

УДК 533.6.013.42

© 1993 г. В. В. КУЗНЕЦОВ, О. Н. ОКОЛЕСНОВА

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ
 ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ
 ГЛУБОКОВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

В рамках модели безвихревого обтекания трубопровода (рассматриваемого как гибкий стержень кольцеобразного поперечного сечения) внешним потоком жидкости и действия на его стенки внутреннего потока гидросмеси (пульпы) сформулированы задачи исследования характеристик установившегося пространственного движения глубоководных трубопроводов, относящихся к классу сингулярно возмущенных дифференциальных систем с нелинейными, в общем случае, граничными условиями. Методом пограничных функций построено асимптотическое решение задачи стационарной буксировки трубопровода плавсредством, перемещающегося по заданной траектории в горизонтальной плоскости.

1. Рассмотрим задачу расчета статических характеристик морского трубопровода, шарнирно закрепленного в верхней точке с подвижным плавсредством и с буферным устройством (присоединенной массой) — в нижней его точке (фиг. 1). Будем использовать общие нелинейные уравнения статического равновесия трубопровода в связанных осях $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) [1]:

$$Q' = x \times Q + q, \quad (Ax)' = x \times Ax + e_1 \times Q + m \quad (1.1)$$

$$\theta' = L_1 x, \quad x' = e_1 - e_{10}, \quad m = m_1 e_1, \quad A = \|A_{ij}\|$$

$$A_{11} = GI, \quad A_{22} = A_{33} = EI_b = EI = \text{const}$$

Здесь $Q = \{T, Q_1, Q_2\}$, T, Q_1, Q_2 — осевое и перерезывающее усилия; $H = \{H_1, H_2, H_3\}$, H_1, H_2, H_3 — кручение и кривизны осевой линии деформированного трубопровода; $\theta = (\varphi, \psi, \theta)$ — углы перехода от базиса $\{e_{i0}\}$ к $\{e_i\}$; L_1 — матрица преобразования координатных базисных векторов; A — диагональная матрица жесткости; $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ — декартовы координаты точек осевой линии трубопровода; m_1 — распределенный крутящийся момент; q — вектор внешней распределенной нагрузки

$$q = q_w + q_n q_h + q_{sw} + q_{af}$$

$$q_w = -m g e_{10}, \quad v_2 = v_{s2} - v_{c2}, \quad v_3 = v_{s3} - v_{c3}$$

$$q_n = -0,5 \rho_w c_n D [v_2 e_2 + v_3 e_3] [v_2^2 + v_3^2]^{1/2}$$

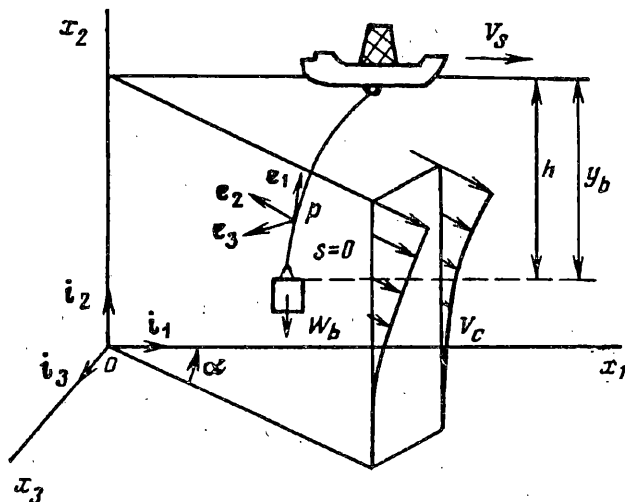
$$q_h = [(m_w - m_f) g (h - x_2) + 0,5 m_f (v_f - v_{s1})^2 + 0,5 m_w (v_{c1} - v_{s1})^2 (x_3 e_2 + x_2 e_3) + (m_w - m_f) g (\cos \varphi \sin \psi e_3 - \sin \psi e_2)] \quad (1.2)$$

$$q_{sw} = -m_w e_1 \times (dv_{sw}/dt) \times e_1$$

$$q_{af} = -m_f e_1 \times (dv_{af}/dt) \times e_1, \quad v_{sw} = v_s + (v_{c1} - v_{s1}) e_1$$

$$v_{af} = v_s + (v_f - v_{s1}) e_1, \quad m_w = 0,25 \pi D^2 \rho_w$$

$$m_f = 0,25 \pi d^2 \rho_f, \quad v_f = v_f e_1$$



Фиг. 1.

