МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 531.383

 Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. Ч. 1

Разработана кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских уравнений возмущенного центрального движения материальной точки, обобщающая теорию регуляризующих и стабилизирующих преобразований Кустаанхеймо — Штифеля. Построены кватернионные уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями, установлены необходимые и достаточные условия приводимости уравнений движения к осцилляторному виду для любого вида потенциала центрального силового поля (к виду уравнений движения возмущенных осцилляторов, совершающих в случае невозмущенного центрального движения гармонические колебания). Построенная теория развивает и обобщает предложенный автором кватернионный подход к регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел.

1. Введение. К задачам возмущенного центрального движения относится возмущенная задача двух тел, уравнения которой являются наиболее характерной математической моделью движения тел Солнечной системы. Ньютоновские уравнения задачи двух тел, записанные в системе координат, связанной с центральным телом, сингулярны в начале координат и при тесных сближениях с возмущающими телами. Наличие этой особенности, порожденной гравитационным взаимодействием материальных тел, приводит к существенным трудностям при изучении движения вблизи центрального тела или движения по орбитам с большими эксцентриситетами [1, 2]. Поэтому устранение в дифференциальных уравнениях движения особенностей, порожденных гравитационным взаимодействием материальных тел, называемое регуляризацией, имеет важное значение в небесной механике и астродинамике [1, 2].

Другой причиной, существенно снижающей точность численного решения уравнений движения небесных и космических тел, используемого для прогноза движения тел, является неустойчивость решений уравнений в смысле Ляпунова. Преобразование уравнений движения, уменьшающее действие этого фактора, называется в небесной механике и астродинамике стабилизацией.

Задача регуляризации уравнений движения восходит к Л. Эйлеру и Т. Леви-Чивиту, давшим решение одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений тел). Дальнейший прогресс в этой области связан с работами П. Кустаанхеймо и Е. Штифеля, предложившими в шестидесятых годах регуляризацию и стабилизацию дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел, обобщающую регуляризацию Т. Леви-Чивита. Основные достоинства регулярных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля заключаются в том, что они линейны для невозмущенных кеплеровских движений (для эллиптического кеплеровского движения уравнения имеют вид уравнений движения четырехмерного гармонического осциллятора), регулярны и близки к линейным для возмущенных кеплеровских движений. Эти обстоятельства позволили разработать эффективные методы нахождения решений в численной или аналитической форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами [1—5]. Точность численного решения такого рода задач небесной механики и астродинамики повышается при использовании регулярных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля от трех до пяти порядков [1, 2] по сравнению с решениями, полученными при использовании ньютоновских уравнений движения.

В основе регуляризации и стабилизации Кустаанхеймо — Штифеля лежит теория KS-преобразований (KS-матриц), разработанная в [1]. В [6, 7] предложен кватернионный подход к регуляризации и стабилизации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел, основанный на кватернионном способе описания движения и использующий аппарат кватернионов Гамильтона или аппарат кватернионных матриц. Показано, что кватернионный подход к регуляризации упрощает доказательства, делает более естественным и наглядным основные положения, сформулированные в теории KS-регуляризации, позволяет построить теорию, обобщающую KS-регуляризацию. Так, на основе кватернионного подхода в [6, 7] указано регуляризующее преобразование, обобщающее KS-преобразование, дана наглядная кинематическая интерпретация регуляризующего преобразования Кустаанхеймо — Штифеля, получены более общие регулярные уравнения, из которых регулярные уравнения Кустаанхеймо — Штифеля следуют как частные.

Регулярные уравнения Кустаанхеймо — Штифеля в настоящее время широко применяются для решения ряда задач небесной механики и астродинамики в численной или аналитической форме. При этом используются два подхода, предложенные в [1]. Первый подход основывается на регулярных уравнениях возмущенного движения в осцилляторной форме и тесно связан с теорией колебаний. Второй подход основывается на регулярных уравнениях возмущенного движения в канонической форме (в форме уравнений Гамильтона) и использует теорию канонических преобразований. Второй подход обобщен в [3, 4]. Первому подходу посвящены работы [6, 7]. Обобщению этого (первого) подхода применительно к общей задаче возмущенного центрального движения материальной точки на основе кватернионного аппарата Гамильтона и кватернионного способа описания движения посвящены работы[1]. Анализ и развитие этого обобщения содержит настоящая работа.

2. Кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских уравнений возмущенного центрального движения. Рассмотрим движение материальной точки M с массой m в центральном силовом поле с потенциалом П под действием возмущающей силы, равной геометрической сумме силы, имеющей потенциал П$^{\bullet}$ и силы $m\mathbf{p}$. Векторное уравнение возмущенного центрального движения материальной точки имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m}\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{d\Pi^{\bullet}}{d\mathbf{r}}\right) + \mathbf{p} \tag{2.1}$$

$$r = |\,\mathbf{r}\,|, \ \Pi = \Pi(r), \ \Pi^{\bullet} = \Pi^{\bullet}(t, \mathbf{r}), \ \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра O притяжения, t — время, П — произвольная дифференцируемая функция расстояния r, П$^{\bullet}$ — произвольная функция (возмущающий потенциал) времени t и координат местоположения точки M, $\mathbf{p}$ — возмущающее ускорение, являющееся произвольной функцией времени t, радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

Векторное уравнение невозмущенного центрального движения материальной точки получается из (2.1) при П$^{\bullet} = 0$, $\mathbf{p} = 0$.

[1] *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. I: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85, № 8628—В. 36 с.: *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. II: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85, № 8629—В. 18 с.

Введем в рассмотрение систему координат $X_1X_2X_3(X)$ с началом в центре 0, движущуюся относительно инерциальной системы координат поступательно. Тогда

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \mathbf{x}_k,\ \Pi^\bullet = \Pi^\bullet(t, x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{d\Pi^\bullet}{d\,\mathbf{r}} = \operatorname{grad}\Pi^\bullet = \sum_{k=1}^{3} \frac{d\Pi^\bullet}{dx_k}\mathbf{x}_k,\ \mathbf{p} = \sum_{k=1}^{3} p_k \mathbf{x}_k \tag{2.2}$$

$$p_k = p_k(t, x_1, x_2, x_3, x_1^\bullet, x_2^\bullet, x_3^\bullet)$$

где $\mathbf{x}_k$ орт оси X_k, x_k, p_k — проекции векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ на ось X_k, точка означает производную по времени t.

Уравнения (2.1), (2.2) образуют систему трех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных x_k. При $\Pi = -m\mu r^{-1}$ (μ = const) из этих уравнений следуют дифференциальные уравнения возмущенного кеплеровского движения, вырождающиеся при $r \to 0$.

Регуляризация и стабилизация возмущенного кеплеровского движения достигается с помощью выполнения трех процедур [1, 2]:

преобразования координат; использования в качестве дополнительных переменных кеплеровской или полной энергии, или модуля вектора момента количества движения (кинетического момента);

введения вместо времени новой независимой переменной. Аналогичные процедуры могут быть использованы для регуляризации и стабилизации возмущенного центрального движения при произвольном виде потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля. Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения, использующая кватернионный способ описания движения и кватернионный аппарат Гамильтона, основывается на выполнении следующих процедур[2]:

на рассмотрении уравнений движения во вращающейся системе координат и использовании в качестве параметров ориентации этой системы координат параметров Родрига — Гамильтона (или четырехмерного векторного параметра ориентации — кватерниона); на использовании в качестве дополнительных переменных величин, являющихся первыми интегралами дифференциальных уравнений невозмущенного центрального движения; на введении в уравнения движения зависящих от расстояния регуляризующих функций за счет регуляризующего нормирования кватернионной переменной (параметров Родрига — Гамильтона) и регуляризующего преобразования времени.

Отметим, что в результате выполнения таких преобразований решается и другая задача: задача приведения векторного уравнения (2.1) возмущенного центрального движения материальной точки для произвольного вида потенциала П к удобному для аналитического и численного исследования осцилляторному виду, т. е. к виду уравнения движения многомерного возмущенного осциллятора, принимающего в случае невозмущенного центрального движения вид уравнения движения многомерного гармонического осциллятора.

Рассмотрим указанные регуляризующие и стабилизирующие преобразования уравнений (2.1), (2.2) возмущенного центрального движения.

2.1. Переходим от уравнений движения материальной точки (2.1), (2.2), записанным в системе координат X, к уравнениям движения, записанным в системе координат $Y_1Y_2Y_3(Y)$, вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Начало этой системы координат помещаем в точку M, а её ось Y_1 направляем вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$. В качестве параметров ориентации системы координат

[2] См. указ. публ. с. 21.

