & \varepsilon_k^{ko} \end{Vmatrix}, \quad V_k = \| v_{koo}^{ko.k}, \omega_k^{ko.k} \|^T \tag{2.3}$$

$$v_{koo}^{ko.k} = c_k^{ko,T} v_{koo}^{ko.ko}, \quad \omega_k^{ko.k} = \varepsilon_k^{ko} \psi_k^{ko\bullet}$$

$$c_k^{ko} = c_{ko}^{kc,T}(\nu)\, c_{kc}^{o,T}(\nu)\, c_k^o$$

где матрица c_k^o известна из кинематики системы.

Приведем винт $R_k^k(kc, k)$ в R к точке $o_{koo}(k)$-звена

$$R_k^k(kc, k) = T_{k00}^{kk} R_{koo}^k(kc, k) \tag{2.4}$$

где матрица T_{koo}^{kk} построена с помощью радиус-вектора $o_{koo}^{kk} \equiv p_{koo}^{kk}$ точки o_{koo} в E_k и базисе $[e^k]$ [3—5].

Винт $R_{koo}^k(kc, k)$ отнесен к π_k-координатам, $\pi_k^{\bullet} \equiv V_k$. Обозначим $Q_{koo}^{ko}(kc, k)$ — обобщенные силы реакций, действующие на (k)-тело со стороны (kc)-тела в точке o_{ko}, отнесенные к q_k (2.2) и найдем их связь с винтом $R_{koo}^k(kc, k)$, (2.4).

В силу (2.3) имеем

$$V_k = M_k^{ko} q_k^{\bullet}, \quad q_k^{\bullet} = (v_{koo}^{ko.ko}, \psi_k^{ko\bullet}) \tag{2.5}$$

Используя условие равенства работ винта $R_{koo}^k(kc, k)$ и обобщенных сил $Q_{koo}^{ko}(kc, k)$ на перемещениях $\delta\pi_k$ и δq_k с учетом (2.5) получаем

$$R_{koo}^k(kc, k) = (M_k^{ko,T})^{-1} Q_{koo}^{ko}(kc, k) \tag{2.6}$$

Ненулевые $\lambda_\alpha \in \lambda_k$, составляющие $Q_{koo}(kc, k)$, стоят на местах нулей в q_k. Поэтому

$$Q_{koo}^{ko}(kc, k) = \|f_-^{ko}\|\lambda_k \tag{2.7}$$

где $\|f_-^{ko}\| = \| \ldots | f_\alpha^{ko} | \ldots \|$ —матрица размерности $(6 \times \dim \lambda_k)$, составленная из шестимерных ортов f_α^{ko}, $(\alpha = 1, 2, \ldots, 6)$ с единицами на (α)-местах нулевых составляющих в $q_k^{\bullet}$, т. е. ортов запрещенных связями движений в кинематических парах (E_k, E_{ko}).

Собирая результаты (2.4), (2.6) и (2.7) получаем для Q_R в (1.5):

$$\mathbf{Q}_R = \mathbf{D}_\lambda \lambda, \quad \mathbf{D}_\lambda = S_R \operatorname{diag}(D_k) \tag{2.8}$$

$$D_k = T_{koo}^k (M_k^{ko,T})^{-1} \|f_-^{ko}\|, \quad \lambda = (\ldots, \lambda_k, \ldots)^T \tag{2.9}$$

Оставалось показать, что для стационарных связей справедливо первое из уравнений (1.6).

В силу $o_{koo} \equiv o_{ko}$ линейная скорость точки o_{koo} относительно $E_{10} \equiv E_o$ может быть вычислена с использованием кинематических цепей $E_o, E_1, \ldots, E_k, E_{koo}$ (через систему тел) и $E_o, E_{kc}, E_{ko}, E_{ko1}, E_{koo} = (o_{koo}, [e^k])$ (через — тело внешней среды). Система координат $E_{ko1} = (o_{ko1}, [e^{ko1}])$ получается бесконечно малым движением E_{ko} за счет качения (k)-тела по поверхности (kc)-тела (вектор $o_{ko1k}^{ko.ko}$), проскальзывания (k)-тела по поверхности (kc)-тела (вектор $o_{ko1+}^{ko.ko}$) и деформации (kc)-тела в окрестности точки o_{ko} под действием (k)-тела (вектор $o_{ko1-}^{ko.ko}$).