где $q_w, q_n, q_h, q_{sw}, q_{of}$ — соответственно вектор силы тяжести элемента трубопровода в вакууме, гидродинамического сопротивления, гидростатического обжатия стенок трубопровода за счет разницы давлений внешнего и внутреннего потоков жидкости, инерции присоединенных масс морской воды и гидросмеси; ρ_w — плотность морской воды; ρ_f — плотность гидросмеси; v_s — скорость движения плавсредства в горизонтальной плоскости: $x_1 O x_3$; v_f — постоянная скорость движения гидросмеси; $h = y_b$ — глубина погружения буферного устройства; c_n — коэффициент гидростатического сопротивления.

Проектируя усилия, действующие в нижней точке ($s = 0$) у буферного устройства, имеющего известный вес в жидкости W_b на оси x_1, x_2, x_3 получаем следующие краевые условия для системы (1.1), (1.2):

$$T_e (\sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) + Q_1 \cos \varphi \cos \theta + Q_2 (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) = -Q_{b1}$$

$$T_e \cos \varphi \cos \psi - Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \psi \sin \psi = W_b \quad (1.3)$$

$$T_e (\sin \varphi \cos \psi \sin \theta - \sin \psi \cos \theta + Q_1 \cos \varphi \sin \theta + Q_2 (\sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta) = Q_{b3}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ при } s = 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = y_b \text{ при } s = l \quad (1.4)$$

$$T_e = T - 2\nu ((m_f - m_w) g (h - x_2) + 0,5m_w (v_{c1} - v_{s1})^2 - 0,5m_f (v_f - v_{s1})^2$$

где T_e — эффективное осевое усилие, учитывающее влияние гидростатического обжатия стенок трубопровода [1]; Q_{b1}, Q_{b3} — проекции вектора силы гидродинамического сопротивления буферного устройства соответственно на оси x_1 и x_3 ; ν — коэффициент Пуассона; l — полная длина деформированного трубопровода.

Распределение конструктивных параметров трубопровода обычно задается по длине его нерастянутой осевой линии, поэтому в уравнениях (1.1), (1.2) целесообразно перейти к дуговой координате s_0 (отсчитываемой вдоль недеформированной осевой линии). В этом случае параметры деформируемого трубопровода

(полагая для определенности $\nu = 0,5$, а размеры поперечных сечений всех секций одинаковыми) с учетом очевидного дифференциального соотношения $ds = ds_0(1 + \varepsilon_1)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} D &= D_0 (1 - 0,5\varepsilon_1), \quad d = d_0 (1 - 0,5\varepsilon_1) \\ w_e &= w_{e0} (1 + \varepsilon_1), \quad m_w = m_{w0} (1 - \varepsilon_1) \\ m_f &= m_{f0} (1 + \varepsilon_1), \quad EI = EI_0 (1 + 2\varepsilon_1) \\ w_e &= (m + m_f - m_w)g \end{aligned} \quad (1.5)$$

где w_e погонный вес элемента трубопровода в жидкости.

После перехода в (1.1)—(1.5) к безразмерным переменным и параметрам

$$\begin{aligned} s^0 &= \frac{s_0}{l_0}, \quad T_e^0 = \frac{T_e}{w_{e0} l_0}, \quad Q_i^0 = \frac{Q_i}{w_{e0} l_0 \mu}, \quad \kappa^0 = \kappa l_0 \\ q^0 &= \frac{q}{w_{e0}}, \quad m^0 = \frac{m}{w_{e0} l_0 \mu^2}, \quad D_0 = \frac{D}{l_0}, \quad d_0 = \frac{d}{w_{e0}} \\ x_0 &= \frac{x}{l_0}, \quad h_0 = \frac{h}{l_0}, \quad \rho_w^0 = \rho_w \frac{v^2 l_0}{w_{e0}} \\ \rho_f^0 &= \frac{v_s^2 l_0}{w_{e0}} \rho_f, \quad v_f^0 = \frac{v_f}{v_s}, \quad Q_{bi}^0 = \frac{Q_{bi}}{w_{e0} l_0} \quad (i = 1, 2) \\ w_b^0 &= \frac{w_b}{w_{e0} l_0}, \quad v_c = \frac{v_c}{v_s}, \quad m_f^0 = m_f \frac{v_s^2}{w_{e0} l_0} \\ m_w^0 &= m_w \frac{v_s^2}{w_{e0} l_0}, \quad \gamma_1 = 4w_{e0} l_0 [\pi E (D_0^2 - d_0^2)]^{-1} \\ \mu &= \left(\frac{EI_0}{w_{e0} l_0^3} \right)^{1/2}, \quad v_s^0 = 1 \end{aligned}$$