Y выбираем параметры Родрига — Гамильтона λ_j ($j = \overline{0, 3}$). В результате вместо системы (2.1), (2.2) дифференциальных уравнений относительно неизвестных декартовых координат x_k получаем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестного расстояния r, проекции ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси Y_2, Y_3

и параметров λ_j ($j = \overline{0, 3}$):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr} = P_1, \quad r = |\mathbf{r}| \tag{2.3}$$

$$2\omega_3 \frac{dr}{dt} + r\left(\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\right) = P_2, \quad 2\omega_2\frac{dr}{dt} + r\left(\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1\omega_3\right) = -P_3 \tag{2.4}$$

$$2d\vec{\boldsymbol{\lambda}}/dt = \boldsymbol{\lambda} \circ \vec{\boldsymbol{\omega}}_Y \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \vec{\boldsymbol{\omega}}_Y = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \mathbf{i}_k, \quad \vec{\boldsymbol{\lambda}}^{\bullet} = \lambda_0^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{\bullet}\, \mathbf{i}_k$$

$$P_k = \frac{1}{m}\frac{d\Pi^{\bullet}}{d\mathbf{y}_k} + p_k', \quad \mathbf{y}_{kX} = \vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{i}_k \circ \overline{\vec{\boldsymbol{\lambda}}} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{r}_X = \sum_{k=1}^{3} x_k \mathbf{i}_k = r\vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\vec{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathbf{r}_Y = r\,\mathbf{i}_1$$

$$\mathbf{p}_X = \sum_{k=1}^{3} p_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{p}_Y = \sum_{k=1}^{3} p_k'\, \mathbf{i}_k = \overline{\vec{\boldsymbol{\lambda}}} \circ \mathbf{p}_X \circ \vec{\boldsymbol{\lambda}}$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{a}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис ξ ($\xi = X, Y$); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [8], символ $\circ$ означает кватернионное умножение, верхняя черта — сопряженный кватернион, $\vec{\boldsymbol{\lambda}}$ — кватернион поворота системы координат Y относительно X, ω_k — проекция вектора $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y на ось Y_k, $\mathbf{y}_k$ — орт оси Y_k, $p_k' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_k$ — проекция возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на ось Y_k, $\partial\Pi^{\bullet}/\partial\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k \cdot \partial\Pi^{\bullet}/\partial\mathbf{r}$ — производная возмущающего потенциала $\Pi^{\bullet}$ по направлению $\mathbf{y}_k$.

Фигурирующая в уравнениях (2.4), (2.5) проекция ω_1 вектора $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ на ось Y_1 (направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$) может быть задана произвольно. В дальнейшем полагаем ω_1 равной нулю:

$$\omega_1 = 2(-\lambda_1\lambda_0^{\bullet} + \lambda_0\lambda_1^{\bullet} + \lambda_3\lambda_2^{\bullet} - \lambda_2\lambda_3^{\bullet}) = 0 \tag{2.6}$$

В этом случае вектор $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y коллинеарен вектору $\mathbf{L}$ кинетического момента материальной точки, вычисленному относительно центра O: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr^2\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Замечание. Условие (2.6), как показано в [6], эквивалентно билинейному соотношению — одному из основных соотношений теории регуляризации Кустаанхеймо — Штифеля [1]. Случай $\omega_1 \neq 0$ рассмотрен в рамках пространственной задачи двух тел в работах [6, 7], где показано, что регуляризация дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел достигается и в этом, более общем случае, однако получаемые при этом регулярные уравнения существенно сложнее регулярных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля. Вместе с тем использование регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, соответствующих случаю $\omega_1 \neq 0$, представляет интерес в силу того, что неточное задание начальных условий интегрирования и погрешности численного интегрирования приводят к нарушению условия (2.6) и эквивалентного ему билинейного соотношения.

Вводим вместо ω_k новые переменные c_k по формулам

$$c_1 = 0,\ c_2 = r^2\omega_2,\ c_3 = r^2\omega_3 \tag{2.7}$$

Величины c_k являются проекциями на оси системы координат Y вектора c момента скорости материальной точки, вычисленного относительно центра O, имеющего вид $\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} = r^2\vec{\omega} = \mathbf{L}/m$. Для невозмущенного центрального движения величины c_k являются постоянными площадей.