В первом случае, используя уравнения кинематики системы $\mathbf{V} = S^T \mathbf{q}^{\bullet}$, [3—4] для (k)-тела из левой части равенства (2.9) получаем

$$D_k^T V_k^{ok} = \|f_-^{ko}\|^T (M_k^{ko})^{-1} T_{ko}^{kk} \|v_k^{ok}, \omega_k^{ok}\|^T = \|f_-^{ko}\| (M_k^{ko})^{-1} \|v_k^{ok} + \langle p_{koo}^k \rangle^k \omega_k^{ok}, \omega_k^{ok}\|^T =$$

$$= \|f_-^{ko}\|^T (M_k^{ko})^{-1} \|v_{koo}^{ok}, \omega_k^{ok}\|^T \tag{2.10}$$

Теперь вычислим векторы v_{koo}^{ok} и ω_k^{ok} с использованием второй из вышеуказанных кинематических цепей. Для этого замкнем векторный многоугольник $o_o, o_{kc}, o_{ko}, o_{ko1}, o_{koo}$ в E_o и $[e^o]$:

$$o_{koo}^{oo} = O_{kc}^{oo} + o_{ko}^{kc.o} + o_{ko1}^{ko.o} + o_{koo}^{ko1.o} \tag{2.11}$$

где слагаемые в правой части равенства по порядку означают радиус-векторы начала E_{kc} в E_o, начала E_{ko} в E_{kc}, начала E_{kol} в E_{ko} и начала E_{koo} в E_{kol}, вычисленные в E_o. Система координат $E_{koo} = (o_{koo}, [e^k])$ получается бесконечно малым движением E_{kol} за счет поворота (k)-тела при качении по поверхности (kc)-тела (вектор $o_{kook}^{kol.kol}$) и пробуксовывания (k)-тела (вектор $o_{koo+}^{kook.kook}$):

$$o_{kol}^{ko.ko} = o_{kolk}^{ko.ko} + o_{kol+}^{ko.ko} + o_{kol-}^{ko.ko}, \quad o_{koo}^{kol.kol} = o_{kook}^{kol.kol} + c_{kook}^{kol} o_{koo+}^{kook.kook} \tag{2.12}$$

Переходя в трех последних слагаемых равенства (2.11) к базисам $[e^{kc}]$, $[e^{ko}]$ и $[e^{kol}]$ соответственно

$$o_{koo}^{oo} = o_{kc}^{oo} + c_{kc}^{o} o_{ko}^{kc.kc} + c_{ko}^{o} o_{kol}^{ko.ko} + c_{kol}^{o} o_{koo}^{kol.kol} \tag{2.14}$$

и дифференцируя полученное равенство в E_o, получим

$$v_{koo}^{oo} = v_{kc}^{oo} + c_{kc}^{o} v_{ko}^{kc.kc} + c_{ko}^{o} v_{kol}^{ko.ko} + c_{kol}^{o} v_{koo}^{kol.kol} + c_{kc}^{o} \langle \omega_{kc}^{o} \rangle^{kc} o_{ko}^{kc.kc} +$$

$$+ c_{ko}^{o} \langle \omega_{ko}^{o} \rangle^{ko} o_{kol}^{ko.ko} + c_{kol}^{o} \langle \omega_{kol}^{o} \rangle^{kol} o_{koo}^{kol.kol} \tag{2.15}$$

где использовано уравнение Пуассона в виде $c^{\bullet} = c\langle\omega\rangle$ с соответствующими индексами.

Дифференцируя равенства (2.12) и (2.13) для векторов $v_{kol}^{ko.ko}$, $v_{koo}^{kol.kol}$ в (2.15) получаем

$$v_{kol}^{ko.ko} = v_{kolk}^{ko.ko} + v_{kol+}^{ko.ko} + v_{kol-}^{ko.ko} \tag{2.16}$$

$$v_{koo}^{kol.kol} = v_{kook}^{kol.kol} + c_{kook}^{kol} v_{koo+}^{kook.kook} + c_{kook}^{kol} \langle \omega_{kook}^{kol} \rangle^{kook} o_{koo+}^{kook.kook} \tag{2.17}$$