Краевая задача (1.1)—(1.4) запишется окончательно в виде (верхний индекс ноль у безразмерных величин опущен):

$$Y' = f(s_0, y, z; \mu), \quad \mu z' = P(y) z^* + r(s_0, y) + \mu \omega(z) (1 + \gamma_1 T_e) x_1, \quad 0 < s_0 < 1 \quad (1.6)$$

$$M_0 Y(0, \mu), \quad M_1 Y(1) = b, \quad Y = \{y, z\}^* \quad (1.7)$$

$$y = \{T_e, x_1, \varphi, \psi, \theta, x_1, x_2, x_3\}^*, \quad z = \{Q_1, Q_2, x_2, x_3\}^*$$

$$f = \{f_1, \dots, f_8\}^*, \quad f_1 = \cos \varphi \cos \psi + \mu (x_3 Q_1 - x_2 Q_2) -$$

$$m_{w0} (v_{c1} - v_{s1}) (v_{c1}' - v_{s1}') - m_{f0} (v_f - v_{c1}) v_{s1}'$$

$$f_2 = 1,5 (1 + 3\gamma_1 T_e) m_1 (x_1, x_2, x_3; \mu)$$

$$f_3 = (1 + \gamma_1 T_e) (x_3 \cos \psi - x_1 \sin \psi)$$

$$f_4 = (1 + \gamma_1 T_e) (x_2 + (x_1 \cos \psi + x_3 \sin \psi) \operatorname{tg} \psi)$$

$$f_5 = (1 + \gamma_1 T_e) (x_1 \cos \psi + x_3 \sin \psi), \quad f_7 = (1 + \gamma_1 T_e) \cos \varphi \cos \psi$$

$$f_6 = - (1 + \gamma_1 T_e) (\sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta)$$

$$f_8 = (1 + \gamma_1 T_e) (\sin \varphi \cos \psi \sin \theta - \sin \psi \cos \theta), \quad P = \|P_{ij}\|$$

$$P_{ij} = (-1)^{i+j} P_j \quad (i = 1, 2; j = 1), \quad (i = 3, 4; j = 3), \quad P_{ij} = 0, \quad (i \neq j)$$

$$P_1 = m_{m0} (v_{c1} - v_{s1})^2 + m_{f0} (v_f - v_{s1})^2 - T_e (1 + \gamma_1 T_e)$$

$$P_3 = 1 + 3\gamma_1 T_e, \quad \Gamma = \{r_1, r_2, 0, 0\}^*$$

$$r_1 = -\sin \varphi + 0,5c_{p_w} D_0 (1 + 0,5\gamma_1 T_e) v_2 (v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$$

$$r_2 = \cos \varphi \sin \psi + 0,5c_{p_w} D_0 (1 + 0,5\gamma_1 T_e) v_3 (v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$$

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}^*, \quad \omega_1 = Q_2$$

$$\omega_2 = -Q_1, \quad \omega_3 = x_3/3, \quad \omega_4 = x_2/3$$

где M_0, M_1 — прямоугольные матрицы (6×12), состоящие из нулей и единиц; $\Gamma: \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^6$, $b \in \mathbb{R}^6$ (...) — операция транспонирования векторов.

Для решения задачи (1.6), (1.7) применяется один из вариантов метода асимптотического интегрирования (при $l_0 \geq 1000$ м параметр μ имеет величину $10^{-3} - 10^{-4}$).

2. Для рассматриваемого участка океана будем считать известными функциями декартовых координат профиль скорости подводных течений v_c и распределение внешнего крутящегося момента m_1 ; причем для выбранного способа приведения переменных и параметров к безразмерному виду $m_1 = m_1(x_1, x_2, x_3; \mu) \rightarrow m_{1,0}(x_1, x_2, x_3; 0)$, при $\mu \rightarrow 0$.

В соответствии с [2] конкретная форма представления асимптотических рядов для задачи (1.6), (1.7) зависит от собственных значений матрицы $\{P(y)z^* + \Gamma(s_0, y)\}$ определенных для вырожденного решения этой задачи (при $\mu = 0$).