Уравнения (2.3)—(2.5) возмущенного центрального движения с учетом (2.7), (2.6) принимают вид

$$r^{\cdot\cdot} - c^2r^{-3} = m^{-1}d\Pi/dr = P_1 \tag{2.8}$$

$$c_2^{\cdot} = -rP_3,\ c_3^{\cdot} = rP_2,\ c_1 = 0,\ c_2^2 + c_3^2 = c^2 \tag{2.9}$$

$$2\vec{\lambda}^{\cdot} = r^{-2}\vec{\lambda} \circ \mathbf{c}_Y,\ \mathbf{c}_Y = c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 \tag{2.10}$$

На этом же этапе вводим в качестве новых дополнительных переменных величину h, являющуюся энергией материальной точки M при $\Pi^* = 0$:

$$h = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \Pi\,(r)$$

полную энергию h^* материальной точки:

$$h^* = h + \Pi^*\,(t, \mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \Pi\,(r) + \Pi^*\,(t, \mathbf{r})$$

и модуль c вектора c момента скорости материальной точки:

$$c = r^2\omega,\ r = |\mathbf{r}|,\ \omega = |\vec{\omega}|$$

Величина c для невозмущенного центрального движения (когда $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$) является, как и величины c_k, постоянной площадей.

Переменные h, h^* и c удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\left(m\mathbf{p} - \frac{d\Pi^*}{d\mathbf{r}}\right) \tag{2.11}$$

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{d\Pi^*}{dt} + m\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{p} \tag{2.12}$$

$$dc^2/dt = 2r^3\,(P_2\omega_3 - P_3\omega_2) = 2r\,(P_2c_3 - P_3c_2) \tag{2.13}$$

$$c^{\cdot} = r\omega^{-1}\,(P_2\omega_3 - P_3\omega_2) = rc^{-1}\,(P_2c_3 - P_3c_2)$$

2.2. Переходим от дифференциальных уравнений первого порядка (2.4), (2.5), ((2.9), (2.10)) к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестного кватерниона $\vec{\lambda}$. В результате получаем основное кватернионное уравнение

$$2r\vec{\lambda}^{\cdot\cdot} + 4r^{\cdot}\vec{\lambda}^{\cdot} + 2r\,(\lambda^{\cdot} \circ \vec{\lambda}^{\cdot})\vec{\lambda} = \mathbf{Q}^* - \mathrm{sqal}\,(\vec{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*)\vec{\lambda} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q} - \frac{r^{-1}}{2m}\,\frac{d\Pi^*}{d\vec{\lambda}},\ \mathbf{q} = -\mathbf{i}_1 \circ \vec{\lambda} \circ \mathbf{p}_X$$

$$\frac{d\Pi^*}{d\vec{\lambda}} = \frac{d\Pi^*}{d\lambda_0} - \sum_{k=1}^{3}\frac{d\Pi^*}{d\lambda_k}\mathbf{i}_k,\ \Pi^* = \Pi^*\,(t, \mathbf{r}_X) \tag{2.15}$$

$$\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_X(t, \mathrm{r}_X, \mathrm{r}_X^{\cdot}), \quad \mathrm{r}_X = r\vec{\lambda} \circ \mathrm{i}_1 \circ \overline{\vec{\lambda}}$$

где sqal(···) — скалярная часть кватерниона (···).

Уравнение (2.14) дополняем уравнением (2.8) для расстояния r. На этом же этапе правые части уравнений (2.11)—(2.13) для переменных h, h^*, c записываем через параметры λ_j, расстояние r и их производные по времени t.

Дальнейшие преобразования связаны с введением в полученные уравнения движения регуляризующих функций $\varkappa(r), \nu(r), \nu_1(r)$.

2.3. Осуществляем в основном кватернионном уравнении (2.14) замену кватернионной переменной $\vec{\lambda}$ на новую переменную u по формуле

$$\vec{\lambda} = \varkappa(r)\,\mathrm{u}, \quad \mathrm{u} = u_0 + u_1\mathrm{i}_1 + u_2\mathrm{i}_2 + u_3\mathrm{i}_3 \tag{2.16}$$

где $\varkappa(r)$ — дважды дифференцируемая функция переменной r.

Переход от параметров Родрига — Гамильтона λ_j к параметрам u_j производится в соответствии с (2.16) по формулам

$$\lambda_0 = \varkappa(r)u_0, \lambda_k = -\varkappa(r)u_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.17}$$

В результате такого перехода получаем дифференциальное кватернионное уравнение относительно кватернионной переменной u, содержащее регуляризующую функцию $\varkappa(r)$.

На этом же этапе производим замену параметров λ_j на новые переменные u_j по формулам (2.17) в уравнениях для переменных r, h, h^*, c.

2.4. Осуществляем регуляризующее преобразование времени. Переходим в основном кватернионном уравнении для кватерниона u от времени t к новой переменной τ по формулам

$$dt = \nu(r)\,d\tau, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \nu^{-2}(r)\frac{d^2}{d\tau^2} - \nu^{-3}(r)\frac{d\nu(r)}{d\tau}\frac{d}{d\tau} \tag{2.18}$$

где $\nu(r)$ — дифференцируемая функция переменной r, не обращающаяся в нуль в области фазового пространства, сооответствующей движению исходной системы.