Для вычисления мгновенного значения скорости v_{koo}^{oo} в точке o_{ko} подставим (2.16), (2.17) в (2.15) и перейдем к пределу $\|o_{kol}^{ko.ko}\| \to 0$, $\|o_{koo}^{ko.ko}\| \to 0$ с учетом того что $v_{ko}^{kc.kc} \equiv 0$:

$$v_{koo}^{oo} = v_{kc}^{oo} + c_{kc}^{oo} \langle \omega_{kc}^{o} \rangle^{kc} o_{ko}^{kc.kc} + c_{ko}^{o} v_{kolk}^{ko.ko} + c_{ko}^{o} v_{kol+}^{ko.ko} + c_{ko}^{o} v_{kol-}^{ko.ko} + c_{ko}^{o} v_{kook}^{ko.ko} + c_{ko}^{o} v_{koo+}^{ko.ko} \tag{2.18}$$

Но при качении (k)-тела по поверхности (kc)-тела в отсутствие проскальзывания, пробуксовывания (k)-тела и деформации (kc)-тела, точка o_{ko} является мгновенным центром скоростей $(v_{kolk}^{ko.ko} = -\, v_{kook}^{ko.ko})$ и поэтому окончательно в базисе $[e^k]$ получаем

$$v_{koo}^{ok}(\nu) = v_{ko}^{ok}(\nu) + v_{koo}^{ko.k} \tag{2.19}$$

$$v_{ko}^{ok}(\nu) = v_{kc}^{ok}(\nu) + c_{kc}^{k}(\nu) \langle \omega_{kc}^{o}(\nu) \rangle^{kc} o_{ko}^{kc.kc}$$

$$v_{koo}^{ko.k} = c_{k}^{ko,T} \left(v_{kol+}^{ko.ko} + v_{kol-}^{ko.ko} + v_{koo+}^{ko.ko} \right)$$

Для вектора ω_k^{ok} (2.10) в силу теоремы о сложении векторов угловых скоростей в $[e^k]$ получаем

$$\omega_k^{ok}(\nu) = \omega_{kc}^{ok}(\nu) + \omega_{ko}^{kc.k}(\nu) + \omega_k^{ko.k} \tag{2.20}$$

Для стационарных связей получаем

$$v_{koo}^{ok} = v_{koo}^{ko.k}, \quad \omega_k^{ok} = \omega_k^{ko.k} \tag{2.21}$$

Подставляя (2.21) в (2.10) с учетом (2.3) и (2.5) получаем доказываемый результат

$$D_k^T V_k^{ok} = \|f_-^k\|^T (M_k^{ko})^{-1} V_k = \|f_-^k\|^T q_k^{\bullet} = \|f_-^{ko}\|^T (v_{koo}^{ko.ko}, \psi_k^{ko\bullet})^T = 0 \tag{2.22}$$

где вектор $v_{koo}^{ko.ko}$ с учетом (2.19) имеет вид

$$v_{koo}^{ko.ko} = v_{kol+}^{ko.ko} + v_{kol-}^{ko.ko} + v_{koo+}^{ko.ko}$$

Примеры. 1. o_{ko} — цилиндрический шарнир, $\|f_-^{ko}\| = \|f_1^{ko}|f_2^{ko}|f_3^{ko}|f_4^{ko}|f_5^{ko}\|$; 2. o_{ko} — шаровой шарнир или простая точечная опора без проскальзывания и деформации (kc)-тела, $\|f_-^{ko}\| = \|f_1^{ko}|f_2^{ko}|f_3^{ko}\|$, $\mathrm{P} = 0$ в (1.5); 3. (k)-тело-колесо, катящееся по поверхности (kc)-тела без проскальзывания, пробуксовывания и деформации (kc)-тела $\|f_-^{ko}\| = \|f_1^{ko}|f_2^{ko}|f_3^{ko}\|$, $[e^{ko}]$ — естественный трехгранник, $\mathrm{P} = 0$ в (1.5); *4.* o_{ko} — точечная опора без проскальзывания, но с деформацией грунта в направлении орта e_1^{ko}, $\|f_-^{ko}\| = \|f_2^{ko}|f_3^{ko}\|$, $\mathrm{P} \neq 0$ в (1.5); *5.* o_{ko} — точечная опора с проскальзыванием в плоскость местного горизонта $e_2^{ko}, o_{ko}, e_3^{ko}$, $\|f_-^{ko}\| = f_1^{ko}$, $\mathrm{P} \neq 0$ в (1.5); *6.* o_{ko} — точка опоры пробуксовывающего колеса без проскальзывания, $\|f_-^{ko}\| = \|f_1^{ko}|f_2^{ko}\|$, $\mathrm{P} \neq 0$ в (1.5); *7.* o_{ko} — точечная опора с проскальзыванием в плоскости $e_2^{ko}, o_{ko}, e_3^{ko}$ и деформацией грунта в направлении орта e_1^{ko}, $\|f_-^{ko}\| \equiv 0$, $\mathrm{P} \neq 0$ в (1.5) и т. п.