Для характеристического уравнения

$$\text{Det} \left(\frac{\partial}{\partial z} \{P(y)z^* + \Gamma(s_0, y)\} - \lambda E \right) = 0 \quad (2.1)$$

где $z = \xi(s_0, y)$ — решение уравнения $P(y)z^* + \Gamma(s_0, y) = 0$; определим его корни $\lambda_i(s_0, y)$:

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm (-P_1(s_0, y) P_3(y))^{1/2} \quad (2.2)$$

Анализ знаков выражения P_1 и P_3 показывает, что $P_3(y)$ всегда больше нуля, а $P_1(s_0, y) < 0$, если

$$T_e (1 + \gamma_1 T_e) > m_{w0} (v_{c1} - v_{s1})^2 + m_{f0} (v_f - v_{s1})^2 \quad (2.3)$$

Условие (2.3) при $0 \leq s_0 \leq 1, \eta_1 \leq |y| \leq \eta_2$, где η_1, η_2 — границы измерения области значений функции $\xi(s_0, y)$ по y выполняется, если оно остается справедливым при $s_0 = 0$ и $y = y(0)$, что всегда имеет место ввиду отличающегося на несколько порядков значения $T_e(0)$ от силы в правой части неравенства (2.3) (не превосходящей нескольких десятков килоньютонеров). Таким образом, характеристическое уравнение (2.1) имеет действительные корни разных знаков, что позволяет применять метод пограничных функций [2]. При некоторых дополнительных условиях теоремы из [2] об асимптотических свойствах условно устойчивых дифференциальных систем, можно доказать, что решение задачи (1.6), (1.7) существует, единственно и стремится при $\mu \rightarrow 0$ к решению вырожденной задачи (описывающей поведение абсолютно гибкого стержня $EI_0 = 0$):

$$\bar{y}_0' = \bar{F}_0(s_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0; 0), \quad P(\bar{y}_0) \bar{z}_0^* + \Gamma(s_0, \bar{y}_0) = 0 \quad (2.4)$$

$$M_0 \bar{y}_0(0) = \bar{\Gamma}_0(\bar{y}_0(0); 0), \quad M_1 \bar{y}_0(1) = b$$

При этом в окрестностях граничных точек $s_0 = 0$ и $s_0 = 1$ возникают экспоненциально убывающие пограничные слои. Приближенное решение задачи (1.6), (1.7) представляется тогда в виде

$$Y = \bar{Y} + \Pi Y + RY \quad (2.5)$$

где $\bar{Y} = \bar{Y}_0(s_0) + \mu \bar{Y}_1(s_0) + \dots$ — формальный степенной ряд с коэффициентами, зависящими от s_0 , $\Pi Y = \Pi_0 Y(t_0) + \mu \Pi_1 Y(t_0) + \dots$, $RY = R_0 Y(t_1) + \mu R_1 Y(t_1) + \dots$ — пограничные ряды с коэффициентами, зависящими от $t_0 = s_0/\mu$ и $t_1 = (s_0 - 1)/\mu$.

После подстановки (2.5) в (1.6), (1.7) и проведения необходимых преобразований, для главных членов асимптотики быстроизменяющихся компонент искомого решения получаем следующие группы уравнений:

$$d\Pi_0 z_i / dt_0 = (-1)^{i+1} P_1(0, \bar{y}_0(0)) \Pi_0 z_{5-i} \quad (i = 1, 2)$$

$$d\Pi_0 z_i / dt_0 = (-1)^{i+1} P_3(y_0(0)) \Pi_0 z_{5-i} \quad (i = 3, 4)$$

$$\Pi_0 z_i(0) + \bar{z}_{i,0}(0) = 0 \quad (i = 3, 4), \quad Pz_i(\infty) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$dR_0 z_i / dt_1 = (-1)^{i+1} P_1(1, \bar{y}_0(1)) R_0 z_{5-i} \quad (i = 1, 2)$$

$$dR_0 z_i / dt_1 = (-1)^{i+1} P_3(\bar{y}_0(1)) R_0 z_{5-i} \quad (i = 3, 4)$$

$$R_0 z_i(1) + \bar{z}_{i,0}(1) = 0 \quad (i = 3, 4), \quad R_0 z_i(\infty) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