Получаем дифференциальное уравнение для кватернионной переменной u, содержащее две регуляризующие функции $\varkappa(r)$ и $\nu(r)$. Аналогичный переход от времени t к новой переменной τ_1 осуществляем по формулам (2.18) (положив в них вместо $\nu(r)$ и τ соответственно $\nu_1(r)$ и τ_1) в уравнении (2.8) для расстояния r. Получаем уравнение для расстояния, содержащее регуляризующую функцию $\nu_1(r)$, удовлетворяющую тем же требованиям, что и функция $\nu(r)$.

В результате указанных преобразований получаем следующую совокупность кватернионных уравнений и соотношений задачи возмущенного центрального движения материальной точки с регуляризующими функциями $\varkappa, \nu, \nu_1$:

Связь обобщенных переменных Кустаанхеймо — Штифеля (u-переменных) и их производных по времени t с параметрами Родрига — Гамильтона λ_j и их производными:

$$\vec{\lambda} = \varkappa(r)\,\overline{\mathrm{u}}, \quad \lambda_0 = \varkappa(r)\,u_0, \quad \lambda_k = -\varkappa(r)\,u_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.19}$$

$$\vec{\lambda}^{\cdot} = \varkappa^{\cdot}\overline{\mathrm{u}} + \varkappa\overline{\mathrm{u}}^{\cdot}, \quad \varkappa = \varkappa(r)$$

Обобщенное преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (u-преобразование):
для расстояния

$$[\varkappa(r)]^2(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1 \tag{2.20}$$

для декартовых координат

$$\mathbf{r}_X = \overrightarrow{r\lambda} \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}} = r\varkappa^2(r)\,\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \tag{2.21}$$

для проекции скорости

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{r}_X^{\boldsymbol{\cdot}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\mu} = r^{\boldsymbol{\cdot}}\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} + 2r\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.22}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} = \varkappa\overline{\mathbf{u}}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\cdot}} = \varkappa^{\boldsymbol{\cdot}}\overline{\mathbf{u}} + \varkappa\overline{\mathbf{u}}^{\boldsymbol{\cdot}}$$

для возмущающих сил

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{r^{-1/2}}{2m}\frac{d\Pi^*}{d\mathbf{u}^*}, \quad P_1 = \varkappa(r)\,\overline{\mathrm{s}}\mathrm{qal}\,(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \tag{2.23}$$

$$\mathbf{q} = \varkappa(r)\,\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_X, \quad \frac{d\Pi^*}{d\mathbf{u}^*} = \frac{d\Pi^*}{du_0^*} = \sum_{k=1}^{3}\frac{d\Pi^*}{du_k^*}\mathbf{i}_k$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_X) = \Pi^*(t, \overline{\mathbf{u}}^{*} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = r^{1/2}\varkappa(r)\,\mathbf{u}$$

$$\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_X(t, \mathbf{r}_X, \mathbf{r}_X^{\boldsymbol{\cdot}}), \quad \mathbf{r}_X = r\varkappa^2(r)\,\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}$$

Основное кватернионное уравнение для обобщенных переменных Кустаанхеймо — Штифеля (u-переменных):

$$2\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + 2\left[2(r\varkappa)^{-1}\frac{d(r\varkappa)}{d\tau} - \nu^{-1}\frac{d\nu}{d\tau}\right]\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} +$$

$$+ (r\varkappa)^{-1}\nu^2\alpha\mathbf{u} = (r\varkappa)^{-1}\nu^2\left[\mathbf{Q} - \left(2r\frac{d\varkappa}{dr} + \varkappa\right)P_1\mathbf{u}\right] \tag{2.24}$$

$$\alpha = \alpha(r, c^2, h) = 2r\left[\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2}\right]\frac{d^2\varkappa}{dr^2} +$$

$$+ 2\left[\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m}\frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2}\right]\frac{d\varkappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3}\varkappa \tag{2.25}$$

Уравнение для расстояния

$$\frac{d^2r}{d\tau_1^2} + \frac{1}{m}\left[\frac{d(\nu_1^2\Pi)}{dr} - h\frac{d\nu_1^2}{dr}\right] + \frac{1}{2}c^2\frac{d}{dr}(r^{-2}\nu_1^2) = \nu_1^2P_1 \tag{2.26}$$