Винты P_k^k в (1.5) вычисляются по соответствующим алгоритмам с использованием скоростей движения проскальзывания, пробуксовывания и деформации опоры получаемых с помощью равенства

$$\|f^{ko}\|^T q_k^{\cdot} = D_k^T V_k^{ok} \tag{2.24}$$

где матрица D_k получается с использованием матрицы ортов $\|f^{ko}\|$ осей, движение по которым разрешено (в отличие от $\|f_-^{ko}\|$). Практический интерес формула (2.24) представляет только в случае, когда движения проскальзывания, пробуксовывания и деформации разделены (примеры 4—7).

В одном частном, но часто встречающемся на практике случае отпадает необходимость вычисления матрицы M_k^{ko}. Если o_{ko} — шаровой шарнир или простая точка опоры без проскальзывания и деформации (kc)-тела, то условие ее неподвижности имеет векторную форму $\vec{v}_{koo}^{ko} = 0$ и следовательно конечный результат не зависит от выбора базиса. В этом случае $q_k^{\cdot} = V_k$ в (2.5) и можно принять $M_k^{ko} \equiv E$, что эквивалентно $R_{koo}^k(kc, k) \equiv Q_{koo}^{ko}(kc, k)$ в (2.6).

3. Дифференциальные уравнения нестационарных голономных и неголономных связей. Связи (k)-тело системы с (kc)-телом внешней среды нестационарны в трех случаях: *1.* (kc)-тело неподвижно в E_o, поверхность $x_1 = \nu(x_2 x_3)$, (2.1) произвольна, $v_{kc}^{ok}(\nu) = 0, \omega_{ko}^{ok}(\nu) = 0, \omega_{ko}^{kc.k}(\nu) \neq 0$; *2.* Поверхность ($kc$) — тела-плоскость, но само тело перемещается относительно E_o, $\omega_{ko}^{kc.k} = 0$, $v_{kc}^{ok}(\nu) \neq 0, \omega_{kc}^{ok}(\nu) \neq 0$; *3.* Общий случай, $v_{kc}^{ok}(\nu) \neq 0, \omega_{kc}^{ok}(\nu) \neq 0, \omega_{ko}^{kc.k}(\nu) \neq 0$.

Подставляя (2.19) и (2.20) в (2.10) для нестационарных голономных и неголономных связей получаем

$$\mathrm{D}_\lambda^T \mathrm{q}^{\cdot} = \mathrm{F}(\nu) = \| \ldots, F_k(\nu), \ldots \|^T \tag{3.1}$$

$$F_k(\nu) = \|f_-^{ko}\|^T (M_k^{ko})^{-1} V_{ko}^{ok}, \quad V_{ko}^{ok} = \|v_{ko}^{ok}(\nu), \omega_{ko}^{ok}(\nu)\|^T$$

Аналог равенства (2.24) имеет вид

$$\|f^{ko}\|^T q_k^{\cdot} = D_k^T V_k^{ok} - F_k(\nu) \tag{3.2}$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай нескольких точек контакта (k)-тела системы с одним или несколькими телами внешней среды. Пусть таких точек n, тогда $\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^n)$, $D_k = \|D_k^1|D_k^2| \ldots |D_k^n\|$. Если $\dim \lambda_k \geq 6$, движение (k)-тела относительно (kc)-тела невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Колгунова С. В., Коноплев В. А., Зайцев В. А.* Кинематика имитатора движения машин//Изв. ВУЗ. Приборостроение. 1989. Т. 32. № 9. С. 42—45.
3. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 46—53.
4. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел//ДАН. 1990. Т. 314. № 4. С. 809—813.
5. *Коноплев В. А., Фишков А. Л.* Агрегативные методы конструирования моделей механики систем из упругих элементов//Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 1. С. 104—109.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.IV.1990