Откуда окончательно получаем

$$T_e(s_0) = \bar{T}_{e,0}(s_0) + O(\mu), \quad \varphi(s_0) = \bar{\varphi}_0(s_0) + O(\mu)$$

$$x_1(s_0) = \bar{x}_{1,0}(s_0) + O(\mu), \quad \psi(s_0) = \bar{\psi}_0(s_0) + O(\mu)$$

$$\theta(s_0) = \bar{\theta}_0(s_0) + O(\mu), \quad x_i(s_0) = \bar{x}_{i,0}(s_0) + O(\mu) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$Q_i(s_0) = (-1)^i [P_3(\bar{y}_0(0))] \Gamma^{-\lambda_0} \bar{x}_{4-i,0}(0) \exp(-\lambda_0 s_0/\mu) +$$

$$+ (-1)^{i+1} [-P_3(\bar{y}_0(1))] \Gamma^{-\lambda_1} \bar{x}_{4-i,0}(1) \exp(\lambda_1 (s_0 - 1)/\mu) + O(\mu) \quad (i = 1, 2)$$

$$x_i(s_0) = \bar{x}_{i,0}(s_0) - \bar{x}_{i,0}(0) \exp(-\lambda_0 s_0/\mu) -$$

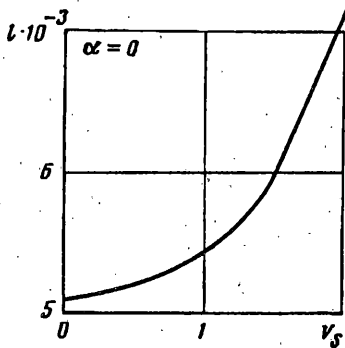
$$- \bar{x}_{i,0}(1) \exp(\lambda_1 (s_0 - 1)/\mu) + O(\mu) \quad (i = 2, 3)$$

$$\lambda_i = [-P_1(i, \bar{y}_0(i)), P_3(\bar{y}_0(1))]^{1/2} \quad (i = 0, 1)$$

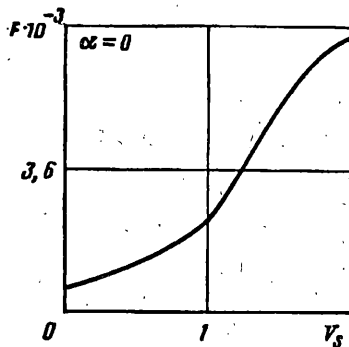
Из формул (2.6) можно получить, как следствие, асимптотическое решение задачи стационарной буксировки трубопровода для случая, когда его осевая линия является плоской кривой [3], если принять там $x_1 = \theta \equiv 0$ ($m_1 \equiv 0$).

Асимптотический анализ уравнений статического равновесия морских трубопроводов выявляет, таким образом, наличие локальных зон краевого эффекта у проекций векторов кривизны и перерезывающих усилий, причем ширина этих зон имеет порядок $O(\mu |\ln \mu|)$, то есть стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$.

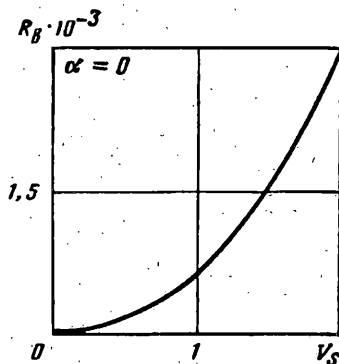
3. В приводимых ниже исследованиях принимались следующие значения расчетных параметров: $w_{e0} = 1,5$ кН/м, $D_0 = 0,5$ м, $d_0 = 0,47$ м, $E = 2 \times 10^8$ кН/м², $\rho_w = 1,04$ кНс²/м⁴, $\rho_f = 1,08$ кН с²/м⁴, $c_n = 1,4$, $v_f = 2$ м/с. Профиль подводных течений аппроксимировался линейной зависимостью: $v_x(0, x_2, 0) = (1,5/h)x_2$ (м/с), $0 \leq x_2 \leq h = l_0$. Варьируемыми параметрами являлись исходная длина трубопровода l_0 , угол отклонения вектора скорости подводных течений от вертикальной плоскости α , скорость движения плавсредства v_s и вес буферного устройства



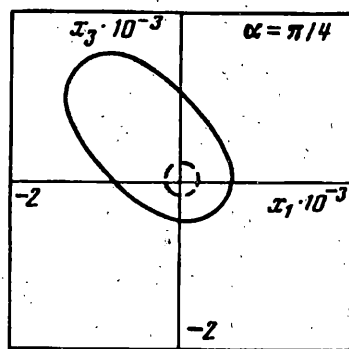
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

W_b : $1000 \leq l_0 \leq 6000$ м, $0 \leq \alpha \leq 0,5\pi$, $0,01 \leq v_s \leq 2$ м/с, $500 \leq W_b \leq 1500$ кН. При фиксированных значениях этих параметров определялись равновесные конфигурации трубопровода по формулам (2.5) (полагая $x_1 = \theta \equiv 0$, $m_1 \equiv 0$).