Уравнения для переменных h, h^*, c:

$$h^{\boldsymbol{\cdot}} = m\,\mathrm{sqal}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{Q}) \tag{2.27}$$

$$h^{*\boldsymbol{\cdot}} = d\Pi^*/dt + m\,\mathrm{sqal}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{q}), \quad h^* = h + \Pi^* \tag{2.28}$$

$$dc^2/dt = 4r^3\,\mathrm{sqal}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\cdot}} \circ \mathbf{Q}), \quad c^{\boldsymbol{\cdot}} = 2r^3c^{-1}\,\mathrm{sqal}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\cdot}} \circ \mathbf{Q}) \tag{2.29}$$

Уравнения для времени

$$dt/d\tau = \nu(r), \quad dt/d\tau_1 = \nu_1(r), \quad d\tau/d\tau_1 = \nu^{-1}(r)\,\nu_1(r) \tag{2.30}$$

Уравнения (2.24)—(2.27), (2.29), (2.30) вместе с соотношениями (2.23) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения, в которой неизвестными являются время t, обобщенные переменные Кустаанхеймо — Штифеля u_j, расстояние r, величина h, модуль c вектора момента скорости материальной точки (или его квадрат c^2). В качестве независимой переменной может быть принята либо переменная τ, либо τ_1.

Уравнение (2.26) для расстояния может быть исключено из состава указанной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения в случаях, когда уравнение (2.20), вытекающее из (2.19), может быть разрешено (при заданном виде функции $\varkappa = \varkappa(r)$) относительно r, т. е. в случаях, когда расстояние r может быть выражено из равенства (2.20) через переменные u_j.

Отметим, что при переходе в уравнениях (2.27), (2.29) для переменных h и c от времени t к новой независимой переменной τ или τ_1 по формулам (2.30) вид этих уравнений не меняется. Отметим также, что в ряде случаев вместо уравнения (2.27) для переменной h целесообразно использовать уравнение (2.28) для полной энергии h^* материальной точки.

Для нахождения координат x_k и проекций скорости $x_k^{\cdot}$ материальной точки на оси системы координат X через переменные u_j, расстояние r и их производные необходимо воспользоваться соотношениями (2.21), (2.22).

3. Условия приводимости уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду. Уравнения возмущенного центрального движения (2.24)—(2.30) содержат в качестве произвольных функций расстояния r регуляризующие функции $\varkappa, \nu, \nu_1$. Их выбор будем осуществлять таким образом, чтобы уравнения (2.24), (2.26) или, по крайней мере, одно из них было эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора для невозмущенного центрального движения, когда $\Pi^* = 0$, $\mathrm{p} = 0$ и, следовательно, когда $\mathrm{Q} = 0$, $P_1 = 0$, $h = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$.

Для того, чтобы основное кватернионное уравнение (2.24) было эквивалентно в указанном случае уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора, необходимо, чтобы оно не содержало первой производной $d\mathrm{u}/d\tau$. Поэтому потребуем, чтобы функции $\varkappa$ и ν удовлетворяли условию

$$2(r\varkappa)^{-1} d(r\varkappa)/d\tau - \nu^{-1} d\nu/d\tau = 0 \qquad (3.1)$$

при выполнении которого уравнение (2.24) не содержит $d\mathrm{u}/d\tau$.

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид $r\varkappa = a\nu^{1/2}$, $a = \mathrm{const}$. Без потери общности положим $a = 1$ и будем рассматривать в дальнейшем такие регуляризующие функции $\varkappa$ и ν, которые связаны между собой соотношением

$$r\varkappa = \nu^{1/2} \qquad (3.2)$$

Это означает, что при конкретном выборе функции $\varkappa$ будет однозначно определена в соответствии с (3.2) и функция ν, и наоборот. Таким образом, вместо двух произвольных функций $\varkappa$ и ν произвольной остается лишь одна из них: $\varkappa$ или ν. При этом выбор функции ν, так же как и функции $\varkappa$, ограничивается классом C^2.

Уравнение (2.24) с учетом (3.2) принимает вид уравнения движения нелинейного возмущенного осциллятора

$$2\frac{d^2\mathrm{u}}{d\tau^2} + (r\varkappa)^2 \alpha \mathrm{u} = (r\varkappa)^3 \left[\mathrm{Q} - \left(2r\frac{d\varkappa}{dr} + \varkappa \right) P_1 \mathrm{u} \right] \qquad (3.3)$$

Для того, чтобы кватернионное уравнение (3.3) было эквивалентно в случае невозмущенного центрального движения уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора[3], необходимо потребовать выполнение условия

$$\begin{aligned}(r\varkappa)^3\alpha = (r\varkappa)^3 \Big\{ & 2r \left[\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right] \frac{d^2\varkappa}{dr^2} + \\ & + 2\left[\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m}\frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right] \frac{d\varkappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^2}\varkappa \Big\} = \mathrm{const}\end{aligned} \qquad (3.4)$$

в котором следует положить $h = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$.