Для всех рассмотренных вариантов численное интегрирование уравнений (2.4) осуществлялось методом пристрелки, где точности приближенного решения уравнений системы стыковки и определения вектора недостающих начальных параметров задавались, соответственно, равными $\epsilon = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-9}$.

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2—5 для случая прямолинейного движения плавсредства со скоростью $v_s = v_s i_1$ (фиг. 2, 3) и по окружности (фиг. 4, 5) в условиях сохранения постоянной глубины погружения буферного устройства (за счет выдвигания дополнительных секций трубопровода). При этом полная длина трубопровода l (м) оказывается нелинейной функцией скорости буксировки v_s (м/с), характерный график которой имеет вид кривой, приведенной на фиг. 2. На фиг. 3 построен график зависимости горизонтальной составляющей силы F (кН), действующей со стороны трубопровода на плавсредство, от скорости буксировки. С его помощью можно определить необходимую мощность силовой установки плавсредства для обеспечения заданной скорости буксировки или наоборот — ввести ограничение на максимальную скорость буксировки при известной мощности силовой установки (на фиг. 2—4 $h = 5000$ м, $W_b = 1000$ кН).

При движении плавсредства по окружности в горизонтальной плоскости $x_1 O x_2$ траектория движения буферного устройства, как и следовало ожидать, оказалась соосной окружностью (если пренебречь влиянием подводных течений), радиус которой R_b (м) нелинейно зависит от скорости буксировки (фиг. 4). В

Таблица 1

v_s	$h = 1000$	$h = 3000$	$h = 5000$	$h = 6000$
0,5	95 (81%)	75 (31%)	70 (19%)	65 (17%)
1,0	97 (84%)	96 (40%)	84 (22%)	70 (18%)
1,5	99 (88%)	120 (50%)	94 (25%)	90 (23%)
2,0	112 (100%)	150 (62%)	110 (30%)	100 (26%)

Таблица 2

h	$W_b = 500$	$W_b = 1000$	$W_b = 1500$
1000	89 (83%)	97 (84%)	118 (84%)
3000	88 (40%)	96 (40%)	104 (39%)
5000	76 (22%)	84 (22%)	91 (23%)
6000	68 (17%)	70 (18%)	80 (20%)

то же время направление вектора скорости подводных течений оказывает существенное влияние на форму траектории движения буферного устройства, характерный график которой показан на фиг. 5 ($h = 1000$ м, $W_b = 1500$ кН, $v_s = 1$ м/с). Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании реальных гидротехнических комплексов поиска, разведки и добычи минерального сырья с глубоководных впадин дна Мирового океана.

В табл. 1, 2 ($\alpha = 0$) приведены результаты расчета амплитудных значений интенсивности напряжений σ_i (МПа), определяемых изгибными напряжениями в нижней зоне краевого эффекта, где в скобках указаны процентные отношения этих напряжений к соответствующим значениям интенсивности напряжений в верхней точке трубопровода. Табл. 1 характеризует изменение напряжений от v_s (м/с) и h (м) при $W_b = 1000$ кН. С ростом скорости буксировки вклад изгибных напряжений является весьма существенным даже для случая $h = 6000$ м. От изменения веса буферного устройства, как видно из табл. 2, изгибные напряжения зависят в меньшей степени ($v_s = 1,0$ м/с).

Таким образом, в задачах прочностного расчета глубоководного трубопровода, буксируемого плавсредством, нельзя пренебрегать его изгибной жесткостью (во всяком случае, при скоростях буксировки $v_s \geq 0,5$ м/с).

Отметим, что использование алгоритма метода параметризации граничных условий [4], асимптотических формул (2.6) и алгоритма их численной корректировки [3] обеспечивает практически одинаковые по точности результаты, начиная с длин трубопровода $l_0 \geq 2000$ м. При выполнении этого условия в прикладных задачах стационарной буксировки трубопроводов достаточно ограничиться рассмотрением главных членов асимптотических разложений их решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В., Кузнецов В. В., Земеров В. Н. Механика длинномерных элементов глубоководных комплексов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. 188 с.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. Земеров В. Н., Кузнецов В. В. Об одном подходе к решению одномерных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 124—129.
4. Кузнецов В. В. Метод параметризации граничных условий в одномерных жестких краевых задачах механики деформируемых систем // Долговечность материалов и элементов конструкций в агрессивных и высокотемпературных средах. Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1988. С. 12—15.