[3] Используемое здесь понятие «гармонический осциллятор» охватывает не только случай $(r\varkappa)3d >$ > 0, но и $(r\varkappa)^3 d < 0$.

Это условие может рассматриваться как дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения регуляризующей функции $\varkappa(r)$ при заданном виде потенциала $\Pi(r)$. После нахождения из уравнения (3.4) функции $\varkappa$ из условия (3.2) однозначно определяется функция ν. Выражение (3.4) может рассматриваться также как дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения потенциала $\Pi(r)$ при заданном виде регуляризующей функции $\varkappa(r)$.

Таким образом, соотношения (3.2), (3.4) являются необходимыми и достаточными условиями приводимости основного кватернионного уравнения возмущенного центрального движения (2.24) к осцилляторному виду. Они связывают между собой регуляризующие функции $\varkappa, \nu$ и потенциал Π. Если при заданном виде потенциала Π регуляризующие функции $\varkappa$ и ν выбраны так, что условия (3.2), (3.4) выполняются, то основное кватернионное уравнение (2.24) становится в случае невозмущенного центрального движения в силовом поле с потенциалом Π эквивалентным уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора.

Уравнению (2.26) для расстояния r в случае невозмущенного центрального движения также можно придать вид уравнения движения гармонического осциллятора за счет соответствующего выбора регуляризующей функции $\nu_1(r)$. Действительно, в этом случае оно принимает вид уравнения, исследованного в [9]:

$$\frac{d^2r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left[\nu_1^2\,(h - \Pi_1)\right], \quad \Pi_1 = \Pi\,(r) + \frac{mc^2}{2r^2} \tag{3.5}$$

Отсюда следует известное [9] условие

$$\nu_1^2\,(h - \Pi_1) = \tfrac{1}{2}\,c_1^*\,r^2 + c_2^*\,r + c_3^*, \quad c_i^* = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

накладываемое на регуляризующую функцию $\nu_1(r)$ и потенциал $\Pi(r)$, при выполнении которого уравнение (3.5) эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора.

Анализ показывает, что условия (3.2), (3.4) и (3.6) при $\nu(r) = \nu_1(r)$ оказываются в общем случае (т. е. для любого вида потенциала $\Pi(r)$) несовместными.

Итак, ньютоновское векторное дифференциальное уравнение возмущенного центрального движения (2.1) приводится при указанном выше выборе регуляризующих функций $\varkappa$ и ν к кватернионному уравнению (3.3) осцилляторного вида. В общем случае это уравнение должно дополняться скалярными уравнениями для расстояния r и переменных h (или h^*), c. При соответствующем выборе регуляризующих функций одно или два из этих уравнений (например, в случае Кустаанхеймо — Штифеля это — уравнения для r и c) выпадают из рассмотрения.

4. Нормальная форма кватернионных уравнений возмущенного центрального движения. Рассмотренные во втором разделе уравнения возмущенного центрального движения содержат в качестве основного дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка (2.24), принимающее при соответствующем выборе регуляризующих функций форму уравнения движения четырехмерного возмущенного осциллятора (3.3). В некоторых задачах возмущенного центрального движения материальной точки целесообразно применение кватернионных уравнений возмущенного движения в нормальной форме, использующей отображение вектора $\mathbf{c}$ момента скорости точки на базис Y или X. Уравнения получаются[4] из (2.9), (2.10) и имеют вид:

в отображениях на базис Y:

$$\mathbf{c}_Y^{\cdot} = -\,r\,\mathrm{vect}\,(\mathbf{Q}^{\bullet} \circ \vec{\boldsymbol{\lambda}}), \quad 2\boldsymbol{\lambda}^{\cdot} = r^{-2}\vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{c}_Y \tag{4.1}$$

$$\mathbf{c}_Y = c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3\,, \quad \mathbf{c}_Y^{\cdot} = c_2^{\cdot}\mathbf{i}_2 + c_3^{\cdot}\mathbf{i}_3$$

[4] См. указ. публ. с. 21

в отображениях на базис X:

$$\mathbf{c}_X^{\cdot} = -r \operatorname{vect}(\vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{Q}^{*}), \quad 2\vec{\boldsymbol{\lambda}}^{\cdot} = r^{-2}\mathbf{c}_X \circ \vec{\boldsymbol{\lambda}} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{c}_X = c_1^{+}\mathbf{i}_1 + c_2^{+}\mathbf{i}_2 + c_3^{+}\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{c}_X^{+\cdot} = c_1^{+\cdot}\mathbf{i}_1 + c_2^{+\cdot}\mathbf{i}_2 + c_3^{+\cdot}\mathbf{i}_3$$

где vect(...) — векторная часть кватерниона (...), ${}^{2}c_k^{+}$ — проекция вектора c на ось X_k, кватернион $\mathbf{a}^{*}$ определяется формулами (2.15).

Каждая из совокупностей уравнений (4.1) и (4.2) должна быть в общем случае дополнена уравнением для расстояния r:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m}\frac{d\Pi(r)}{dr} = \operatorname{sqal}(\vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\frac{d\Pi^{\cdot}}{dr} \tag{4.3}$$

$$c^2 = c_2^2 + c_3^2 = c_1^{+2} + c_2^{+2} + c_3^{+2}$$

где $\partial\Pi^{\cdot}/\partial r$ — производная от возмущающего потенциала по радиальному направлению.

Уравнения (4.1), (2.15), (4.3) образуют замкнутую систему уравнений возмущенного центрального движения материальной точки относительно неизвестных параметров Родрига — Гамильтона λ_j, проекций c_2, c_3 момента скорости на оси системы координат Y и расстояния r, а уравнения (4.2), (2.15), (4.3) — замкнутую систему уравнений относительно параметров λ_j, проекций c_i^{+}, момента скорости на оси системы координат X и расстояния r.

Координаты x_k материальной точки определяются через указанные переменные с помощью соотношения $\mathbf{r}_X = r\vec{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \vec{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}$, а проекции вектора скорости материальной точки находятся при использовании уравнений (4.1) по формулам

$$\mathbf{v}_X = \vec{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \circ \mathbf{v}_Y \circ \vec{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathbf{v}_Y = \mathbf{i}_1 \circ (r^{\cdot} - r^{-1}\mathbf{c}_Y)$$

а при использовании уравнений (4.2) — по формулам

$$\mathbf{v}_X = r^{-1}\mathbf{r}_X \circ (r^{\cdot} - r^{-1}\mathbf{c}_X), \quad \mathbf{v}_Y = \vec{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \circ \mathbf{v}_X \circ \vec{\boldsymbol{\lambda}}$$

Отметим, что порядок системы уравнений (4.1), (4.3) на единицу меньше порядка системы уравнений (4.2), (4.3), кроме того, второе уравнение (4.1) проще второго уравнения (4.2), т. к. $c_1 = 0$.

Указанные системы уравнений возмущенного движения, в отличие от систем уравнений, рассмотренных во втором и третьем разделах, содержат кватернионные дифференциальные уравнения первого порядка. За счет замены времени t и расстояния t на новые переменные эти системы уравнений принимают форму, удобную для аналитического и численного решения ряда задач возмущенного движения.

Полученные в данной работе кватернионные уравнения и соотношения целесообразно использовать для решения ряда задач: для регуляризации уравнений возмущенного центрального движения (устранения имеющейся при наличии центрального тела сингулярности типа полюса), для построения решения пространственной задачи невозмущенного центрального движения при любом виде потенциала П в униформизированной форме [9], позволяющей избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающего при обходе критических точек, для аналитического и численного исследования возмущенных движений в задачах небесной механики и астродинамики, а также в инерциальной навигации. Эти уравнения и соотношения позволяют также получить дифференциальные уравнения возмущенного движения, использующие вместо угловых оскулирующих элементов кватернионные элементы, применение которых повышает эффективность использования ЭВМ при численном решении задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin: Springer, 1971. 301 p.
2. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
3. *Лидов М. Л.* Увеличение размерности гамильтоновых систем, KS — преобразование, использование частных интегралов//Космич. исследования. 1982. Т. 20. Вып. 2. С. 163—176.
4. *Лидов М. Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла//Космич. исследования. 1982. Т. 20. Вып. 6. С. 787—807.
5. *Лидов М. Л., Ляхова В. А.* Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость//Космич. исследования. 1983. Т. 21. Вып. 1. С. 3—19.
6. *Челноков Ю. Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12—21.
7. *Челноков Ю. Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151—158.
8. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
9. *Беленький И. М.* Об одном методе униформизации решений в задачах центрального движения//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 34—41.

Саратов

Поступила в редакцию
31.I.1991